Ex1 : OPP

1. Voir cours

2\. 1. Relation de dispersion $\underline{k = \frac{w}{c}}$

Elle s'obtient en injectant l'expression de $\vec{E}$ dans l'equation de d'Alembert.

2.2. direction : $\underline{Ox}$

sens : $\underline{\text{selon } \vec{u_x}}$

vitesse : $\underline{c}$ (vitesse de la lumière dans le vide)

2.3. Direction constante => <u>polarisation rectiligne</u>

2.4. Relation de structure d'une OPP : <u>$\vec{u_z}$, $\vec{E}$ et $\vec{B}$ forment un trièdre direct</u>

2.5. $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{w}$ car il s'agit d'une OPPH

$$\rightarrow \vec{B} = \frac{kE}{w} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\vec{B} = \frac{E_0}{c} \cos(wt - kz)\, \vec{u_y}}$$

2.6. On a $u_{em,OPPH} = \varepsilon_0 E^2$

$$\rightarrow \underline{\langle u_{em,OPPH} \rangle = \frac{\varepsilon_0 E_0^2}{2}}$$ car $\langle \cos^2(wt \cdot kz) \rangle = 1/2$

3\. $$\vec{\Pi}_{OPPH} = \frac{1}{2} \mathrm{Re}\left(\frac{\vec{E} \wedge \vec{B}^*}{\mu_0} \right)$$

$$\vec{\Pi}_{OPPH} = c\, \varepsilon_0 E^2 \vec{u_z}$$

donc $\langle \vec{\Pi}_{OPPH} \rangle = c \dfrac{\varepsilon_0 E_0^2}{2} \vec{u_z}$ $\left(= c \langle u_{em,OPPH} \rangle \vec{u_z} \right)$

Par ailleurs $\| \langle \vec{\Pi}_{OPPH} \rangle \| = \dfrac{P}{S}$

donc $E_0 = \sqrt{\dfrac{2P}{c\,\varepsilon_0 S}} = 43 \text{ kV.m}^{-1}$

$B_0 = \dfrac{E_0}{c} = 1{,}4 \times 10^{-4} \text{ T}$

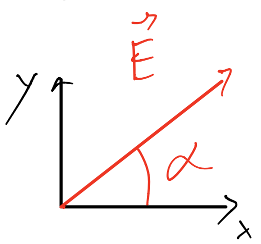
Ex2 : Etat de polarisation

1. OPPH polarisée rectilignement (selon $\vec{u_x}$) qui se propage selon $\vec{u_z}$ dans le sens des z croissant.

2. OPPH polarisée rectilignement (selon $\vec{u_x}$) qui se propage selon $\vec{u_z}$ dans le sens des z décroissant.

3. Onde plane harmonique stationnaire (découplage des variables spatiales et temporelle) polarisée rectilignement selon $\vec{u_x}$

4. OPPH polarisée rectilignement se propageant selon $\vec{u_z}$ dans le sens des z croissant.
Direction de polarisation : $\vec{u}$ tel que $\vec{u} \cdot \vec{u_x} = \cos \alpha$
et $\tan \alpha = \dfrac{E_y}{E_x} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$



5. OPPH se propageant selon $\vec{u}_z$ dans le sens des z croissant polarisée circulairement : $E_x^2 + E_y^2 = E_0^2 = cste$

$\left.\frac{\partial E_y}{\partial t}\right|_{\substack{t=0 \\ z=0}} = E_0 \omega > 0$ polarisée circulaire gauche

6. OPPH polarisée elliptiquement qui se propage selon $\vec{u}_z$ dans le sens des z croissant.

$E_x(z=0,t)$ est maximal en $t=0$ et

$\frac{\partial E_y}{\partial t} = -\frac{E_0 \omega}{\sqrt{3}} \sin(\omega t - kz - \pi/3)$

$\rightarrow \left.\frac{\partial E_y}{\partial t}\right|_{\substack{t=0 \\ z=0}} = \frac{E_0 \omega}{\sqrt{3}} \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{E_0 \omega}{\cancel{\sqrt{3}}} \frac{\cancel{\sqrt{3}}}{2} = \frac{E_0 \omega}{2} > 0$

$\rightarrow$ polarisation elliptique gauche

Ex 3 : Reflexion d'une onde électromagnétique sur un miroir parfait sous incidence normale.

