ALG 1

Chap 3 : Les relations binaires

Cours 7 (1)

1. Premières définitions

Ex 5.

- $\forall x \in E$, $x \overset{\leq}{=} x$,

  $\forall (x,y) \in E^2$, $x \overset{\leq}{=} y \Leftrightarrow y = x$ × $1 \leq 2$ et $2 \not\leq 1$

  $\forall (x,y) \in E^2$, $x \overset{\leq}{=} y$ et $y \overset{\leq}{=} x \Rightarrow x = y$

  $\forall (x,y,z) \in E^3$, si $x \overset{\leq}{=} y$ et $y \overset{\leq}{=} z$ alors $x \overset{\leq}{=} z$.

- si $\underbrace{x < y \text{ et } y < x}_{\text{Faux !}}$ alors $x = y$.

- $\forall n \in \mathbb{Z}$, $n | n$: $n = n \times 1$

  - $\forall (n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{Z}^3$, Supposons que $n_1 | n_2$ et $n_2 | n_3$.

    $n_2 = k_1 \times n_1$ et $n_3 = k_2 \times n_2$ où $(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}$

    donc $n_3 = \underbrace{k_2 k_1}_{\in \mathbb{Z}} \times n_1$ donc $n_1 | n_3$.

- $\forall A \in \mathcal{P}(E)$, $A \subset A$

  $\forall (A,B) \in \mathcal{P}(E)^2$, si $A \subset B$ et $B \subset A$ alors $A = B$

  $\forall (A,B,C) \in \mathcal{P}(E)^3$, si $A \subset B$ et $B \subset C$ alors $A \subset C$.

2. Relations d'équivalence

Cours 7 (2)

2.1. Définition et exemples

Soit $n \in \mathbb{N}$.

Ex 7. $\equiv [n]$ est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.

- Réflexivité : Soit $m \in \mathbb{Z}$. On a $m = m + 0 \times n$ et $0 \in \mathbb{Z}$,

  donc $m \equiv m [n]$.

- Symétrie : Soit $(m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2$. On suppose que $m_1 \equiv m_2 [n]$.

  Alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $m_1 = m_2 + kn$.

  Donc $m_2 = m_1 - kn = m_1 + (-k)n$ et $-k \in \mathbb{Z}$

  donc $m_2 \equiv m_1 [n]$.

- Transitivité : Soient $(m_1, m_2, m_3) \in \mathbb{Z}^3$. On suppose que $m_1 \equiv m_2 [n]$

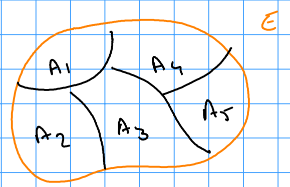
  et $m_2 \equiv m_3 [n]$. On veut montrer que $m_1 \equiv m_3 [n]$ ($m_1 = m_3 + kn$ où $k \in \mathbb{Z}$)

Donc il existe $k_1 \in \mathbb{Z}$ tel que $m_1 = m_2 + k_1 n$

et il existe $k_2 \in \mathbb{Z}$ tel que $m_2 = m_3 + k_2 n$.

Donc $m_1 = m_3 + k_2 n + k_1 n = m_3 + \underbrace{(k_2+k_1)}_{k \in \mathbb{Z}.} n$ et $k_2 + k_1 \in \mathbb{Z}$.

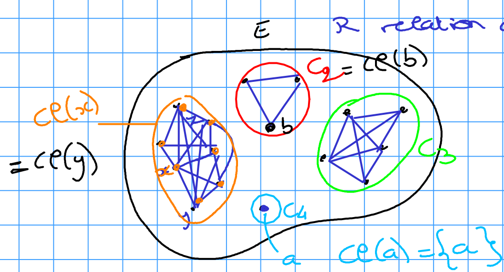
Donc $m_1 \equiv m_3 [n]$.



2. Relations d'équivalence

Cours 7 (3)

2.2. Classes d'équivalence et ensemble quotient



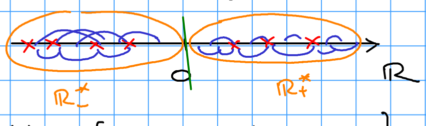
Ex 10. • $cl(1) = \{ y \in \mathbb{R}^*, 1 R y \}$

$= \{ y \in \mathbb{R}^*, 1$ et y ont le même signe$\}$

$= \{ y \in \mathbb{R}^*, y$ est de signe positif$\}$

$= \mathbb{R}_+^*$.

$cl(-1) = \{ y \in \mathbb{R}^*, y$ est de signe négatif$\} = \mathbb{R}_-^*$.



• $cl(r) = \{ y \in \mathbb{Z} \mid y R r \} = \{ y \in \mathbb{Z} \mid y \equiv r [n] \}$

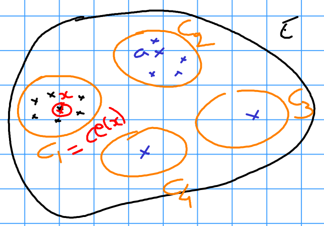
$= \{ y \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z} \quad y = r + kn \}$

$= \{ r + kn \mid k \in \mathbb{Z} \} = r + n\mathbb{Z}$.

Si $n = 3$. $cl(1) = \{ y \in \mathbb{Z} \mid y \equiv 1 [3] \}$

$= \{ y \in \mathbb{Z} \mid y = 1 + 3k, k \in \mathbb{Z} \}$

$= 1 + 3\mathbb{Z} = \{ 1, 4, 7, \ldots, -2, -5 \ldots \}$



C_i : classes d'équivalence.

$n\mathbb{Z} = n\mathbb{Z} + 0 = \bar{0} = cl(0)$, $cl(1) = n\mathbb{Z} + 1 = \bar{1}$

$cl(r) = n\mathbb{Z} + r = \bar{r}$

Si $r_1 \equiv r_2 \, (n)$ alors $r_1 = r_2 + k n$ avec $k \in \mathbb{Z}$

Or $r_1 \in \{0 .. n-1\}$, $r_2 \in \{0 .. n-1\}$, $k \geq 0$, $k < 1$ $\Big\}$ Donc $k = 0$ et $r_1 = r_2$

Absurde.

$n = 3$.

$\bar{0} = \{0, 3, 6, 9, \dots, -3, -6, -9, \dots\} = 3\mathbb{Z}$

$\bar{1} = \{1, 4, 7, 10, -2, -5, -8, \dots\} = 3\mathbb{Z}+1$

$\bar{2} = \{2, 5, 8, 11, -1, -4, -7, \dots\} = 3\mathbb{Z}+2$.

$3\mathbb{Z} \cup (3\mathbb{Z}+1) \cup (3\mathbb{Z}+2) = \mathbb{Z}$