Feuille de TD n° 3

Images réciproques, injections, surjections et groupes.

11 octobre 2020

Exercice 1.

1. Déterminer l'image réciproque $f^{-1}(I)$ dans les cas suivants :
   (a) $f(x) = \sin(x)$ et $I = \left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$.
   (b) $f(x) = \cos(x)$ et $I = \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$.
2. Déterminer $f\left(f^{-1}(I)\right)$ avec $f(x) = \sin(x)$ et $I = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$.
3. Déterminer $f^{-1}\left(f(I)\right)$ dans les cas suivants :
   (a) $f(x) = \cos(x)$ et $I = \left[0, \frac{\pi}{3}\right]$,
   (b) $f(x) = x^2 - 2x + 3$ et $I = [2, 3]$.

Correction partielle. Détails dans la feuille Alg1Geo1TD3NotesEx1à5

1. (a) $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \left\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.
   (b) $\cos^{-1}\left(\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[\right) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right]$.
2. $\sin\left(\sin^{-1}\left(\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]\right)\right) = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.
3. (a) $\cos^{-1}\left(\cos\left(\left[0, \frac{\pi}{3}\right]\right)\right) = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi\right]$.
   (b) $f^{-1}\left(f\left([2,3]\right)\right) = [-1, 0] \cup [2, 3]$.

Exercice 2. Les applications suivantes sont-elles injectives ? Surjectives ?

1. $f_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$; $(x, y) \longmapsto 2y$,
2. $f_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$; $(x, y) \longmapsto (1, x - y, y)$,
3. $f_3 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$; $(x, y) \longmapsto (x + y, x - y)$,
4. $f_4 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$; $n \longmapsto n + 1$,
5. $f_5 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$; $n \longmapsto n + 1$,
6. $f_6 : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$; $n \longmapsto \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ -\dfrac{n+1}{2} & \text{sinon,} \end{cases}$
7. $f_7 : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$; $(u_0, u_1, u_2, \ldots) \longmapsto (0, u_0, u_1, u_2, \ldots)$,
8. $f_8 : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$; $(u_0, u_1, u_2, \ldots) \longmapsto (u_1, u_2, u_3, \ldots)$,
9. $f_9 : \mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}^*$; $(n, p) \longmapsto 2^n(2p + 1)$.

Correction partielle. Détails dans la feuille Alg1Geo1TD3NotesEx1à5

1. Non injective ($(0, 1)$ et $(1, 1)$ ont la même image), surjective.
2. Injective, non surjective ($(0, 0, 0)$ n'admet pas d'antécédent).
3. Injective et surjective.
4. Injective, non surjective (0 n'admet pas d'antécédent).
5. Injective et surjective.
6. Injective et surjective.
7. Injective, non surjective (la suite constante égale à 1 n'a pas d'antécédent).

8. Non injective ($(1,1,1,\dots)$ et $(0,1,1,1,\dots)$ ont la même image), surjective.
9. Injective et surjective.

Exercice 3. Soient E et F deux ensembles. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.

1. Soient A une partie de E et B une partie de F. Démontrer que $f\left(A \cap f^{-1}(B)\right) = f(A) \cap B$.
2. Démontrer que f est injective si et seulement si pour toute partie A de E, $A = f^{-1}\left(f(A)\right)$.
3. Démontrer que f est surjective si et seulement si pour toute partie B de F, $B = f\left(f^{-1}(B)\right)$.