1. Si une onde existait dans le conducteur, elle dissiperait de l'énergie par effet Joule : $P_J = \vec{j} \cdot \vec{E} = \gamma E^2$ (loi d'Ohm)

donc $P_J \xrightarrow[E \neq 0]{\gamma \to \infty} \infty$!!! Absurde

Une puissance infinie n'est pas physique

$\rightarrow$ $E = 0$

2. Equation de d'Alembert dans le vide $\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}$

3. $\underline{\vec{E_i} = E_0 \exp(j(\omega t - kx))\,\vec{u_y}}$ avec $j^2 = -1$

OPPH $\rightarrow$ relation de structure $\vec{B_i} = \dfrac{\vec{k} \wedge \vec{E_i}}{\omega}$

$$\underline{\vec{B_i} = \frac{E_0}{c} \exp(j(\omega t - kx))\,\vec{u_z}}$$

4. Champ électrique total :

$$\vec{E}_{tot,vide} - \underbrace{\cancel{\vec{E}_{total,conducteur}}}_{\vec{0}} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{u_x}$$

d'après question 1.

Champ magnétique total :

$$\vec{B}_{tot,vide} - \underbrace{\cancel{\vec{B}_{tot,conducteur}}}_{\vec{0}} = -\mu_0\, \vec{j_S} \wedge \vec{u_x}$$

5. Champ électrique réfléchi : $\vec{E_r} = \vec{A} \exp(j(\omega t - \vec{k_r}\cdot\vec{r}))$ avec A réel

$\vec{A} \,//\, \vec{k_r}$

Dans le vide $k = \dfrac{\omega}{c} = k_r$

Soit P, un point de l'interface en $x = 0$ et $\vec{r_p} = \vec{OP}$.

En $x = 0$

$$\begin{cases} 0 + A_x \exp(j(\omega t - \vec{k_r}\cdot\vec{r_p})) = -\dfrac{\sigma}{\varepsilon_0} & (1) \\ E_0 \cancel{e^{j\omega t}} + A_y \exp(j(\cancel{\omega t} - \vec{k_r}\cdot\vec{r_p})) = 0 & (2) \\ 0 + \underbrace{\cancel{A_z}}_{0} \exp(j(\omega t - \vec{k_r}\cdot\vec{r_p})) = 0 & (3) \end{cases}$$

(2) $E_0 + A_y \exp(-j\vec{k_r}\cdot\vec{r_p}) = 0$ doit rester vraie $\forall P$

$$\longrightarrow \vec{k_r}\cdot\vec{r_p} = 0$$

donc $\vec{k_r} \,//\, \vec{u_x}$

Et d'après (2) $\underline{A_y = -E_0}$

Vu que l'onde est réfléchie, elle se dirige en sens opposé à $\vec{k}$

Finalement. $\vec{k_r} = -k\vec{u_x} = -\vec{k}$

Par ailleurs, en $x<0$, l'onde totale doit être transverse donc $A_x = 0$, d'après (1) $\sigma = 0$

Pour conclure $\underline{\vec{E_r}} = -E_0 \exp(j(wt + kx))\vec{u_y}$

$$\underline{\vec{B_r}} = \frac{\vec{k_r} \wedge \underline{\vec{E_r}}}{w} = \frac{E_0}{c} \exp(j(wt+kx))\vec{u_z}$$

$\vec{k_r}$, $\vec{E_r}$ et $\vec{B_r}$ forment un trièdre direct. L'onde électromagnétique est PPH.

6. On a $\underline{\vec{E_{tot}}} = E_0 \exp(j(wt-kx))\vec{u_y} - E_0 \exp(j(wt+kx))\vec{u_y}$

$$= E_0 e^{jwt}\left(e^{-jkx} - e^{jkx}\right)\vec{u_y}$$

$$\underline{\vec{E_{tot}}} = E_0 e^{jwt} 2i \sin kx \quad \vec{u_y}$$

$$\underline{\vec{B_{tot}}} = \frac{E_0}{c} \exp(j(wt-kx))\vec{u_z} + \frac{E_0}{c} \exp(j(wt+kx))\vec{u_z}$$

$$\underline{\vec{B_{tot}}} = \frac{2E_0}{c} e^{jwt} \cos kx \quad \vec{u_z}$$

L'onde totale est plane et harmonique mais pas progressive.
Elle est stationnaire

C'est un resultat général : la somme de 2 OPPH de mêmes caractéristiques mais se propageant en sens inverse equivaut à une onde stationnaire.

