Feuille de TD n° 4

Bijections, relations d'équivalence et groupes

23 octobre 2020

Exercice 1.

1. Soit $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ x \longmapsto \dfrac{x}{1+x^2}$.
   (a) Déterminer l'image de f_1.
   (b) La fonction f_1 est-elle bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$? La fonction f_1 est-elle bijective de $\mathbb{R}$ sur son image ?
   (c) Montrer que f_1 induit une bijection de $[-1, 1]$ sur un ensemble à déterminer. Préciser la bijection réciproque.
2. Soit $f_2 : z \longmapsto \dfrac{z+i}{z-i}$.
   (a) Déterminer l'ensemble de définition de f_2.
   (b) Montrer que f_2 réalise une bijection de $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ sur $P = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) < 0\}$. Préciser la bijection réciproque.

Exercice 2. Soient E, F, G trois ensembles. On considère trois applications $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ et $h : G \longrightarrow E$.

1. Montrer que si $h \circ g \circ f$ est injective et que $g \circ f \circ h$ et $f \circ h \circ g$ sont surjectives alors f, g et h sont bijectives.
2. On suppose dans cette question que $G = E$. Justifier que $f \circ g \circ f$ est bien définie puis montrer que si $f \circ g \circ f$ est bijective alors f et g sont bijectives.

Exercice 3. Soient E et F deux ensembles. On considère une application $f : E \longrightarrow F$.

1. Montrer que f est injective si et seulement si pour tout $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
2. Montrer que f est bijective si et seulement si pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, $f(\complement_E A) = \complement_F f(A)$.

Exercice 4. On définit une relation binaire $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{R}$ par : $x\mathcal{R}y$ si $x\mathrm{e}^y = y\mathrm{e}^x$.

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence d'un élément x de $\mathbb{R}$ puis le nombre d'éléments de cette classe.

Exercice 5. Soit G un groupe fini. Si $a \in G$, on pose $\Phi_a : x \in G \mapsto axa^{-1} \in G$.

1. Vérifier que, si $a \in G$, Φ_a est un morphisme bijectif (ie automorphisme) de G, et que $I = \{\Phi_a \mid a \in G\}$ est un sous-groupe du groupe des automorphismes de G.
2. On suppose que I est un groupe cyclique. Montrer que G est commutatif.

Exercice 6. Soit ϕ un automorphisme de S_n qui transforme une transposition en une transposition. On note t_i la transposition $(1\ i)$.

1. Montrez que deux transpositions distinctes commutent ssi elles ont des supports disjoints.
2. Montrer qu'il existe trois éléments a_1, a_2 et a_3 tels que $\phi(t_2) = (a_1\ a_2)$ et $\phi(t_3) = (a_1\ a_3)$.
3. Montrer que pour tout $i > 3$, il existe a_i tel que $\phi(t_i) = (a_1\ a_i)$.
4. Montrer que l'application s qui à i associe a_i est bijective.
5. On appelle automorphisme intérieur h_s associé à s l'application définie par $h_s : S_n \to S_n\ \sigma \mapsto s\sigma s^{-1}$.
   (a) Montrer que pour tout $i, j \geq 2$, $\phi((i\ j)) = h_s((i\ j))$.
   (b) En déduire que $\phi = h_s$.

   Remarque : on vérifie que si $\sigma = (b_1\ \cdots\ b_r)$, alors $s\sigma s^{-1} = (s(b_1)\ \cdots\ s(b_r))$.

Indications

Exercice 1

1. On pourra s'aider d'un tableau de variations.
2. Vérifier que $f_2(D) \subset P$. Résoudre $f_3(z) = y$ et vérifier que le z obtenu appartient bien à D.

Exercice 2

Utiliser les propriétés du cours :

Si $g \circ f$ est injective (resp. surjective) alors f est injective (resp. g est surjective).

On pourra introduire f^{-1} et g^{-1} (après avoir justifié la bijectivité) pour obtenir le résultat sur h.

Exercice 3

1. Raisonner par double implication.
   Pour l'implication réciproque, on pourra choisir $A = \{u\}$ et $B = \{v\}$.
2. On peut par exemple :
   a) Montrer que f est injective si et seulement si pour toute partie A de E, $f(\complement A) \subset \complement f(A)$. Pour le sens réciproque, on pourrait notamment supposer $f(x) = f(y)$ avec $x \neq y$ et appliquer à $A = \{x\}$.
   b) Montrer que f est surjective si et seulement si pour toute partie A de E $\complement f(A) \subset f(\complement A)$. Pour la réciproque, prendre $A = E$.
   On peut aussi raisonner directement par double implication.

Exercice 4

1. Revenir à la définition.
2. On pourra étudier la fonction $t \longmapsto t\mathrm{e}^{-t}$.