# Corrigé du TD n° 4

*Bijections, relations d'équivalence, morphismes, groupes monogènes.*

26 octobre 2020

**Exercice 1.**

1. Soit $f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ x \longmapsto \dfrac{x}{1+x^2}$.
   (a) Déterminer l'image de $f_1$.
   (b) La fonction $f_1$ est-elle bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ ? La fonction $f_1$ est-elle bijective de $\mathbb{R}$ sur son image ?
   (c) Montrer que $f_1$ induit une bijection de $[-1,1]$ sur un ensemble à déterminer. Préciser la bijection réciproque.
2. Soit $f_2 : z \longmapsto \dfrac{z+i}{z-i}$.
   (a) Déterminer l'ensemble de définition de $f_2$.
   (b) Montrer que $f_2$ réalise une bijection de $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ sur $P = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) < 0\}$. Préciser la bijection réciproque.

---

*Éléments de correction. Voir détails sur la feuille TD4Alg1Ex1Notes*

1. (a) $\mathrm{Im}(f_1) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ (s'aider d'un tableau de variations.)
   (b) Non surjective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. Non injective de $\mathbb{R}$ sur son image.
   (c) $f_1$ est strictement croissante sur $[-1,1]$ donc induit une bijection de $[-1,1]$ sur $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, de bijection réciproque

$$\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \longrightarrow [-1,1]\ ;\ y \longmapsto \begin{cases} 0 \text{ si } y = 0 \\ \dfrac{1-\sqrt{1-4y^2}}{2y} \text{ si } y \neq 0. \end{cases}$$

2. (a) $\mathbb{C} \setminus \{i\}$.
   (b) Pour tout $z \in D$, $\mathrm{Re}(f_2(z)) = \dfrac{|z|^2-1}{|z-i|^2} < 0$ donc $f(D) \subset P$.

   Soit $y \in P$. Pour tout $z \in D$, $f_2(z) = y$ si et seulement si $z = i\dfrac{y+1}{y-1}$.

   Pour tout $y \in P$, $i\dfrac{y+1}{y-1} \in D$ et $f_2$ est bijective de $D$ sur $P$ de bijection réciproque

$$P \longrightarrow D\ ;\ y \longmapsto i\frac{y+1}{y-1}.$$

**Exercice 2.** Soient $E$, $F$, $G$ trois ensembles. On considère trois applications $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ et $h : G \longrightarrow E$.

1. Montrer que si $h \circ g \circ f$ est injective et que $g \circ f \circ h$ et $f \circ h \circ g$ sont surjectives alors $f$, $g$ et $h$ sont bijectives.
2. On suppose dans cette question que $G = E$. Justifier que $f \circ g \circ f$ est bien définie puis montrer que si $f \circ g \circ f$ est bijective alors $f$ et $g$ sont bijectives.

1. Supposons $h \circ g \circ f$ injective et $g \circ f \circ h$ et $f \circ h \circ g$ surjectives.
   $(h \circ g) \circ f$ étant injective, d'après le cours, $f$ est injective. $g \circ (f \circ h)$ et $f \circ (h \circ g)$ étant surjectives, d'après le cours, $g$ et $f$ sont surjectives.
   $f$ est donc injective et surjective donc bijective.
   Donc $f^{-1}$ existe et est bijective. Donc $(h \circ g) \circ f$ et $f^{-1}$ étant injectives, d'après le cours $((h \circ g) \circ f) \circ f^{-1} = h \circ g$ est injective. Donc toujours d'après la même propriété, $g$ est injective.
   Donc $g$ est injective et surjective donc bijective.
   Donc $g^{-1}$ existe et est bijective. Donc $h \circ g$ et $g^{-1}$ étant injectives, $(h \circ g) \circ g^{-1} = h$ est injective.
   Enfin, $f^{-1} \circ f^{-1}$ étant bijective comme composée de bijections, elle est surjective et $g \circ f \circ h$ étant également surjective, $(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f \circ h) = h$ est surjective.
   Donc $h$ est également bijective.
   D'où le résultat.
2. On a $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow E$ donc la composée $g \circ f : E \longrightarrow E$ est bien définie et la composée $f \circ g \circ f : E \longrightarrow F$ également.
   Supposons $f \circ g \circ f$ bijective.
   Alors $(f \circ g) \circ f$ est en particulier injective donc $f$ est injective, et $f \circ (g \circ f)$ est surjective donc $f$ est surjective.
   Donc $f$ est bijective. Donc $f^{-1}$ existe et est bijective et par composée de fonctions bijectives, on en déduit que $f^{-1} \circ (f \circ g \circ f) \circ f^{-1} = g$ est bijective.
   D'où le résultat.