7. Champs réels : $\vec{E} = 2E_0 \sin(kx)\sin(\omega t)\,\vec{u_y}$

$$\vec{B} = \frac{2E_0}{c}\cos(kx)\cos(\omega t)\,\vec{u_z}$$

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0} = \frac{4E_0^2}{\mu_0 c}\sin kx \cos kx \cos\omega t \sin\omega t\ \vec{u_z}$$

$$\vec{\Pi} = \frac{E_0^2}{\mu_0 c}\sin(2kx)\sin(2\omega t)\,\vec{u_z}$$

$$\langle\vec{\Pi}\rangle = \frac{E_0^2}{\mu_0 c}\sin(2kx)\underbrace{\langle\sin(2\omega t)\rangle}_{0}\vec{u_z} = \vec{0}$$

L'énergie n'est pas transportée dans une onde stationnaire.

8. $$u_{em} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu_0}$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2}\left[4E_0^2\sin^2 kx \sin^2\omega t\right] + \frac{1}{2\mu_0}\left[\frac{4E_0^2}{c^2}\cos^2 kx\cos^2\omega t\right]$$

$$= 2\varepsilon_0 E_0^2\left(\sin^2 kx \sin^2\omega t + \cos^2 kx \cos^2\omega t\right)$$

$$\langle u_{em}\rangle = 2\varepsilon_0 E_0^2\left(\frac{\sin^2 kx + \cos^2 kx}{2}\right)$$

$$\langle u_{em}\rangle = \varepsilon_0 E_0^2$$

L'onde stationnaire contient quand même une densité d'énergie.

Ex 4 : Superposition de deux OPPH

1. $k_1 = \frac{\omega}{c}$

Relation de structure d'une OPPH $\rightarrow$ $\vec{B}_1 = \frac{\vec{k}_1 \wedge \vec{E}_1}{\omega}$

avec $\vec{E}_1 = E_0 \cos(\omega t - \vec{k}_1.\vec{r})\,\vec{e}_y$

$$\rightarrow \vec{B}_1 = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - \vec{k}_1.\vec{r}) \begin{pmatrix} -\sin\alpha \\ 0 \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$$

2. $\vec{k}_2 = k_1 (\cos\alpha\, \vec{e}_x - \sin\alpha\, \vec{e}_z)$

$\vec{E}_2 = E_0 \cos(\omega t - \vec{k}_2.\vec{r})\,\vec{e}_y$

De même $\vec{B}_2 = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t - \vec{k}_2.\vec{r}) \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ 0 \\ \cos\alpha \end{pmatrix}$

Et $\vec{E}_{tot} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$

$$= E_0\, \vec{e}_y \Big[\cos\Big(\omega t - \frac{\omega}{c}x\cos\alpha - \frac{\omega z}{c}\sin\alpha\Big) + \cos\Big(\underbrace{\omega t - \frac{\omega}{c}x\cos\alpha}_{A} + \underbrace{\frac{\omega z}{c}\sin\alpha}_{B}\Big)\Big]$$

or $\cos(A-B) + \cos(A+B) = 2\cos A \cos B$

donc $\vec{E}_{tot} = 2E_0 \cos\left(\omega t - \frac{\omega x}{c}\cos\alpha\right) \cos\left(\frac{\omega z}{c}\sin\alpha\right) \vec{e}_y$

$\vec{B}_{tot} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2$

$$\vec{B}_{tot}.\vec{e}_x = \frac{E_0}{c}\sin\alpha \Big[-\cos\Big(\omega t - \frac{\omega x}{c}\cos\alpha - \frac{\omega z}{c}\sin\alpha\Big) + \cos\Big(\omega t - \frac{\omega x}{c}\cos\alpha + \frac{\omega z}{c}\sin\alpha\Big)\Big]$$

or $-\cos(A-B) + \cos(A+B) = -2\sin A \sin B$

donc $\vec{B}_{tot} \cdot \vec{e}_x = -2\frac{E_0}{c} \sin\alpha \sin\left(\omega t - \frac{\omega x \cos\alpha}{c}\right) \sin\left(\frac{\omega z}{c}\sin\alpha\right)$

