TD 5. Analyse 4

Exercice 2

1. Notons f la limite uniforme de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur I.

. Soit $x \in I$.

On a $f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$ par convergence simple.

donc par continuité de sin, $\sin(f_n(x)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sin(f(x))$.

Donc $(\sin\circ f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers $\sin\circ f$.

Montrons que $(\sin\circ f)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $\sin\circ f$.

Soit $\varepsilon > 0$.

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f, $\left(|\sin(f_n(x)) - \sin(f(x))| \leq \underbrace{|f_n(x) - f(x)|}_{\leq \varepsilon} \right)$

donc il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$ et tout $x \in I$,

$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$.

D'après l'inégalité des accroissements finis, pour tout $n \geq n_0$ et tout $x \in I$,

$|\sin(f_n(x)) - \sin(f(x))| \leq 1 \times |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$,

Rappel. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$

tel qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $x \in [a,b]$, $|f'(x)| \leq M$

alors pour tout $x, y \in [a,b]$, $|f(x) - f(y)| \leq M|x-y|$.

Ici $|\sin'(x)| = |\cos(x)| \leq 1$.

Donc $(\sin\circ f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers $\sin\circ f$.

2. Si g est uniformément continue alors $(g\circ f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers $g\circ f$.

Dém. $\forall \varepsilon\ \exists \eta > 0\ \forall (x,y) \in I^2$ si $|x-y| < \eta$ alors $|g(x) - g(y)| < \varepsilon$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\eta > 0$ tel que $\forall (x,y) \in I^2$ si $|x-y| < \eta$ alors $|g(x) - g(y)| < \varepsilon$.

Comme $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur I, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$

tel que pour tout $n \geq n_0$ et pour tout $x \in I$, $|f_n(x) - f(x)| \leq \eta$

Pour tout $n \geq n_0$ et pour tout $x \in I$,

$$|g(f_n(x)) - g(f(x))| \leq \varepsilon.$$

Donc $(g \circ f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $g \circ f$.

3. Prenons $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} ; x \mapsto x^2$. Alors g n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

($(x_n), (y_n)$ telles que $x_n - y_n \to 0$ et $g(x_n) - g(y_n) \not\to 0$

$x_n = n$ et $y_n = n + \frac{1}{n}$, $x_n - y_n \to 0$,

et $g(x_n) - g(y_n) = n^2 - \left(n + \frac{1}{n}\right)^2 = n^2 - \left(n^2 + 2 + \frac{1}{n^2}\right)$

$= -2 - \frac{1}{n^2} \not\to 0$)

Soit $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x + \frac{1}{n}$.

Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) \xrightarrow[n \to +\infty]{} x$.

et $|f_n(x) - x| = \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$. Donc $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $id_{\mathbb{R}} = f$. Par continuité de g, $(g \circ f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement vers $g \circ id_{\mathbb{R}} = g$.

Montrons $(g \circ f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers $g \circ id_{\mathbb{R}} = g$.

$$|g \circ f_n(n) - g \circ f(n)| = \left|\left(n + \frac{1}{n}\right)^2 - n^2\right|$$
$$= 2 + \frac{1}{n^2}$$
$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} 2 \neq 0.$$

Donc $(g \circ f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers $g \circ id_{\mathbb{R}} = g$.

$|g \circ f_n(x) - g \circ f(x)|$

$= \left|\left(x + \frac{1}{n}\right)^2 - x^2\right|$

$= \left|x^2 + \frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2} - x^2\right|$

$= \left|\frac{2x}{n} + \frac{1}{n^2}\right|$.

Exercice 4

1. Soit $x \in [0,1]$. On a $f_1(x) = 1 + \int_0^x \underbrace{f_0(t-t^2)}_{=1} dt = 1 + x$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, (H_n) : $\forall x \in [0,1]$, $0 \leq f_{n+1}(x) - f_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$.