**Exercice 3.** Soient $E$ et $F$ deux ensembles. On considère une application $f : E \longrightarrow F$.
1. Montrer que $f$ est injective si et seulement si pour tout $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
2. Montrer que $f$ est bijective si et seulement si pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, $f(\complement_E A) = \complement_F f(A)$.

---

1. • Supposons $f$ injective. Soit $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$. Montrons par double inclusion que $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
   Soit $y \in f(A \cap B)$. Alors il existe $x \in A \cap B$ tel que $y = f(x)$ . Comme $x \in A$, $y = f(x) \in f(A)$ et comme $x \in B$, $y = f(x) \in f(B)$. Donc $y \in f(A) \cap f(B)$. Donc $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. *déjà vu dans le cours.*
   Réciproquement, soit $y \in f(A) \cap f(B)$. Alors il existe $u \in A$ et $v \in B$ tels que $y = f(u)$ et $y = f(v)$. Donc $f(u) = f(v)$. Or $f$ est injective donc $u = v$. Donc $u \in A \cap B$. Donc $y = f(u) \in f(A \cap B)$. D'où $f(A) \cap f(B) \subset f(A \cap B)$.
   Donc $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$.
   • Réciproquement, supposons que pour tout $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$, $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$. Montrons que $f$ est injective. Soit $(u, v) \in E^2$ tel que $f(u) = f(v)$. Posons $A = \{u\}$ et $B = \{v\}$. Alors $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B) = \{f(u)\} \cap \{f(v)\} = \{f(u)\}$ car $f(u) = f(v)$. $\{f(u)\}$ étant non vide, on en déduit que $f(A \cap B) \neq \emptyset$ donc $\{u\} \cap \{v\} = A \cap B \neq \emptyset$. Donc $u = v$.
   Donc $f$ est injective.
2. • Supposons $f$ bijective.
   Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. Montrons par double inclusions que $f(\complement_E A) = \complement_F f(A)$.
   Soit $y \in f(\complement_E A)$. Alors il existe $x \in \complement_E A$ tel que $y = f(x)$. Supposons par l'absurde que $y \in f(A)$. Alors il existe $x' \in A$ tel que $y = f(x')$. Alors $y = f(x) = f(x')$ et par injectivité de $f$, $x = x' \in A$. Ce qui est absurde car $x \notin A$. Donc $y \notin f(A)$ et $y \in \complement_F f(A)$. D'où $f(\complement_E A) \subset \complement_F f(A)$.
   Soit $y \in \complement_F f(A)$. Alors $y \notin f(A)$. Par surjectivité de $f$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Mais $x \notin A$ puisque $y \notin f(A)$. Donc $x \in \complement_E A$ et $y = f(x) \in f(\complement_E A)$. D'où $\complement_F f(A) \subset f(\complement_E A)$.
   D'où $f(\complement_E A) = \complement_F f(A)$.
   • Réciproquement, supposons que pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, $f(\complement_E A) = \complement_F f(A)$.
   Soit $(x, y) \in E^2$ tel que $x \neq y$. Prenons $A = \{x\}$. Alors $y \in \complement_E A$ et $f(y) \in f(\complement_E A) = \complement_F f(A)$ Donc $f(y) \notin f(A) = \{f(x)\}$. Donc $f(y) \neq f(x)$. Donc $f$ est injective.
   On a $\mathrm{Im}(f) = f(E) = f(\complement_E \emptyset) = \complement_F f(\emptyset) = \complement_F \emptyset = F$. Donc $f$ est surjective.
   Donc $f$ est bijective.
   D'où le résultat.

