TD3 . Algèbre 1, Géométrie 1

$f : E \to F$

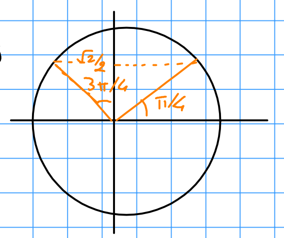
$f^{-1}(B) = \{ x \in E \ / \ f(x) \in B \}$

Exercice 1

$\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

1 . a) $\sin^{-1}\left(\left\{\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}\right) = \left\{ x \in \mathbb{R} , \ \sin(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$

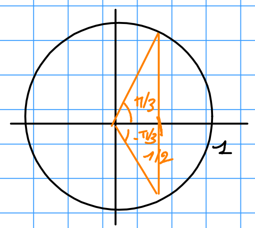
$= \left\{ \frac{\pi}{4} + 2k\pi , \ k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{3\pi}{4} + 2k\pi , \ k \in \mathbb{Z} \right\}$



b) $\cos^{-1}([\frac{1}{2}, +\infty[) = \left\{ x \in \mathbb{R} , \ \cos(x) \in [\frac{1}{2}, +\infty[\right\}$

$= \left\{ x \in \mathbb{R} , \ \frac{1}{2} \leq \cos(x) \right\}$

$= \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[-\frac{\pi}{3} + 2k\pi , \ \frac{\pi}{3} + 2k\pi \right]$

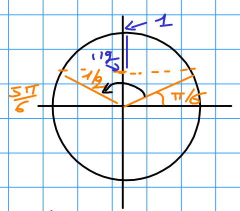


2. $\sin\left(\sin^{-1}\left(\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]\right)\right)$.

$\sin^{-1}\left(\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]\right) = \left\{ x \in \mathbb{R} , \ \sin(x) \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right] \right\}$

$= \left\{ x \in \mathbb{R} , \ \frac{1}{2} \leq \sin(x) \left(\leq \frac{3}{2}\right) \right\}$ $\qquad \forall x \in \mathbb{R} \ \sin(x) \in [-1, 1]$

$= \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \underbrace{\left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi , \ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right]}_{A_k}$.



Or $f\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f(A_i)$.

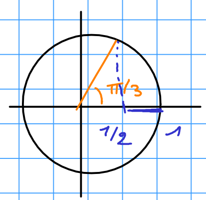
Donc $\sin\left(\sin^{-1}\left(\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]\right)\right) = \sin\left(\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi , \ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right] \right)$

$= \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \sin\left(\left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi , \ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right]\right)$

Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\sin\left(\left[\frac{\pi}{6} + 2k\pi , \ \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \right]\right) = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

Donc $\sin\left(\sin^{-1}\left(\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]\right)\right) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[\frac{1}{2}, 1\right] = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

3 - a) $\cos^{-1}\left(\cos\left(\left[0, \frac{\pi}{3}\right]\right)\right)$.



$\cos\left(\left[0, \frac{\pi}{3}\right]\right) = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$

Donc $\cos^{-1}\left(\cos\left(\left[0, \frac{\pi}{3}\right]\right)\right) = \cos^{-1}\left(\left[\frac{1}{2}, 1\right]\right)$

$= \left\{ x \in \mathbb{R} , \ \cos(x) \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \right\}$

$= \{x \in \mathbb{R},\ \frac{1}{2} \leq \cos(x) (\leq 1)\}$

$= \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [-\frac{\pi}{3} + 2k\pi, \frac{\pi}{3} + 2k\pi]$. (q1.b)

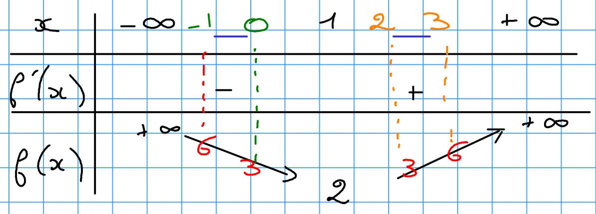
5) $f^{-1}(f([2,3]))$.