---

1. Procédons par double-inclusion.
   $\triangleright$ Soit $y \in f\left(A \cap f^{-1}(B)\right)$. Il existe $x \in A \cap f^{-1}(B)$ tel que $y = f(x)$. Comme $x \in A$, $y = f(x) \in f(A)$. Comme $x \in f^{-1}(B)$, $y = f(x) \in B$. Donc $y \in f(A) \cap B$.
   D'où $f\left(A \cap f^{-1}(B)\right) \subset f(A) \cap B$.
   $\triangleleft$ Soit $y \in f(A) \cap B$. En particulier, $y \in f(A)$. Il existe donc $x \in A$ tel que $y = f(x)$. Comme $y \in B$, $f(x) \in B$ et donc $x \in f^{-1}(B)$. Donc $x \in A \cap f^{-1}(B)$. Comme $y = f(x)$, on a $y \in f\left(A \cap f^{-1}(B)\right)$.
   D'où $f(A) \cap B \subset f\left(A \cap f^{-1}(B)\right)$.
   Finalement,
   $$f\left(A \cap f^{-1}(B)\right) = f(A) \cap B.$$
2. Procédons par double implication.
   • Supposons f injective. Soit A une partie de E. Montrons que $A = f^{-1}\left(f(A)\right)$.
   $\triangleright$ Soit $x \in A$. Alors $f(x) \in f(A)$ donc $x \in f^{-1}\left(f(A)\right)$. Donc $A \subset f^{-1}\left(f(A)\right)$. *Propriété vue aussi dans le cours, l'injectivité de f n'intervient pas.*
   $\triangleleft$ Soit $x \in f^{-1}\left(f(A)\right)$. Alors $f(x) \in f(A)$. Il existe donc $y \in A$ tel que $f(x) = f(y)$. Par injectivité de f, on en déduit que $x = y$. Comme $y \in A$, $x = y \in A$. Donc $f^{-1}\left(f(A)\right) \subset A$.
   D'où $A = f^{-1}\left(f(A)\right)$.
   • Réciproquement, supposons que pour toute partie A de E, $A = f^{-1}\left(f(A)\right)$. Montrons que f est injective.
   Soit $(u, v) \in E^2$ tel que $f(u) = f(v)$. Alors $f(u) \in \{f(v)\} = f\left(\{v\}\right)$. Donc $u \in f^{-1}\left(f(\{v\})\right)$. Or, par hypothèse, $f^{-1}\left(f(\{v\})\right) = \{v\}$. Donc $u \in \{v\}$. Donc $u = v$.
   f est donc injective.
   D'où le résultat.
3. Procédons par double implication.
   • Supposons f surjective. Soit B une partie de E.
   $\triangleright$ Soit $y \in f\left(f^{-1}(B)\right)$. Alors il existe $x \in f^{-1}(B)$ tel que $y = f(x)$. Comme $x \in f^{-1}(B)$, $f(x) \in B$, et donc $y = f(x) \in B$. Donc $f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B$. *Propriété vue aussi dans le cours, la surjectivité de f n'intervient pas.*
   $\triangleleft$ Soit $y \in B$. Par surjectivité de f, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Comme $y \in B$, $f(x) = y \in B$ donc $x \in f^{-1}(B)$. Donc $y = f(x) \in f\left(f^{-1}(B)\right)$. D'où $B \subset f\left(f^{-1}(B)\right)$.
   D'où $B = f\left(f^{-1}(B)\right)$.
   • Réciproquement, supposons que pour toute partie B de F, $f\left(f^{-1}(B)\right) = B$. Montrons que f est surjective.
   Soit $y \in F$. F étant une partie de F, on a $f\left(f^{-1}(F)\right) = F$. Donc $y \in f\left(f^{-1}(F)\right)$. Il existe donc $x \in f^{-1}(F)$ tel que $y = f(x)$. Donc $x \in E$ est un antécédent de y par f. f est donc surjective. *Ou directement, comme $f^{-1}(F) = E$, $F = f(f^{-1}(F)) = f(E)$ donc f est surjective.*
   D'où le résultat.

Exercice 4. Soient E un ensemble et $f : E \longrightarrow E$ une application telle que $f \circ f \circ f = f$. Montrer que f est injective si et seulement si f est surjective.

Procédons par double implication.

• Supposons f injective. Montrons que f est surjective.

Soit $y \in E$. D'après la relation vérifiée par f, on a

$$f\left(f\left(f(y)\right)\right) = f(y).$$

Posons $x = f\left(f(y)\right)$. Alors on a $f(x) = f(y)$ et par injectivité de f, $x = y$. Donc $y = f(f(y))$. $f(y)$ est donc un antécédent de y par f.

Donc f est surjective.

• Supposons f surjective. Montrons que f est injective.

Soient x et y deux éléments de E tels que $f(x) = f(y)$.

Par surjectivité de f, il existe $u \in E$ tel que $x = f(u)$ et il existe $v \in E$ tel que $y = f(v)$.

De $f(x) = f(y)$, on obtient $f(f(u)) = f(f(v))$, donc $f(f(f(u))) = f(f(f(v)))$. D'après la relation vérifiée par f, on a donc $f(u) = f(v)$.

Donc $x = f(u) = f(v) = y$.

La fonction f est donc injective.

D'où le résultat.

Exercice 5. Soient E et I deux ensembles. Soit $f : E \longrightarrow I$ une application surjective. On pose, pour tout $i \in I$, $A_i = f^{-1}(\{i\})$. Montrer que la famille $(A_i)_{i\in I}$ forme une partition de E.

Vérifions les trois points de la définition d'une partition de E.

- Par surjectivité de f, pour tout $i \in I$, i admet des antécédents par la fonction f et $A_i = f^{-1}(\{i\})$ est donc non vide.
- Soient i et j des éléments de I. Supposons que $A_i \cap A_j \neq \emptyset$. Il existe donc $x \in A_i \cap A_j$. Alors $x \in A_i$ donc $f(x) = i$ et $x \in A_j$ donc $f(x) = j$. On en déduit donc que $i = j$. Donc, par contraposée, si i et j sont des éléments distincts de I alors $A_i \cap A_j = \emptyset$.
- On a $\cup_{i\in I} A_i \subset E$ puisque les A_i sont des parties de E.
  Soit $x \in E$. Posons $i_0 = f(x)$. Alors $x \in f^{-1}(\{i_0\}) = A_{i_0}$. Donc $x \in \cup_{i\in I} A_i$. Donc $E \subset \cup_{i\in I} A_i$.
  Donc $E = \cup_{i\in I} A_i$.

