TD 6 - Analyse 4

$\forall n \geq 1,$

$f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{n}\,(x+n)}$.

$f = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n$.

Exercice 2

1. Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$0 \leq |f_n(x_0)| = \frac{x_0}{\sqrt{n}\,(x_0+n)} \leq \frac{x_0}{\sqrt{n} \times n} = \frac{x_0}{n^{3/2}} \quad \text{et} \quad \frac{3}{2} > 1$$

Donc d'après le critère de Riemann, $\sum_{n\geq 1} \frac{x_0}{n^{3/2}}$ convergente.

Donc par comparaison de séries à termes positifs, $\sum_{n\geq 1} f_n(x_0)$ convergente.

Donc $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

2. Soit $\eta > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [0,\eta]$,

$$|f_n(x)| = \frac{x}{\sqrt{n}\,(x+n)} \leq \frac{\eta}{\sqrt{n}\cdot n} = \frac{\eta}{n^{3/2}} \quad \text{et} \quad \sum \frac{\eta}{n^{3/2}} \text{ converge.}$$

Donc $\sum f_n$ converge normalement sur $[0,\eta]$.

$$\|f_n\|_\infty \geq |f_n(n)| = \frac{n}{\sqrt{n}\,(n+n)} = \frac{1}{2\sqrt{n}} = \frac{1}{2n^{1/2}} \geq 0 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} < 1$$

Donc d'après le critère de Riemann, $\sum \frac{1}{2n^{1/2}}$ diverge. Donc par comparaison de séries à termes positifs, $\sum \|f_n\|_\infty$ diverge.

Donc $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$.

3. • Pour tout $\eta > 0$, $\sum f_n$ converge normalement donc uniformément sur $[0,\eta]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue sur $[0,\eta]$ donc $f_{|[0,\eta]}$ est continue, donc f est continue sur $[0,\eta[$.

Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+$. Alors f est continue sur $[0, x_0+1[$, donc f est continue en x_0.

Donc f est continue sur $\mathbb{R}_+$.

• Dérivabilité sur $\mathbb{R}_+$.

① Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ et $f_n' : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{\sqrt{n}}{(x+n)^2}$

② $\sum f_n$ converge simplement vers f sur $\mathbb{R}_+$.

③ Soit $[a,b] \subset \mathbb{R}_+$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [a,b]$

$$\left|\frac{\sqrt{n}}{(x+n)^2}\right| \leq \frac{\sqrt{n}}{n^2} = \frac{1}{n^{3/2}} \quad \text{et } \sum \frac{1}{n^{3/2}} \text{ converge } \left(\frac{3}{2}>1\right),$$

Donc $\sum f_n'$ converge normalement donc uniformément sur $[a,b]$,

segment quelconque de $\mathbb{R}_+$.

De ces trois points, f est $\mathcal{C}^1$ et $f' : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \\ x \mapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{(x+n)^2} \end{array}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n'(x) \geq 0$

donc pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{p} f_n'(x) \geq 0$,

donc $f'(x) \geq 0$.

Donc f est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

4. $$f(x_0) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{x_0}{\sqrt{k}\,(x_0+k)} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{x_0}{\sqrt{k}\,(x_0+k)} \geq \sum_{k=1}^{n} \frac{x_0}{2x_0\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{k}}.$$

$$\sqrt{k}\,(x_0+k) \leq \sqrt{k}\,(x_0+n) \leq 2x_0\sqrt{k}$$

$f(x) \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$ si $\forall \Pi > 0\ \exists A > 0\ \forall x \geq A \quad f(x) \geq \Pi$.

Soit $\Pi > 0$.

$\displaystyle\sum_{k\geq 1} \frac{1}{2\sqrt{k}}$ est une série divergente à termes positifs donc non majorée

donc $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{k}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ n'est pas majorée donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$

tel que pour tout $n \geq n_0$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\sqrt{k}} \geq \Pi$.

