TD4 . Algèbre 1 - Géométrie 1

$f_1(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

Exercice 1

1. f_1 est bien définie ($1+x^2 \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$) et f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_1'(x) = \dfrac{1+x^2 - x \times 2x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = \dfrac{(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2}$

D'où le tableau de variations de f_1 :

x	$-\infty$		-1		u_1 1		u_2 $+\infty$
$f_1'(x)$		$-$		$+$		$-$	
$f_1(x)$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$ $\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$ $\searrow$	0

$\operatorname{Im} f_1 \underset{= f_1(\mathbb{R})}{=} \{ f_1(x),\ x \in \mathbb{R} \}$

D'après le tableau de variations de f_1 et par continuité de f_1,

$\operatorname{Im} f_1 = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

2. • $\operatorname{Im} f_1 = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \neq \mathbb{R}$ donc $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas surjective donc n'est pas bijective.

$f(E) = F$.

Par exemple, -1 n'a pas d'antécédent par f_1.

• $\tilde{f}_1 : \mathbb{R} \to [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ est surjective car $\operatorname{Im} f_1 = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$

Mais $\tilde{f}_1 : \mathbb{R} \to [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ n'est pas injective car par exemple $\frac{1}{4}$ a 2 antécédents distincts.

$-\frac{1}{2} < \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$ donc par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $u_1 \in]-1, 1[$ tel que $f_1(u_1) = \frac{1}{4}$

$0 < \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$

existe $u_2 \in]1, +\infty[$ tel que $f_1(u_2) = \frac{1}{4}$.

Donc $f_1(u_1) = f_1(u_2)$ et $u_1 \neq u_2$.

Donc f_1 n'est pas bijective de $\mathbb{R}$ sur son image.

c) D'après le tableau de variations, f_1 est strictement croissante sur $[-1, 1]$ et f_1 est continuité, donc f_1 induit une bijection de $[-1,1]$ sur $f_1([-1,1]) = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

$\tilde{\tilde{f}}_1 : [-1,1] \to [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ est bijective.

$x \mapsto f_1(x)$

Soit $y \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$. $|y| < \frac{1}{2}$

Pour tout $x \in [-1,1]$, $y = f(x)$ ssi $y = \dfrac{x}{1+x^2}$

ssi $y(1+x^2) = x$

ssi $y + x^2 y - x = 0$

ssi $yx^2 - x + y = 0$

ssi x est racine de $yX^2 - X + y$ avec $x \in [-1,1]$

• Pour $y \neq 0$

On a $\Delta = 1 - 4y^2 \geqslant 0$, donc $yX^2 - X + y$ a deux racines réelles

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{1-4y^2}}{2y} \in [-1,1] \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1 + \sqrt{1-4y^2}}{2y}$$

(*) $x_1 = \dfrac{(1-\sqrt{1-4y^2})(1+\sqrt{1-4y^2})}{2y(1+\sqrt{1-4y^2})} = \dfrac{1-(1-4y^2)}{2y(1+\sqrt{1-4y^2})} = \dfrac{2y}{1+\sqrt{1-4y^2}}$.

Or $1+\sqrt{1-4y^2} \geqslant 1$ donc $0 < \dfrac{1}{1+\sqrt{1-4y^2}} \leqslant 1$.

De l'inégalité $-1 \leqslant 2y \leqslant 1$, par multiplication par une quantité strictement positive,

complément

$$\frac{-1}{1+\sqrt{1-4y^2}} \leqslant \frac{2y}{1+\sqrt{1-4y^2}} \leqslant \frac{1}{1+\sqrt{1-4y^2}}, \text{ donc } -1 \leqslant \frac{2y}{1+\sqrt{1-4y^2}} \leqslant 1.$$

Donc $x_1 \in [-1,1]$.

Comme on a justifié que f_1 est bijective de $[-1,1]$ sur $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$, on sait que l'équation $y = f_1(x)$ admet une unique solution x dans $[-1,1]$, c'est donc x_1.

Pour tout $x \in [-1,1]$, $y = f(x)$ ssi $y = 0$ et $x = 0$

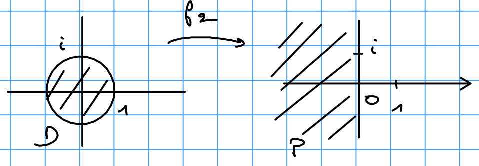
ou $y \neq 0$ et $x = \dfrac{1-\sqrt{1-4y^2}}{2y}$

Donc la bijection réciproque est

$$[-\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}] \to [-1,1]$$
$$y \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } y = 0 \\ \dfrac{1-\sqrt{1-4y^2}}{2y} & \text{si } y \neq 0 \end{cases}.$$

2. a) Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z - i \neq 0$ ssi $z \neq i$.