$f([2,3]) = \{f(x),\ x \in [2,3]\}$.

On a $f'(x) = 2x - 2 = 2(x-1)$

$f(2) = 3$

$f(3) = 6$



Donc f est continue et croissante sur $[2,3]$, on a $f([2,3]) = [3,6]$

$f^{-1}(f([2,3])) = f^{-1}([3,6])$

$= \{x \in \mathbb{R},\ f(x) \in [3,6]\}$

$= \{x \in \mathbb{R},\ 3 \leq f(x) \leq 6\}$.

• Résolvons $f(x) = 3$.

$f(x) = 3$ ssi $x^2 - 2x = 0$ ssi $x = 0$ ou $x = 2$.

• Résolvons $f(x) = 6$

$f(x) = 6$ ssi $x^2 - 2x - 3 = 0$. $1 + 2 - 3 = 0$

ssi $(x+1)(x-3) = 0$

ssi $x = -1$ ou $x = 3$.

• Donc d'après le tableau de variations, $f^{-1}([3,6]) = [-1,0] \cup [2,3]$.

Donc $f^{-1}(f([2,3])) = [-1,0] \cup [2,3]$.

Exercice 2

1. Injectivité.

$f : E \to F$

Si $f(u) = f(v)$ alors $u = v$

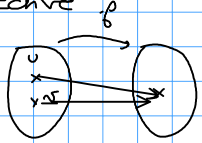
$E = \mathbb{R}^2$, $F = \mathbb{R}$.

$f_1(\underbrace{(x_1, y_1)}_{u \in \mathbb{R}^2}) = f_1(\underbrace{(x_2, y_2)}_{v \in \mathbb{R}^2})$

$2y_1 = 2y_2$ donc $y_1 = y_2$

Donnons un contre-exemple. Si $u = (0, 1)$ et $v = (1, 1)$, alors $u \neq v$

et $f_1(u) = f_1((0,1)) = 2 \times 1 = 2 = f_1(v) = f_1((1,1)) = 2 \times 1$. Donc f_1 n'est pas injective



• Surjectivité. Soit $z \in \mathbb{R}$. On cherche $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f((x,y)) = z$.

Par exemple $(x, y) = (0, \frac{z}{2}) \in \mathbb{R}^2$

Alors $f((x,y)) = f((0, \frac{z}{2})) = 2 \times \frac{z}{2} = z$.

Donc f_1 est surjective.

$2y = z$

$y = \frac{z}{2}$

2. $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$; $(x, y) \mapsto (1, x - y, y)$.

• Injectivité. Soient $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ et $(x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f_2((x_1, y_1)) = f_2((x_2, y_2))$.

Donc $(1, x_1 - y_1, y_1) = (1, x_2 - y_2, y_2)$

donc $x_1 - y_1 = x_2 - y_2$ et $y_1 = y_2$

donc $y_1 = y_2$ et $x_1 = x_2$

donc $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$.

Donc f_2 est injective.

$f_2(\underbrace{(x_1, y_1)}_{u}) = f_2(\underbrace{(x_2, y_2)}_{v})$

$(1, x_1 - y_1, y_1) = (1, x_2 - y_2, y_2)$

donc $x_1 - y_1 = x_2 - y_2$

et $y_1 = y_2$

donc $x_1 - \cancel{y_1} = x_2 - \cancel{y_1}$

• Surjectivité. [Soit $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) \in \mathbb{R}^3$. On cherche $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f_2((x,y)) = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$]. à enlever

L'élément $(0, \tilde{y}, \tilde{z}) \in \mathbb{R}^3$ n'admet pas d'antécédent par f_2.

(Sinon, on aurait $1 = 0$).

$(1, x - y, y) = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$

donc $\begin{cases} 1 = \tilde{x} \\ x - y = \tilde{y} \\ y = \tilde{z} \end{cases}$

Donc f n'est pas surjective.