Pour tout $x \geq n_0$, $\displaystyle f(x) \geq \sum_{k=1}^{n_0} \frac{1}{2\sqrt{k}} \geq \Pi$.

Donc $f(x) \xrightarrow[+\infty]{} +\infty$.

5. Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{1}{x}\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{\sqrt{n}\,(x+n)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\,(x+n)}.$$

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{n}\,(x+n)}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$|u_n(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}\,n} = \frac{1}{n^{3/2}} \quad \text{et } \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{3/2}} \text{ converge } \left(\frac{3}{2} > 1\right)$$

donc $\sum u_n$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}_+$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

Donc par le théorème de la double limite,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \sum_{n=1}^{+\infty} 0 = 0 .$$

Donc $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

Exercice 4

1. Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+$.

Si $x_0 = 0$ alors $f_n(x_0) = 0$ et $\sum\limits_{n\geq 0} 0$ converge .

Si $x_0 \neq 0$. $0 \leq f_n(x_0) = n x_0^2 e^{-x_0\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ et d'après le critère de Riemann,

$\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge $(2>1)$ donc par comparaison de séries à termes positifs,

$\sum\limits_{n\geq 0} f_n(x_0)$ converge .

Donc $\sum f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$.

2. Pour tout $n>0$, f_n est dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$f_n'(x) = n\left(2x - \sqrt{n}\, x^2\right) e^{-x\sqrt{n}} = nx\left(2 - \sqrt{n}\, x\right) e^{-x\sqrt{n}}$$

x	0		$\frac{2}{\sqrt{n}}$	a		$+\infty$
$f_n'(x)$		$+$			$-$	
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	$4e^{-2}$	$f_n(a)$	$\searrow$	0

$\cancel{n}\cancel{x}\,\dfrac{4}{\cancel{n}}\,e^{-\frac{2}{\sqrt{n}}\times\sqrt{n}}$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\|f_n\|_\infty = 4e^{-2} \underset{n\to+\infty}{\not\to} 0$

donc $\sum\limits_{n\geq 0} \|f_n\|_\infty$ diverge (grossièrement) .

Donc $\sum f_n$ ne converge pas normalement sur $\mathbb{R}_+$.

3. Comme $a>0$ et $\dfrac{2}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $\dfrac{2}{\sqrt{n}} < a$.

Pour tout $n \geq n_0$, et pour tout $x \in [a,+\infty[$, comme f_n est strictement décroissante sur $[a,+\infty[$ (car $a > \dfrac{2}{\sqrt{n}}$),

$0 \leq f_n(x) \leq f_n(a) = n a^2 e^{-a\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$ donc $\sum n a^2 e^{-a\sqrt{n}}$ converge donc $\sum f_n$ converge normalement sur $[a,+\infty[$.

4. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n\left(\frac{2}{\sqrt{p}}\right) \geqslant f_p\left(\frac{2}{\sqrt{p}}\right)$ car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n\left(\frac{2}{\sqrt{p}}\right) \geqslant 0$.

$$= 4e^{-2} = \frac{4}{e^2}$$

5. Posons $f = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} f_n$. $\left(\underbrace{f\left(\frac{2}{\sqrt{p}}\right)}_{\downarrow\, 0} \geqslant \frac{4}{e^2} \underset{p\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0 \right)$

Supposons que $\sum f_n$ converge uniformément sur $[0,+\infty[$.

Alors par continuité des f_n, f est continue sur $[0,+\infty[$.

Comme $\dfrac{2}{\sqrt{p}} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, par continuité de f,

$$f\left(\frac{2}{\sqrt{p}}\right) \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} f(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(0) = 0$$

Or d'après la q4, $f\left(\frac{2}{\sqrt{p}}\right) \geqslant \frac{4}{e^2} \underset{p\to+\infty}{\not\longrightarrow} 0$.

Absurde.

Donc $\sum f_n$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}_+$.