$$\vec{B}_{tot} \cdot \vec{e}_z = \frac{E_0 \cos\alpha}{c}\left[\cos\left(\omega t - \frac{\omega x}{c}\cos\alpha - \frac{\omega z}{c}\sin\alpha\right) + \cos\left(\omega t - \frac{\omega x}{c}\cos\alpha + \frac{\omega z}{c}\sin\alpha\right)\right]$$

$$\vec{B}_{tot} \cdot \vec{e}_z = 2\frac{E_0}{c}\cos\alpha \cos\left(\omega t - \frac{\omega x}{c}\cos\alpha\right) \sin\left(\frac{\omega z}{c}\sin\alpha\right)$$

D'où $$\boxed{\vec{B}_{tot} = 2\frac{E_0}{c}\begin{pmatrix} -\sin\left(\omega t - \frac{\omega x}{c}\cos\alpha\right)\sin\left(\frac{\omega z}{c}\sin\alpha\right)\sin\alpha \\ 0 \\ \cos\left(\omega t - \frac{\omega x}{c}\cos\alpha\right)\cos\left(\frac{\omega z}{c}\sin\alpha\right)\cos\alpha \end{pmatrix}}$$

3. $\vec{k}_{tot} = \vec{k}_1 + \vec{k}_2 = \underline{2 k_1 \cos\alpha\, \vec{e}_x}$

L'onde totale est progressive selon Ox (x croissant), harmonique mais pas plane.

4. $$\langle \vec{\Pi} \rangle = \left\langle \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} \right\rangle = \frac{1}{\mu_0}\left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ E_y \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} B_x \\ 0 \\ B_z \end{pmatrix} \right\rangle = \frac{1}{\mu_0}\left\langle \begin{pmatrix} E_y B_z \\ 0 \\ -E_y B_x \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$\langle E_y B_z \rangle = \left\langle \frac{4E_0^2}{c} \underbrace{\cos^2\left(\omega t - \frac{\omega x}{c}\cos\alpha\right)}_{1/2} \cos^2\left(\frac{\omega}{c} z \sin\alpha\right)\cos\alpha \right\rangle$$

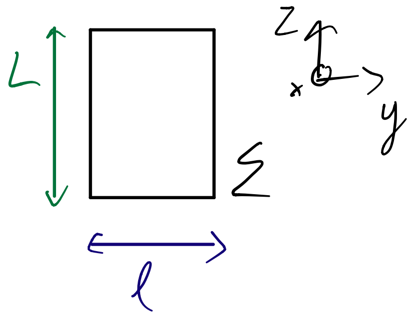
$$= \frac{2E_0^2}{c}\cos\alpha\cos^2\left(\frac{\omega}{c} z \sin\alpha\right)$$

$$-E_y B_y = \left\langle \frac{4E_0^2}{c} \underbrace{\cos\left(\omega t - \frac{\omega x}{c}\cos\alpha\right)\sin\left(\omega t - \frac{\omega x}{c}\sin\alpha\right)}_{0} \cos\left(\frac{\omega}{c} z\sin\alpha\right) \times \sin\left(\frac{\omega}{c} z \sin\alpha\right)\sin\alpha \right\rangle$$

$= 0$

donc $$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{2E_0^2}{\mu_0 c}\cos\alpha\cos^2\left(\frac{\omega z}{c}\sin\alpha\right)\vec{e}_x$$

l'énergie se propage en moyenne selon $\vec{e}_x$.

5. 

$$\langle \vec{P} \rangle_\Sigma = \iint_\Sigma \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot d\vec{S}$$

$$= \frac{2E_0^2}{\mu_0 c}\cos\alpha \underbrace{\int_0^L \cos^2\left(\frac{\omega}{c} z \sin\alpha\right) dz}_{(*)} \int_0^{\ell} \cancel{dy}\ \ell$$

$$(*) = L \times \frac{1}{L}\int_0^L \cos^2\left(\frac{\omega z \sin\alpha}{c}\right) \underset{L \gg \lambda}{=} L \times \underbrace{\langle \cos^2(\ldots) \rangle}_{1/2}$$

donc $(*) = \dfrac{L}{2}$

d'où $\langle P \rangle = \dfrac{E_0^2}{\mu_0 c} S \cos\alpha = \underline{\varepsilon_0 E_0^2 \times S c \cos\alpha}$

