TD 4. Analyse 4.

$(\mathcal{M}_n(\mathbb{R}), |||\cdot|||)$

Exercice 2

1. Supposons que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour $|||\cdot|||$.

$\begin{array}{rcl} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ B & \mapsto & {}^tB \end{array}$ est linéaire en dimension finie donc

continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Donc $({}^tA_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ${}^tA$ pour $|||\cdot|||$.

2. a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$|||A_nB_n - AB||| = |||A_n(B_n - B) + (A_n - A)B|||$$
$$\leq |||A_n(B_n - B)||| + |||(A_n - A)B||| \text{ par inégalité triangulaire}$$
$$\leq |||A_n|||\,|||B_n - B||| + |||A_n - A|||\,|||B|||.$$

pour tout $(M, N) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
$|||MN||| \leq |||M|||\,|||N|||$

D'où le résultat,

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|||A_nB_n - AB||| \leq \underbrace{|||A_n|||}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} |||A|||}\,\underbrace{|||B_n - B|||}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0} + \underbrace{|||A_n - A|||}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}\,|||B||| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$\big|\, |||A_n||| - |||A|||\, \big| \leq |||A_n - A||| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

donc $|||A_n||| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |||A|||$

Donc $(A_nB_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers AB pour $|||\cdot|||$.

ou $\begin{array}{rcl} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ (A, B) & \mapsto & AB \end{array}$ est bilinéaire en dimension finie

donc continue. Comme $(A_n, B_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{n\to+\infty} (A, B)$,

donc $A_nB_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} AB$.

Exercice 4

- Convergence simple. Soit $x_0 \in I$.

  . Si $x_0 = 0$ alors $f_n(x_0) = f_n(0) = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

  . Si $x_0 \neq 0$ alors $|f_n(x_0)| = \left| \dfrac{\sin^2(nx_0)}{n\sin(x_0)} \right| \leq \dfrac{1}{n\sin(x_0)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers l'application nulle.

- Convergence uniforme.

  . Sur $I =]-\pi, \pi[$.

$$|f_n(x)| = \left| \frac{\sin^2(nx)}{n\sin(x)} \right| \leq \underbrace{\frac{1}{n\sin(x)}}_{\text{dépend de } x}$$

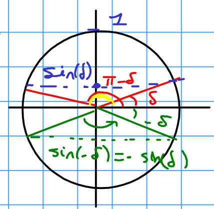
On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\sin^2(1)}{n\sin\left(\frac{1}{n}\right)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sin^2(1) \neq 0 \qquad n\sin\left(\frac{1}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$$

Donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers l'application nulle sur I.

  . Soit $\delta \in]0, \frac{\pi}{2}]$. $[\delta, \pi-\delta]$, $[-\pi+\delta, -\delta]$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [\delta, \pi-\delta]$,



$$|f_n(x)| = \left| \frac{\sin^2(nx)}{n\sin(x)} \right| \leq \frac{1}{n|\sin(x)|}$$

$$\leq \underbrace{\frac{1}{n\sin\delta}}_{\text{quantité indépendante de } x} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers l'application nulle sur $[\delta, \pi-\delta]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in [-\pi+\delta, -\delta]$,

$$|f_n(x)| \leq \frac{1}{n\sin(\delta)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers l'application nulle sur $[-\pi+\delta, -\delta]$.