# Chapitre 3 Relations binaires

Nous allons étudier dans ce chapitre des relations liant deux éléments d'un même ensemble. Souvent, nous cherchons à comparer des éléments ou à expliquer ce qui les rapproche ou les distingue. Par exemple, on peut comparer l'âge de deux individus, ou dire s'ils habitent dans le même pays, etc. Nous allons définir proprement la notion de relation en mathématiques.

## 3.1 Premières définitions

Définition 1
*Soient $E$ et $F$ deux ensembles. On appelle **relation binaire** \关系\ entre $E$ et $F$ tout triplet $\mathcal{R} = (E, F, G)$ où $G$ est une partie de $E \times F$. Si $(x, y) \in G$, on note $x\mathcal{R}y$ et on dit que $x$ **est en relation avec** $y$. On parle de la relation $\mathcal{R}$.*

On a donc $G = \{(x, y) \in E \times F \mid x\mathcal{R}y\}$.

L'ordre dans un couple importe donc on peut avoir $x\mathcal{R}y$ mais pas $y\mathcal{R}x$.

Remarque 2 — *Les applications de $E$ dans $F$ sont des cas particuliers de relations binaires : pour tout $(x, y) \in E \times F$, $x\mathcal{R}y$ si $y = f(x)$.*

Dans la suite du cours, nous nous intéresserons plus particulièrement aux relations binaires de $E$ sur lui-même, qui sont les relations les plus utiles en mathématiques. Lorsque $E = F$, la relation $\mathcal{R}$ de $E$ sur lui-même est appelée **relation binaire sur** $E$.

Une relation $\mathcal{R}$ est souvent notée par un symbole $\equiv$, $\leq$, $\sim$, $\subset$...

Exemples 3 *Donnons quelques exemples de relations binaires d'un ensemble sur lui-même :*

- *la relation d'égalité $=$ sur $E$,*
- *les relations d'inégalité $\leq$, $<$ sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{N}$,*
- *la relation d'inclusion $\subset$ sur $\mathcal{P}(E)$,*
- *la relation $\leq$ sur l'espace des fonctions de $E$ dans $\mathbb{R}$, définie par $f \leq g$ si pour tout $x \in E$, $f(x) \leq g(x)$,*
- *la relation de divisibilité $\mid$ sur $\mathbb{Z}$, définie par $m \mid n$ s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = mk$.*
- *pour tout $n \in \mathbb{N}$, la relation de congruence modulo $n$ sur $\mathbb{Z}$, notée $\equiv \mod n$, définie par $a \equiv b \mod n$ s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = b + kn$.*
- *pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la relation de congruence modulo $\alpha$ sur $\mathbb{R}$, notée $\equiv \mod \alpha$, définie par $a \equiv b \mod \alpha$ s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = b + k\alpha$.*
- *la relation « avoir le même signe » sur $\mathbb{R}^*$.*

Une relation binaire peut satisfaire certaines propriétés.

Définition 4
*Soit $E$ un ensemble. Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur $E$.*

- *$\mathcal{R}$ est dite **réflexive** \自反性\ si, pour tout $x \in E$, $x\mathcal{R}x$,*
- *$\mathcal{R}$ est dite **symétrique** \对称性\ si, pour tout $(x, y) \in E^2$, si $x\mathcal{R}y$ alors $y\mathcal{R}x$,*
- *$\mathcal{R}$ est dite **antisymétrique** \反对称性\ si, pour tout $(x, y) \in E^2$, si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$ alors $x = y$,*
- *$\mathcal{R}$ est dite **transitive** \传递性\ si, pour tout $(x, y, z) \in E^3$, si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$ alors $x\mathcal{R}z$.*