Donc l'ensemble de définition de f_2 est $\mathbb{C} \setminus \{i\}$.

b) 

$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

$Re(z) = \dfrac{z + \bar{z}}{2}$

Vérifions que $f_2(D) \subset P$. $\quad |i| = 1$ donc $i \notin D$ $\qquad z\bar{z} = |z|^2$

Soit $z \in D$. Montrons que $f_2(z) \in P$, ie $\mathrm{Re}(f_2(z)) < 0$.

$$\mathrm{Re}(f_2(z)) = \frac{1}{2}\left(f_2(z) + \overline{f_2(z)}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{z+i}{z-i} + \frac{\overline{z+i}}{\overline{z-i}}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{z+i}{z-i} + \frac{\bar{z}-i}{\bar{z}+i}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{z\bar{z} + \cancel{iz} + \cancel{i\bar{z}} - 1 + z\bar{z} - \cancel{i\bar{z}} - \cancel{iz} - 1}{(z-i)(\bar{z}+i)}\right)$$

$$= \frac{z\bar{z} - 1}{(z-i)\overline{(z-i)}} = \frac{\overbrace{|z|^2 - 1}^{<0}}{\underbrace{|z-i|^2}_{>0}} < 0$$

Or $z \in D$ donc $|z| < 1$

Donc $\mathrm{Re}(f_2(z)) < 0$ donc $f_2(z) \in P$.

Donc $f_2 : D \to P$ est bien définie.

Soit $y \in P$. Pour tout $z \in D$

$$y = f_2(z) \quad \text{ssi} \quad y = \frac{z+i}{z-i}$$

$$\text{ssi} \quad (z-i)y = z+i$$

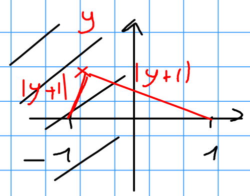
$$\text{ssi} \quad zy - iy = z + i$$

$|z_1 z_2| = |z_1||z_2|$

$$\text{ssi} \quad z(y-1) = i + iy$$

$$\text{ssi} \quad z = i\,\frac{y+1}{y-1}.$$

Vérifions que $i\,\dfrac{y+1}{y-1} \in D$.



On a $\left| i\,\dfrac{y+1}{y-1}\right| = \left|\dfrac{y+1}{y-1}\right| = \dfrac{|y+1|}{|y-1|}$.

Or $y \in P$ donc $\mathrm{Re}(y) < 0$.

Donc $\left| i\,\dfrac{y+1}{y-1}\right| < 1$.

Donc $i\,\dfrac{y+1}{y-1} \in D$.

$|y+1| = \sqrt{(\mathrm{Re}(y)+1)^2 + \mathrm{Im}(y)^2}$

$|y-1| = \sqrt{(\quad -1)^2 + (\quad)^2}$

Donc f_2 est bijective de D dans P de bijection réciproque

$$f_2^{-1} : P \to D \,;\, y \mapsto i\,\frac{y+1}{y-1}.$$

Exercice 2

(1) • Si f_1 et f_2 sont injectives alors $f_1 \circ f_2$ est injective $f_1 \circ f_2$
S   I
(2) Si $f_1 \circ f_2$ est injective alors f_2 est injective.
(3) • Si f_1 et f_2 sont surjectives alors $f_1 \circ f_2$ est surjective
(4) Si $f_1 \circ f_2$ est surjective alors f_1 est surjective.
(5) • Si f_1 et f_2 sont bijectives alors $f_1 \circ f_2$ est bijective et $(f_1 \circ f_2)^{-1} = f_2^{-1} \circ f_1^{-1}$.

$$((h \circ g) \circ f) \circ f^{-1} = (h \circ g) \circ (f \circ f^{-1}) = (h \circ g) \circ id = h \circ g$$

car $f_1 \circ id = id \circ f_1 = f_1$.

$$(h \circ g) \circ g^{-1} = h \circ (g \circ g^{-1}) = h \circ id = h.$$

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & F \arrow[r, "g"] & E \arrow[r, "f"] & F \end{tikzcd}$$

$$f^{-1} \circ (f \circ g \circ f) \circ f^{-1} = (f^{-1} \circ f) \circ g \circ (f \circ f^{-1})$$
$$= id \circ g \circ id = g.$$

Exercice 3

$f(A) = f(\{u\}) = \{f(u)\}$ $\{u\} \cap \{v\} \neq \emptyset$

$f(B) = f(\{v\}) = \{f(v)\}$ Soit $x \in \{u\} \cap \{v\}$

Donc $x = u$ et $x = v$, donc $u = v$.

2. $A \subset E$ donc $C_E A \subset E$

$f(A) \subset F$ donc $C_F f(A) \subset F$.

Mq $y \in C_F f(A)$, ie $y \notin f(A)$.

Exercice 4

Montrons que xRz ie $xe^{z} = ze^{x}$.

$$xe^{z} = ye^{x}e^{-y}e^{z}$$
$$= ze^{-z}e^{x}e^{z}$$
$$= ze^{x}.$$

$xe^{y} = ye^{x}$

$x = ye^{x}e^{-y}$

$ye^{z} = ze^{y}$

$ye^{-y} = ze^{-z}$

$$\{y \in F \ / \ f(y) = a\} = f^{-1}(\{a\})$$
$$= \{y \in F, \ f(y) \in \{a\}\}$$

$a = f(x)$ $\qquad \{y \in \mathbb{R}, \ f(y) = a\} = f^{-1}(\{a\}) = f^{-1}(\{f(x)\})$