De ces trois points, il vient que la famille $(A_i)_{i\in I}$ forme une partition de E.

Exercice 6. Soit H un sous-groupe strict de G. Déterminer le sous-groupe engendré par le complémentaire de H.

Soit K le sous-groupe engendré par le complémentaire de H. Alors $H \cup K = G$ est un groupe. Il vient d'après le cours que $H \subset K$ et $K = G$.

Exercice 7.

1. Soit G un groupe abélien, $x \in G$ un élément d'ordre p et $y \in G$ un élément d'ordre q. Montrer que xy est d'ordre au plus pq.
2. xy est-il nécessairement d'ordre pq ? (donnez des exemples)
3. Si $G = \mathrm{Bij}(\mathbb{Z} \times \mathbb{Z})$, montrer que $f : (m, n) \mapsto (-n, m)$ et $g : (m, n) \mapsto (n, -m - n)$ sont des éléments de G d'ordre respectif 4 et 3. Quel est l'ordre de $f \circ g$?

---

1. Le groupe G étant commutatif, on calcule $(xy)^{pq} = (x^p)^q (y^q)^p = 1^q 1^p = 1$, donc xy est d'ordre au plus pq.
2. Non, par exemple $(1, 2)$ est d'ordre 2 dans S_n, et $(1, 2) \circ (1, 2) = id$ n'est pas d'ordre 4 mais d'ordre 1. Par contre $a = \exp(i\pi)$ est d'ordre 2, $b = \exp(2i\pi/3)$ est d'ordre 3 et $ab = \exp(5i\pi/6)$ est d'ordre 6.
3. On trouve $f^2 = id$ et $g^3 = id$, ce qui prouve que f et g sont des bijections de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ d'ordre respectif 2 et 3. Enfin, $f \circ g(m, n) = (m + n, n)$ et $(f \circ g)^k(1, 0) = (k, 0)$, donc $(f \circ g)^k \neq Id$ pour $k > 0$. On en déduit que $f \circ g$ est d'ordre infini et pas d'ordre au plus 6. Cela ne contredit pas la première question, car l''hypothèse G abélien n'est pas vérifiée.

Exercice 8. On considère $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2};\ a, b \in \mathbb{Z}\}$.

1. Montrer que $(\mathbb{Z}[\sqrt{2}], +)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}, +)$.
2. Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{2}] \setminus \{0\}$ est stable par la multiplication, possède un élément neutre, mais n'est pas un groupe.
3. On note $N(a + b\sqrt{2}) = a^2 - 2b^2$. Montrer que, pour tous x, y de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, on a $N(xy) = N(x)N(y)$.
4. En déduire que les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ sont ceux s'écrivant $a + b\sqrt{2}$ avec $a^2 - 2b^2 = \pm 1$.

1-2 $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ est

- stable par la loi $+$: $(a + b\sqrt{2}) + (a' + b'\sqrt{2}) = (a + a') + (b + b')\sqrt{2}$.
- stable par la loi $\times$:
  $$(a + b\sqrt{2}) \times (a' + b'\sqrt{2}) = (aa' + 2bb') + (ab' + a'b)\sqrt{2}$$
  .
- stable par passage à l'opposé $-(a + b\sqrt{2}) = -a + (-b)\sqrt{2}$.

De plus, $1 \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ et 2 n'est pas inversible, car sinon $\dfrac{1}{2} = a + b\sqrt{2}$, ce qui contredirait $\sqrt{2}$ irrationnel.

1. Posons $x = a+b\sqrt{2}$ et $y = a'+b'\sqrt{2}$. En tenant compte de la formule pour le produit obtenue à la question précédente, on a

$$\begin{array}{rcl} N(xy) & = & (aa'+2bb')^2 - 2(ab'+a'b)^2 \\ & = & (aa')^2 - 2(ab')^2 - 2(a'b)^2 + (4bb')^2. \end{array}$$

D'autre part,

$$\begin{array}{rcl} N(x) \times N(y) & = & (a^2-2b^2)(a'^2-2b'^2) \\ & = & (aa')^2 - 2(ab')^2 - 2(a'b)^2 + (4bb')^2. \end{array}$$

2. Soit $x = a+b\sqrt{2}$. Supposons d'abord que x est inversible, d'inverse y. Alors $N(xy) = N(1) = 1$, et donc $N(x)N(y) = 1$. Puisque $N(x)$ et $N(y)$ sont tous les deux des entiers, on a nécessairement $N(x) = \pm 1$. Réciproquement, si $N(x) = \pm 1$, alors, en utilisant la quantité conjuguée :

$$\frac{1}{a+b\sqrt{2}} = \frac{a-b\sqrt{2}}{a^2-2b^2} = \pm(a-b\sqrt{2})$$

ce qui montre que $a+b\sqrt{2}$ est inversible, d'inverse $\pm(a-b\sqrt{2})$.