Exemples 5

- *La relation d'égalité $=$ sur $E$ est réflexive, symétrique, antisymétrique et transitive. On notera qu'une relation peut donc être symétrique et antisymétrique.*
- *La relation $\leq$ sur $\mathbb{R}$ est réflexive, antisymétrique et transitive. Elle n'est pas symétrique car par exemple $2 \leq 3$ mais $3 \nleq 2$.*
- *La relation $<$ sur $\mathbb{R}$ est symétrique et transitive. Elle n'est ni réflexive, ni antisymétrique. Par exemple, $1 \not< 1$.*
- *La relation de divisibilité sur $\mathbb{Z}$ est réflexive et transitive. Elle n'est ni symétrique, ni antisymétrique. En effet, on a $1|2$ mais $2 \nmid 1$, et $1|-1$ et $-1|1$ mais $1 \neq -1$.*
- *La relation d'inclusion $\subset$ sur $\mathcal{P}(E)$ est réflexive, antisymétrique et transitive. Elle n'est pas symétrique car par exemple $\{1\} \subset \{1,2\}$ mais $\{1,2\} \not\subset \{1\}$.*
- *La relation « avoir le même signe » sur $\mathbb{R}^*$ est réflexive, symétrique et transitive. Elle n'est pas antisymétrique car par exemple, $1\mathcal{R}2$ et $2\mathcal{R}1$ mais $1 \neq 2$.*

## 3.2 Relations d'équivalence

Nous définissons dans cette partie un premier type de relation, celle d'équivalence. Une telle relation permet d'identifier sous une même étiquette les éléments qui sont en relation et de ne plus les distinguer. Par exemple, on identifie les individus à leur nationalité.

### 3.2.1 Définition et exemples

Définition 6

*Soit $E$ un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire sur $E$. On dit que $\mathcal{R}$ est une* ***relation d'équivalence*** \等价关系\ *sur $E$ si $\mathcal{R}$ est réflexive, symétrique et transitive.*

Une relation d'équivalence est souvent notée $\equiv$ , ou $\sim$, ...

Exemples 7

- *La relation d'égalité $=$ sur $E$ est une relation d'équivalence.*
- *La relation « avoir le même signe » sur $\mathbb{R}^*$ est une relation d'équivalence.*
- *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la relation de congruence modulo $n$ sur $\mathbb{Z}$ est une relation d'équivalence.*

  ***Preuve*** — *Soit $n \in \mathbb{N}$.*

  — ***Réflexivité :*** *Soit $p \in \mathbb{Z}$. On a $p = p + 0 \times n$ et $0 \in \mathbb{Z}$ donc $p \equiv p \mod n$. Donc la relation de congruence modulo $n$ est réflexive.*

  — ***Symétrie :*** *Soit $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$. Supposons que $p \equiv q \mod n$. Alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $p = q + kn$. Donc $q = p - kn = p + (-k)n$ et $-k \in \mathbb{Z}$. Donc $q \equiv p \mod n$. Donc la relation de congruence modulo $n$ est symétrique.*

  — ***Transitivité :*** *Soit $(p,q,r) \in \mathbb{Z}^3$. Supposons que $p \equiv q \mod n$ et $q \equiv r \mod n$. Montrons que $p \equiv r \mod n$. Il existe $k_1 \in \mathbb{Z}$ tel que $p = q + k_1 n$ et il existe $k_2 \in \mathbb{Z}$ tel que $q = r + k_2 n$. Donc $p = r + k_2 n + k_1 n = r + (k_1 + k_2)n$ et $(k_1 + k_2) \in \mathbb{Z}$. Donc $p \equiv r \mod n$. Donc la relation de congruence modulo $n$ est transitive.*

  *De ces trois points, il vient que la relation de congruence modulo $n$ est une relation d'équivalence.* □
- *Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la relation de congruence modulo $\alpha$ sur $\mathbb{R}$ est une relation d'équivalence.*

  ***Preuve*** — *Analogue à la preuve précédente.* □
- *Si $(A_i)_{i \in I}$ est une partition de $E$, la relation d'appartenance au même sous-ensemble $A_i$ est une relation d'équivalence.*

Remarque 8 — *Les écritures $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$ sont équivalentes car $\mathcal{R}$ est symétrique.*