3. Injectivité. Soit $(x_1,y_1) \in \mathbb{R}^2$ et $(x_2,y_2) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f_3((x_1,y_1)) = f_3((x_2,y_2))$.

Donc $(x_1+y_1, x_1-y_1) = (x_2+y_2, x_2-y_2)$.

Donc $\begin{cases} x_1+y_1 = x_2+y_2 & (L_1) \\ x_1-y_1 = x_2-y_2 & (L_2) \end{cases}$

donc $\begin{cases} 2x_1 = 2x_2 & (L_1)+(L_2) \\ 2y_1 = 2y_2 & (L_1)-(L_2) \end{cases}$

donc $x_1 = x_2$ et $y_1 = y_2$, donc $(x_1,y_1) = (x_2,y_2)$.

Donc f_3 est injective.

. Surjectivité. Soit $\underbrace{(\tilde{x},\tilde{y}) \in \mathbb{R}^2}_{}$ arrivée. On cherche $(x,y) \in \mathbb{R}$ départ tel que $f_3((x,y)) = (\tilde{x},\tilde{y})$.

Alors $(x+y, x-y) = (\tilde{x},\tilde{y})$,

donc $\begin{cases} x+y = \tilde{x} & (L_1) \\ x-y = \tilde{y} & (L_2) \end{cases}$

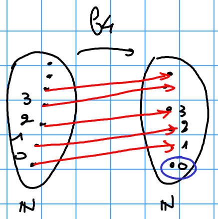
donc $\begin{cases} 2x = \tilde{x}+\tilde{y} & (L_1)+(L_2) \\ 2y = \tilde{x}-\tilde{y} & (L_1)-(L_2) \end{cases}$

donc $x = \dfrac{\tilde{x}+\tilde{y}}{2}$, $y = \dfrac{\tilde{x}-\tilde{y}}{2}$.

On a $f_3\left(\left(\dfrac{\tilde{x}+\tilde{y}}{2}, \dfrac{\tilde{x}-\tilde{y}}{2}\right)\right) = (\tilde{x},\tilde{y})$.

Donc f_3 est surjective.

4.



. Injectivité. Soit $n_1 \in \mathbb{N}$ et $n_2 \in \mathbb{N}$ tels que $f_4(n_1) = f_4(n_2)$.

Alors $n_1 + 1 = n_2 + 1$ donc $n_1 = n_2$.

Donc f_4 est injective.

. Surjectivité : 0 n'admet pas d'antécédent par f_4.

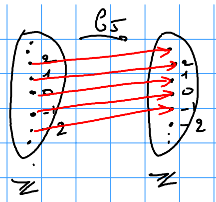
Sinon, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $f_4(n_0) = 0$, soit $n_0 + 1 = 0$,

donc $n_0 = -1 \in \mathbb{N}$. Absurde !

Donc f_4 n'est pas surjective.

Soit $\tilde{n} \in \mathbb{N}$. On cherche $n \in \mathbb{N}$ tel que $f_4(n) = \tilde{n}$

$n+1 = \tilde{n}$, $n = \tilde{n} - 1 \geq 0$

5. 

• Injectivité : Soient $n_1 \in \mathbb{Z}$ et $n_2 \in \mathbb{Z}$ tels que $f_5(n_1) = f_5(n_2)$. Alors $n_1 + 1 = n_2 + 1$, donc $n_1 = n_2$.

Donc f_5 est injective.

• Surjectivité. Soit $\tilde{n} \in \mathbb{Z}$. On cherche $n \in \mathbb{Z}$ tel que $f_5(n) = \tilde{n}$,

ie $n + 1 = \tilde{n}$, soit $n = \tilde{n} - 1 \in \mathbb{Z}$.

Donc $f_5(\underbrace{\tilde{n} - 1}_{\in \mathbb{Z}}) = \tilde{n} - 1 + 1 = \tilde{n}$ et f_5 est surjective.