**Exercice 4.** On définit une relation binaire $\mathcal{R}$ sur $\mathbb{R}$ par : $x\mathcal{R}y$ si $x\mathrm{e}^y = y\mathrm{e}^x$.
1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Déterminer la classe d'équivalence d'un élément $x$ de $\mathbb{R}$ puis le nombre d'éléments de cette classe.

---

1. Vérifions les trois points d'une relation d'équivalence.
   — **Réflexivité :** Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $x\mathrm{e}^x = x\mathrm{e}^x$ donc $x\mathcal{R}x$.
   — **Symétrie :** Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x\mathcal{R}y$. Alors $x\mathrm{e}^y = y\mathrm{e}^x$, donc $y\mathrm{e}^x = x\mathrm{e}^y$. Donc $y\mathcal{R}x$.
   — **Transitivité :** Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$.
   Alors $x\mathrm{e}^y = y\mathrm{e}^x$ et $y\mathrm{e}^z = z\mathrm{e}^y$. Donc $x\mathrm{e}^z = y\mathrm{e}^{-y}\mathrm{e}^x\mathrm{e}^z = z\mathrm{e}^{-z}\mathrm{e}^x\mathrm{e}^z = z\mathrm{e}^x$. Donc $x\mathcal{R}z$.

   Donc $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $\mathrm{Cl}(x) = \{y \in \mathbb{R} \mid x\mathcal{R}y\} = \{y \in \mathbb{R} \mid x\mathrm{e}^y = y\mathrm{e}^x\} = \{y \in \mathbb{R} \mid x\mathrm{e}^{-x} = y\mathrm{e}^{-y}\}$.
Finalement $\mathrm{Cl}(x) = \{y \in \mathbb{R} \mid f(y) = f(x)\} = f^{-1}(\{f(x)\})$ où $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ; $t \longmapsto t\mathrm{e}^{-t}$. Déterminons le nombre d'antécédents de $f(x)$ par la fonction $f$.
$f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $f'(t) = (1-t)\mathrm{e}^{-t}$.
On en déduit le tableau de variations suivant :

| $t$ | $-\infty$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(t)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $\mathrm{e}^{-1}$ | $\searrow$ | $0$ |

Donc si $f(x) \in \left]0, \mathrm{e}^{-1}\right[$, c'est-à-dire $x \in ]0,1[ \cup ]1,+\infty[$, $f(x)$ a deux antécédents donc $\mathrm{Cl}(x)$ a deux éléments.
Et si $f(x) = \mathrm{e}^{-1}$ ou $f(x) \leq 0$, c'est-à-dire $x \in ]-\infty, 0]$ ou $x = 1$, $f(x)$ a un unique antécédent, l'élément $x$, et $\mathrm{Cl}(x) = \{x\}$ a un élément.

**Exercice 5.** Soit $G$ un groupe fini. Si $a \in G$, on pose $\Phi_a : x \in G \mapsto axa^{-1} \in G$.

1. Vérifier que, si $a \in G$, $\Phi_a$ est un morphisme bijectif (ie automorphisme) de $G$, et que $I = \{\Phi_a \mid a \in G\}$ est un sous-groupe du groupe des automorphismes de $G$.
2. On suppose que $I$ est un groupe cyclique. Montrer que $G$ est commutatif.

---

1. On vérifie que $\Phi_a \circ \Phi_b = \Phi_{ab}$ et $\Phi_e = id_G$. On en déduit que $\Phi_a$ est inversible et que $\Phi_a^{-1} = \Phi_{a^{-1}}$. Il reste à montrer que $\Phi_a : G \to G$ est un morphisme :
$$\forall x, y \in G,\ \Phi_a(xy) = axya^{-1} = (axa^{-1}aya^{-1} = \Phi_a(x)\Phi_a(y).$$
Enfin, on a montré que $I$ est stable par multiplication, contient $Id_G$ et tout élément possède un inevrse : c'est bien un sous-groupe.
2. Soit $a$ tel que $\Phi_a$ engendre $I$. Soit $b \in G$. Il existe $n$ tel que $\Phi_a^n = \Phi_{a^n} = \Phi_b$.
Alors $a = \Phi_{a^n}(a) = \Phi_b(a)$, donc $a = bab^{-1}$, donc $ab = ba$.
Ainsi $a$ commute avec tous les éléments de $G$, donc $\Phi_a = id_G$, donc $I = \{id_G\}$, donc $G$ est commutatif.