### 3.2.2 Classes d'équivalence et ensemble quotient

DÉFINITION 9
*Soient $E$ un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur $E$. Soit $x$ un élément de $E$. On appelle* ***classe d'équivalence*** *de $x$* \$x$的等价类\ *pour la relation $\mathcal{R}$ (ou plus simplement classe de $x$), notée $\mathrm{Cl}(x)$ ou $\overline{x}$, l'ensemble des éléments $y$ de $E$ qui sont en relation avec $x$ :*

$$\mathrm{Cl}(x) = \{y \in E \mid x\mathcal{R}y\}.$$

EXEMPLES 10

- *La classe d'équivalence de 1 pour la relation d'équivalence « avoir le même signe » sur $\mathbb{R}^*$ est l'ensemble des nombres réels non nuls de même signe que 1, c'est-à-dire l'ensemble des nombres réels strictement positifs :* $\mathrm{Cl}(1) = \mathbb{R}_+^*$.
- *Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $r \in \mathbb{Z}$. La classe d'équivalence de $r$ pour la relation de congruence modulo $n$ dans $\mathbb{Z}$ est*

$$\begin{aligned}\mathrm{Cl}(r) &= \{p \in \mathbb{Z} \mid p \equiv r \bmod n\} \\ &= \{p \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z}, p = r + kn\} \\ &= \{r + kn \mid k \in \mathbb{Z}\} \\ &= n\mathbb{Z} + r\end{aligned}$$

PROPOSITION 11
*Soient $E$ un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur $E$. Pour tout $(x, y) \in E^2$, $\mathrm{Cl}(x) = \mathrm{Cl}(y)$ si et seulement si $x\mathcal{R}y$.*

**Preuve** — Soit $(x, y) \in E^2$.

▷ Supposons que $\mathrm{Cl}(x) = \mathrm{Cl}(y)$. Comme $\mathcal{R}$ est réflexive, on a $y\mathcal{R}y$ donc $y \in \mathrm{Cl}(y)$. Or, par hypothèse, $\mathrm{Cl}(x) = \mathrm{Cl}(y)$, donc $y \in \mathrm{Cl}(x)$. Donc par définition d'une classe d'équivalence, $x\mathcal{R}y$.

◁ Supposons que $x\mathcal{R}y$. Soit $z \in \mathrm{Cl}(x)$. Alors $x\mathcal{R}z$. Comme $x\mathcal{R}y$, on a, par symétrie de $\mathcal{R}$, $y\mathcal{R}x$. Donc par transitivité de $\mathcal{R}$, comme $y\mathcal{R}x$ et $x\mathcal{R}z$, on a $y\mathcal{R}z$. Donc $z \in \mathrm{Cl}(y)$. D'où $\mathrm{Cl}(x) \subset \mathrm{Cl}(y)$. Par symétrie des rôles de $x$ et $y$, on a de la même manière $\mathrm{Cl}(y) \subset \mathrm{Cl}(x)$. Finalement, $\mathrm{Cl}(x) = \mathrm{Cl}(y)$.

□

Notons donc que si $y \in \mathrm{Cl}(x)$ alors $\mathrm{Cl}(y) = \mathrm{Cl}(x)$.

DÉFINITION 12
*Soient $E$ un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur $E$. Soit $C$ une classe d'équivalence. On appelle* ***représentant*** *de la classe d'équivalence $C$ tout élément $x$ de $C$.*

EXEMPLE 13 — *Nous avons vu que $\mathbb{R}_+^*$ est une classe d'équivalence (celle de 1) pour la relation d'équivalence « avoir le même signe » sur $\mathbb{R}^*$. Tout élément de $\mathbb{R}_+^*$ est un représentant de cette classe. Des représentants de cette classe sont donc par exemple 1, ou $\pi$, ou $\sqrt{2}$... Ainsi, $\mathbb{R}_+^* = \mathrm{Cl}(1) = \mathrm{Cl}(\pi) = \mathrm{Cl}(\sqrt{2})$...*

PROPOSITION 14
*Soient $E$ un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur $E$. L'ensemble des classes d'équivalence de $E$ forme une partition de $E$, c'est-à-dire :*

- *Elles sont non vides,*
- *Elle sont deux à deux disjointes,*
- *Leur réunion est égale à $E$.*

**Preuve** —

- Une classe d'équivalence $C$ est toujours la classe d'équivalence d'un élément $x$ de $E$ : $C = \mathrm{Cl}(x)$. Comme $x \in \mathrm{Cl}(x)$ puisque $x\mathcal{R}x$ par réflexivité de $\mathcal{R}$, on a $x \in C$ et $C$ est non vide.