- Pour $n = 0$, soit $x \in [0,1]$. On a

$$0 \leq f_1(x) - f_0(x) = 1 + x - 1 = x \leq \frac{x^1}{1!}.$$

D'où (H_0).

- Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose (H_n), montrons (H_{n+1}).

Soit $x \in [0,1]$.

$$f_{n+2}(x) - f_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x f_{n+1}(t-t^2)\,dt - \left(1 + \int_0^x f_n(t-t^2)\,dt\right)$$
$$= \int_0^x \left(f_{n+1}(t-t^2) - f_n(t-t^2)\right) dt.$$

Par hypothèse de récurrence, $0 \leq f_{n+1}(t-t^2) - f_n(t-t^2) \leq \frac{(t-t^2)^{n+1}}{(n+1)!}$ pour tout $t \in [0,1]$.

Donc par positivité de l'intégrale,

$$0 \leq f_{n+2}(x) - f_{n+1}(x) \leq \int_0^x \frac{(t-t^2)^{n+1}}{(n+1)!}\,dt = \int_0^x \frac{t^{n+1}\overbrace{(1-t)}^{\in[0,1]}{}^{n+1}}{(n+1)!}\,dt$$
$$\leq \int_0^x \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}\,dt = \frac{x^{n+2}}{(n+2)!}$$

D'où (H_{n+1}).

D'où le résultat par récurrence.

3. Soit $x \in [0,1]$.

$0 \leq |f_{n+1}(x) - f_n(x)| = f_{n+1}(x) - f_n(x) \leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ d'après la q2.

Or $\sum \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ est convergente.

Donc par comparaison de séries à termes positifs, $\sum_{n\geq 0} |f_{n+1}(x) - f_n(x)|$ converge donc $\sum_{n \geq 0} f_{n+1}(x) - f_n(x)$ converge absolument.

4. Soit $x \in [0,1]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} f_{k+1}(x) - f_k(x) = f_{n+1}(x) - f_0(x)$.

Donc par convergence de $\left(\sum_{k=0}^{n} f_{k+1}(x) - f_k(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$, on en déduit la convergence de $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$.

Donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f sur $[0,1]$.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(0) = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ et $f_n(0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(0)$ par convergence simple. Donc par unicité de la limite, $f(0) = 1$.

6. Soit $x \in [0,1]$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $N \geq n$,

$$0 \leq f_N(x) - f_n(x) = \sum_{k=n}^{N-1} f_{k+1}(x) - f_k(x) \leq \sum_{k=n}^{N-1} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} \leq \sum_{k=n}^{N-1} \frac{1}{(k+1)!}$$

et $\sum_{k\geq 0} \frac{1}{(k+1)!}$ converge $\left(\sum \frac{1}{k!}^k \text{ converge de somme } \exp(1)\right)$.

Donc en laissant tendre N vers $+\infty$,

$$0 \leq f(x) - f_n(x) \leq \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{(k+1)!} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}.$$

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $x \in [0,1]$,

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \underbrace{\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k!}}_{\text{quantité indépendante de } x} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{comme reste d'une série convergente.}$$

Donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0,1]$.

8. Soit $x \in [0,1]$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x f_n(t-t^2)\,dt$.

Par convergence simple, $f_{n+1}(x) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x)$.

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g_n(t) = f_n(t-t^2)$ et $g(t) = f(t-t^2)$.

$$|g_n(t) - g(t)| = |f_n(t-t^2) - f(t-t^2)| \leq \|f_n - f\|_\infty \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

Donc $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers g sur $[0,1]$ donc sur $[0,x]$.

Donc on peut intervertir lim et $\int$,

$$\int_0^x g_n(t)\,dt = \int_0^x f_n(t-t^2)\,dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^x g(t)\,dt = \int_0^x f(t-t^2)\,dt.$$

Donc $f(x) = 1 + \int_0^x f(t-t^2)\,dt$.