6. Injectivité : Soient $n_1 \in \mathbb{N}$ et $n_2 \in \mathbb{N}$ tels que $f_6(n_1) = f_6(n_2)$.

D'après la définition de f_6, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n)$ est positif ssi n est pair et $f(n)$ est négatif ssi n est impair.

Donc $f_6(n_1)$ et $f_6(n_2)$ sont de même signe, de même parité.

→ Si $f_6(n_1) \in \mathbb{N}$, alors n_1 et n_2 sont pairs et $\frac{n_1}{2} = \frac{n_2}{2}$,

donc $n_1 = n_2$.

→ Si $f_6(n_1) \in -\mathbb{N}$ alors n_1 et n_2 sont impairs et $-\frac{n_1+1}{2} = -\frac{n_2+1}{2}$

donc $n_1 = n_2$.

Donc dans tous les cas, $n_1 = n_2$ et f_6 est injective.

• Surjectivité. Soit $\tilde{n} \in \mathbb{Z}$. On cherche $n \in \mathbb{N}$ tel que $f_6(n) = \tilde{n}$.

Si $\tilde{n} \geq 0$ alors $f_6(2\tilde{n}) = \frac{2\tilde{n}}{2} = \tilde{n}$

Si $\tilde{n} < 0$ alors $f_6(-1 - 2\tilde{n}) = -\frac{-1 - 2\tilde{n} + 1}{2} = \tilde{n}$.

Donc f_6 est surjective.

$\frac{n}{2} = \tilde{n}$

$n = 2\tilde{n}$

$-\frac{n+1}{2} = \tilde{n}$

$-(n+1) = 2\tilde{n}$

$n = -1 - 2\tilde{n}$

7. • Injectivité. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tels que

$f_7((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) = f_7((v_n)_{n\in\mathbb{N}})$.

Alors $(0, u_0, u_1, u_2, \dots) = (0, v_0, v_1, v_2, \dots)$

donc $(0 = 0)$, $u_0 = v_0$, $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$, ...

donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Donc f_7 est injective.

• Surjectivité. [Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On cherche $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tel que $f_7((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$]

$(0, u_0, u_1, u_2, \dots) = (v_0, v_1, v_2, \dots)$

$0 = v_0$

$u_0 = v_1$

$u_1 = v_2 \dots$

La suite $(1, 1, 1 \dots 1 \dots)$ n'admet pas d'antécédent par f_7.

(Sinon, $(0, u_0, u_1, u_2 \dots) = (1, 1, 1 \dots)$ donc $0 = 1$!)

Donc f_7 n'est pas surjective.

8. • Injectivité. Prenons un contre-exemple.

$f_8((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) = f_8((v_n)_{n\in\mathbb{N}})$

$(u_1, u_2, u_3, \dots) = (v_1, v_2, v_3, \dots)$

donc $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$, $u_3 = v_3$, $\vdots$ $\quad u_0$?

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (0, 1, 1, 1 \dots)$

et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} = (1, 1, 1, 1 \dots)$

On a $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \neq (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$f_8((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (1, 1, 1 \dots) = f_8((v_n)_{n\in\mathbb{N}})$.

Donc f_8 n'est pas injective.

• Surjectivité. Soit $(\tilde{v}_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On cherche $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tel que $f_8((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) = (\tilde{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$(u_1, u_2, u_3 \dots) = (\tilde{v}_0, \tilde{v}_1, \tilde{v}_2 \dots)$

$u_1 = \tilde{v}_0$, $u_2 = \tilde{v}_1$, $u_3 = \tilde{v}_2$, $\vdots$ $\quad u_0 = ?$

Posons $u_0 = 0$, $u_1 = \tilde{v}_0$, $u_2 = \tilde{v}_1$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \tilde{v}_n$.