**Exercice 6.** Soit $\phi$ un automorphisme de $S_n$ qui transforme une transposition en une transposition. On note $t_i$ la transposition $(1\ i)$.

1. Montrez que deux transpositions distinctes commutent ssi elles ont des supports disjoints.
2. Montrer qu'il existe trois éléments $a_1,\ a_2$ et $a_3$ tels que $\phi(t_2) = (a_1\ a_2)$ et $\phi(t_3) = (a_1\ a_3)$.
3. Montrer que pour tout $i > 3$, il existe $a_i$ tel que $\phi(t_i) = (a_1\ a_i)$.
4. Montrer que l'application $s$ qui à $i$ associe $a_i$ est bijective.
5. On appelle automorphisme intérieur $h_s$ associé à $s$ l'application définie par $h_s : S_n \to S_n\ \sigma \mapsto s\sigma s^{-1}$.
   (a) Montrer que pour tout $i,\ j \geq 2$, $\phi((i\ j)) = h_s((i\ j))$.
   (b) En déduire que $\phi = h_s$.
   Remarque : on vérifie que si $\sigma = (b_1\ \cdots\ b_r)$, alors $s\sigma s^{-1} = (s(b_1)\ \cdots\ s(b_r))$.

---

1. On sait que deux permutations qui ont des supports disjoints commutent. La réciproque n'est vraie que pour des transpositions. On procède par contraposée. Si $\tau_1$ et $\tau_2$ sont distinctes et leurs supports ne sont pas disjoints. Elles ont au moins un élément commun dans leur support, mais pas plus, car sinon elle sont égales. Donc il existe $a_1$, $a_2$ distincts tels que $\tau_1 = (a_1\ a_2)$ et $\tau_2 = (a_1\ a_3)$. Alors $\tau_2 \circ \tau_1(a_1) = \tau_2(a_2) = a_2$ et $\tau_1 \circ \tau_2(a_1) = \tau_2(a_3) = a_3$ et $\tau_1$ et $\tau_2$ ne commutent pas.
2. Si $\phi(t_2)$ et $\phi(t_3)$ commutaient, alors on aurait $t_2t_3 = \phi^{-1}(\phi(t_2)\phi(t_3)) = \phi^{-1}(\phi(t_3))\phi(t_2)) = t_3t_2$ et donc $t_2$ et $t_3$ commuteraient elles aussi. $\phi(t_2)$ et $\phi(t_3)$ n'ont donc pas un support disjoint ce qui donne immédiatement le résultat.
3. Le support de $\phi(t_i)$ n'est pas disjoint de $\phi(t_2)$ pas plus que de celui de $\phi(t_3)$. Il y a donc deux possibilités.
   — ou bien $\phi(t_i) = (a_1\ a_i)$, ce qui est le résultat voulu.
   — ou bien $\phi(t_i) = (a_2\ a_3)$. Mais $t_2t_3t_2 = (t_2(1)\ t_2(3)) = (2\ 3)$, donc
   $$\phi((2,3)) = \phi(t_2t_2t_2) = \phi(t_2)\phi(t_3)\phi(t_2) = (a_1\ a_2)(a_1\ a_3)(a_1\ a_3) = (a_2\ a_3).$$
   Comme $\phi$ est bijective, elle est injective et $\phi(t_i) \neq \phi((2\ 3)) = (a_2\ a_3)$.
   On en déduit $\phi(t_i) = (a_1\ a_i)$.
4. Si les $a_i$ n'étaient pas tous distincts, alors $\phi$ ne saurait être bijective.
5. Soit $(i\ j)$ une permutation, alors $t_it_jt_i = (t_i(1)\ t_i(j)) = (i\ j)$ et donc $\phi((i\ j)) = (a_i\ a_j)$. De même, On a $s(i\ j)s^{-1} = (s(i)\ s(j)) = (a_i\ a_j)$. Comme les transpositions engendrent $S_n$, on obtient que $\phi$ coïncide avec $h_s$.