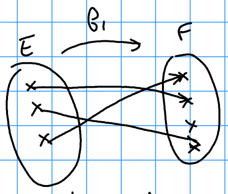
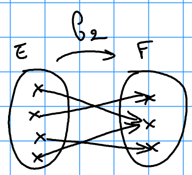
ALG 1 — **Chap 2 : Les applications** — Cours 6 (1)

2.3. Injectivité, surjectivité, bijectivité

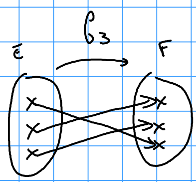
2.3.3. Bijectivité



f_1 est injective.



f_2 est surjective



f_3 est bijective.

injectivité : au plus un antécédent (≤ 1)

surjectivité : au moins un antécédent (≥ 1)

bijectivité : exactement un antécédent $(= 1)$.

Ex 56. • $id_E : E \to E$ est injective et surjective donc bijective.

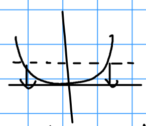
ou Soit $y \in E$. On cherche x tel que $y = id_E(x) = x$.

Donc y admet un unique antécédent par id_E.

• $f : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto x^2 \end{array}$ est bijective.

⚠ $g_1 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+ \\ x \mapsto x^2 \end{array}$ n'est pas injective donc n'est pas bijective.

$g_1(-1) = g_1(1) = 1$ et $1 \neq -1$.



$g_2 : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{array}$ n'est pas surjective donc n'est pas bijective.

$-1 \in \mathbb{R}$ et -1 n'admet pas d'antécédent par g_2

• f est injective : Soit $u \in \underline{\mathbb{R}_+}$ et $v \in \underline{\mathbb{R}_+}$ tels que $f(u) = f(v)$.

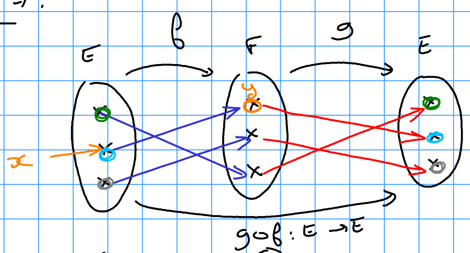
Donc $u^2 = v^2$, donc $u = \pm v$. Comme u et v sont positifs,

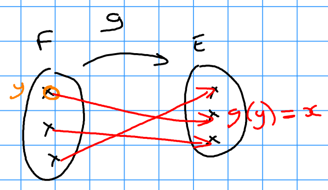
on a $u = v$.

• f est surjective : Soit $y \in \mathbb{R}_+$. On a $f(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2 = y$.

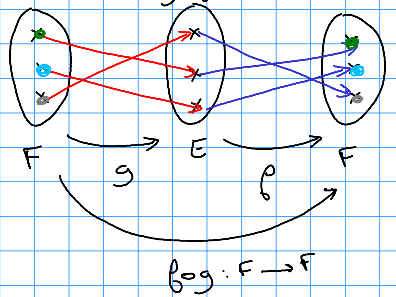
bien défini car $y \in \mathbb{R}_+$

Prop 57.





$f\circ g = id_F$

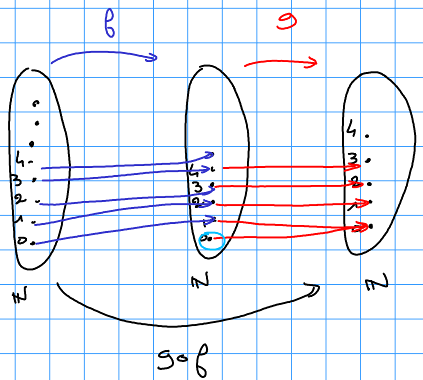


Remarque : $f\circ g = id_F$: $\forall y \in F \quad (f\circ g)(y) = y$

$g\circ f = id_E$: $\forall x \in E \quad (g\circ f)(x) = x$.

$f\circ g$

S I



$g\circ f = id_{\mathbb{N}}$

$(g\circ f)(n) = g(f(n))$
$= g(n+1)$
$= \max(0, (n+1)-1)$
$= \max(0, n)$
$= n$

Mais f n'est pas bijective : 0 n'a pas d'antécédent par f.

$f\circ g \neq id_{\mathbb{N}}$: $(f\circ g)(0) = f(g(0)) = f(0) = 1 \neq 0$

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \sqrt{x^2} = x$ donc $g\circ f = id_{\mathbb{R}_+}$

car $x \geq 0$

$\forall x \in \mathbb{R}_+$, $(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x$ donc $f\circ g = id_{\mathbb{R}_+}$.

2.3. Injectivité, surjectivité, bijectivité

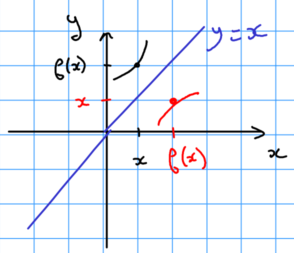
2.3.3. Bijectivité.

$f : E \to F$ bijective ssi $\exists g : F \to E$ / $g \circ f = id_E$ et $f \circ g = id_F$.

Alors $f^{-1} = g$.

Soit $y \in F$. Il existe un unique $x \in E$ tel que $y = f(x)$.

On a posé $g(y) = x$



Supposons f bijective.

$f^{-1} : y \mapsto x$

x est racine de P ssi $P(x) = 0$

$y = sh(x)$ ssi $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$

ssi $2y = e^x - e^{-x}$

ssi $2y e^x = (e^x)^2 - 1$

ssi $(e^x)^2 - 2y e^x - 1 = 0$

ssi $\underset{>0}{e^x}$ est racine de $X^2 - 2yX - 1$

Or $\Delta = \underset{>0}{4y^2 + 4}$, donc les racines sont $x_1 = \dfrac{2y - \sqrt{4(y^2+1)}}{2}$

$= y - \sqrt{y^2+1} < 0$

car $y \leq |y| = \sqrt{y^2} < \sqrt{y^2+1}$

et $x_2 = y + \sqrt{y^2+1} > 0$.

ssi $e^x = y + \sqrt{y^2+1}$

ssi $x = \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$.

Image réciproque de B par f : $\boxed{f^{-1}}(B) = \{x \in E,\ f(x) \in B\}$.

Image directe de B par f^{-1} : $f^{-1}(B) = \{f^{-1}(y),\ y \in B\}$.

$= \{x \ /\ \exists y \in B\ \ x = f^{-1}(y)\}$.

Prop 63 $\tilde{f} : E \to \operatorname{Im} f$, $x \mapsto f(x)$ est surjective et comme f est injective,

$\tilde{f}$ est injective donc $\tilde{f}$ est bijective.

Si f est continue et strictement monotone sur I alors f est injective.

Donc $\tilde{f} : I \to \operatorname{Im} f = f(I)$, $x \mapsto f(x)$ est bijective.

$f \circ \underbrace{f}_{g} = id_E$ et $\underbrace{f}_{g} \circ f = id_E$ donc f est bijective et $f^{-1} = g = f$.

- $f(f(x)) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)} = x$

- $f(f(A)) = f(C_E A) = C_E(C_E A) = A$.