Alors
$$\begin{aligned} f_8((u_n)_{n\in\mathbb{N}}) &= f_8((0, \tilde{v}_0, \tilde{v}_1, \tilde{v}_2 \dots)) \\ &= (\tilde{v}_0, \tilde{v}_1, \tilde{v}_2 \dots) \\ &= (\tilde{v}_n)_{n\in\mathbb{N}}. \end{aligned}$$

Donc f_8 est surjective.

9. • Injectivité. Soient $(n_1, p_1) \in \mathbb{N}^2$ et $(n_2, p_2) \in \mathbb{N}^2$ tels que $f_9((n_1, p_1)) = f_9((n_2, p_2))$.

Alors $2^{n_1}(2p_1 + 1) = 2^{n_2}(2p_2 + 1)$.

Supposons que $n_1 \geqslant n_2$.

Alors $\underbrace{2^{n_1 - n_2}}_{\substack{\text{impair ssi} \\ n_1 = n_2}} \underbrace{(2p_1 + 1)}_{\text{impair}} = \underbrace{(2p_2 + 1)}_{\text{impair}}$

Donc $n_1 = n_2$ (sinon le nombre de gauche serait pair, absurde).

Donc $2p_1 + 1 = 2p_2 + 1$ donc $p_1 = p_2$.

Donc $(n_1, p_1) = (n_2, p_2)$ donc f_g est injective.

- Surjectivité. Soit $\tilde{n} \in \mathbb{N}^*$. On cherche $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $f_g((n,p)) = \tilde{n}$, ie $2^n(2p+1) = \tilde{n}$.

$\tilde{n}$ admet une décomposition en facteurs premiers de la forme $\tilde{n} = 2^{\ell} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_r^{n_r}$ où p_i entiers premiers impairs et $\ell, n_1, \dots n_r$ sont des entiers naturels.

Le produit d'un nombre impair par un nombre impair est impair, on a $p_1^{n_1} p_2^{n_2} \cdots p_r^{n_r}$ est un nombre impair.

Il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $p_1^{n_1} \cdots p_r^{n_r} = 2q+1$.

Donc $\tilde{n} = 2^{\ell}(2q+1) = f_g((\ell, q))$ et $(\ell, q) \in \mathbb{N}^2$.

Donc f_g est surjective.

(On cherche $x \in E$ tel que $y = f(x)$)

si $f(u) = f(v)$ alors $u = v$

Exercice 4

- Supposons f injective. Soit $y \in E$.

  On a $f(\underbrace{f(f(y))}_{u}) = f(\underbrace{y}_{v})$.

  Donc par injectivité de f, on a $f(f(y)) = y$

  Posons $x = f(y) \in E$.

  Alors $y = f(x)$.

  Donc f est surjective.

- Supposons f surjective. Soient $(u, v) \in E^2$ tel que $f(u) = f(v)$ $(*)$

  Montrons que $u = v$.

  Il existe $u_1 \in E$ tel que $u = f(u_1)$ par surjectivité de f.

  Il existe $v_1 \in E$ tel que $v = f(v_1)$. " "

  Donc $f(f(u_1)) = f(f(v_1))$ d'après $(*)$

  Donc $f(f(f(u_1))) = f(f(f(v_1)))$.

  $(f \circ f \circ f)(u_1) = (f \circ f \circ f)(v_1)$

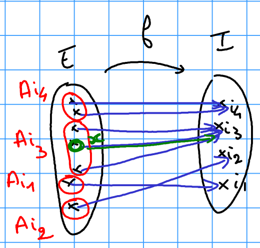
  Donc par hypothèse sur f, $f(u_1) = f(v_1)$

  Donc $u = v$.

  Donc f est injective.

Exercice 5

$A \subset f^{-1}(f(A))$ $\quad$ $x \in f^{-1}(f(\{x\}))$



$A_i = f^{-1}(\{i\}) = \{x \in E,\ f(x) = i\}$

c'est l'ensemble des antécédents de i dans E

$f(x) \in \{f(x)\} = f(\{x\})$ donc $x \in f^{-1}(f(\{x\}))$.