- Soient $C_1$ et $C_2$ deux classes d'équivalence. Supposons $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$. Soient $x_1$ un représentant de $C_1$ et $x_2$ un représentant de $C_2$. Ainsi, $C_1 = \mathrm{Cl}(x_1)$ et $C_2 = \mathrm{Cl}(x_2)$. Par hypothèse, il existe $x \in C_1 \cap C_2$. En particulier, $x \in C_1$ donc $x\mathcal{R}x_1$ et $x \in C_2$ donc $x\mathcal{R}x_2$. Par symétrie et transitivité de $\mathcal{R}$, $x_1\mathcal{R}x_2$. Donc d'après la proposition précédente, $\mathrm{Cl}(x_1) = \mathrm{Cl}(x_2)$, soit $C_1 = C_2$. Ainsi, deux classes sont soit égales soit disjointes.
- Soit $x \in E$. Alors $x \in \mathrm{Cl}(x)$ donc $x$ appartient à la réunion des classes d'équivalence. Donc $E$ est inclus dans la réunion des classes d'équivalence. L'inclusion réciproque étant évidente puisque une classe d'équivalence est une partie de $E$, la réunion est égale à $E$.

De ces trois points, il vient que l'ensemble des classes d'équivalence de $E$ forme une partition de $E$. □

EXEMPLES 15

- *La relation « avoir le même signe » sur $\mathbb{R}^*$ a exactement deux classes d'équivalence : $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$. Ces deux classes d'équivalence forment bien une partition de $\mathbb{R}^*$.*

  ***Preuve** — Soit $C$ une classe d'équivalence et considérons $x$ un représentant de $C$. Si $x$ est positif, alors $C = \mathrm{Cl}(x) = \mathbb{R}_+^*$. Si $x$ est négatif, alors $C = \mathrm{Cl}(x) = \mathbb{R}_-^*$. Les classes $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ sont bien sûr distinctes.* □
- *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la relation de congruence modulo $n$ sur $\mathbb{Z}$ possède exactement $n$ classes d'équivalence : les ensembles $n\mathbb{Z} + r = \{nk + r \mid k \in \mathbb{Z}\}$ avec $r \in \{0, \ldots, n-1\}$. On les note souvent $\overline{0}$, $\overline{1}$, …, $\overline{n-1}$. On a choisi comme représentant des différentes classes les entiers $0$, $1$, …, $n-1$.*

  ***Preuve** — Soit $C$ une classe d'équivalence et considérons $p$ un représentant de $C$. Comme $p \in \mathbb{Z}$, on peut effectuer la division euclidienne de $p$ par $n$. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ et $r \in \{0, \ldots, n-1\}$ tel que $p = kn + r$. Donc $p \equiv r \bmod n$. Donc $C = \mathrm{Cl}(r) = n\mathbb{Z} + r$. De plus, les $n$ classes d'équivalence $n\mathbb{Z} + r$ où $r \in \{0, \ldots, n-1\}$ deux à deux disjointes car si $r_1$ et $r_2$ sont deux éléments distincts de $\{0, \ldots, n-1\}$ alors $r_1$ n'est pas congru à $r_2$ modulo $n$.* □

DÉFINITION 16

*Soient $E$ un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur $E$. L'ensemble des classes d'équivalence de $E$ pour la relation $\mathcal{R}$ s'appelle **l'ensemble quotient de $E$ par $\mathcal{R}$**. On le note $E/\mathcal{R}$. C'est un sous-ensemble de $\mathcal{P}(E)$.*

EXEMPLES 17

- *L'ensemble quotient de $\mathbb{R}^*$ par la relation « avoir le même signe » est l'ensemble $\{\mathbb{R}_-^*, \mathbb{R}_+^*\}$.*
- *Soit $n \in \mathbb{Z}$. L'ensemble quotient de $\mathbb{Z}$ par la relation de congruence modulo $n$ est l'ensemble $\{n\mathbb{Z}, n\mathbb{Z}+1, \ldots, n\mathbb{Z}+n-1\} = \{\overline{0}, \overline{1}, \ldots, \overline{n-1}\}$. On note cet ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.*