6. $$\langle u_{em} \rangle_t = \frac{\varepsilon_0}{2}\langle E^2 \rangle_t + \frac{1}{2\mu_0}\langle B^2 \rangle_t$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2}\left[4E_0^2 \times \frac{1}{2}\cos^2\left(\frac{\omega}{c} z \sin\alpha\right)\right]$$

$$+ \frac{1}{2\mu_0}\left[\frac{4E_0^2}{c^2}\left(\frac{1}{2}\sin^2\left(\frac{\omega}{c} z \sin\alpha\right)\sin^2\alpha + \frac{\cos^2\alpha}{2}\cos^2\left(\frac{\omega}{c} z \sin\alpha\right)\right)\right]$$

$$\langle\langle u_{em} \rangle_t \rangle_z = \varepsilon_0 E_0^2 \times \frac{1}{2} + \frac{E_0^2}{\mu_0 c^2} \times \frac{1}{2}\underbrace{\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right)}_{1}$$

$$= \varepsilon_0 E_0^2$$

donc $\underline{\dfrac{\langle P \rangle}{S} = \langle\langle u_{em} \rangle_t \rangle_z \, c \cos\alpha}$

c'est aussi le flux du vecteur de Poynting moyen.

l'énergie du champ électromagnétique se propage à la vitesse $c \cos\alpha$

Ex 5 : Onde cylindrique

1. M. F. $\rightarrow$ $\vec{\text{rot}}\, \underline{\vec{E}} = -\dfrac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t}$

or $\vec{\text{rot}}\, \underline{\vec{E}} = -\dfrac{\partial \underline{E}_z}{\partial r}\vec{u}_\theta = \left(ik E(r)\exp(i(\omega t - kr)) - \dfrac{dE}{dr}\exp(i(\omega t - kr))\right)\vec{u}_\theta$

donc $\vec{B} \,//\, \vec{u}_\theta$

et $-\dfrac{\partial \underline{\vec{B}}}{\partial t} = ikE(r)\exp(i(\omega t - kr)) - \dfrac{dE}{dr}\exp(i(\omega t - kr))$

donc $\underline{\vec{B}} = \left(-\dfrac{k}{\omega}E(r) - \dfrac{1}{i\omega}\dfrac{dE}{dr}\right)\exp(i(\omega t - kr))\,\vec{u}_\theta$

onde transverse qui se propage selon $\vec{u}_r$

2. Champs réels

$\vec{E} = E(r)\cos(\omega t - kr)\,\vec{u}_z$

$\vec{B} = \left[-\dfrac{k}{\omega}E(r)\cos(\omega t - kr) + \dfrac{1}{\omega}\dfrac{dE}{dr}\sin(\omega t - kr)\right]\vec{u}_\theta$

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0} = \left[\frac{kE(r)^2\cos^2(\omega t - kr)}{\mu_0\omega} - \frac{E(r)}{\mu_0\omega}\frac{dE(r)}{dr}\sin(\omega t - kr)\cos(\omega t - kr)\right]\vec{u}_r$$

$$\langle\vec{\Pi}\rangle = \frac{kE(r)^2}{2\mu_0\omega} = \frac{c\varepsilon_0 E^2(r)}{2}\vec{u}_r$$

$$\mathcal{P} = \langle\vec{\Pi}\rangle\cdot\vec{S}_{lat} = \frac{c\varepsilon_0 E^2(r)}{\cancel{2}} \times \cancel{2}\pi r h$$

3. $\mathcal{P} = $ cste car il n'y a pas de source en dehors de l'axe donc $E(r) = \sqrt{\dfrac{\mathcal{P}}{\pi r h c \varepsilon_0}} = \sqrt{\dfrac{a}{r}}$

d'où $\underline{\vec{E}(r) = \frac{a}{\sqrt{r}} \exp\left(i\left(\omega t - kr\right)\right) \vec{u_z}}$

4. L'amplitude de $\vec{B}$ est donc $\sqrt{\left(\frac{k}{\omega}\frac{a}{\sqrt{r}}\right)^2 + \left(\frac{a}{2\omega r\sqrt{r}}\right)^2}$

$$\Big\downarrow \; r >> \lambda$$

$$\frac{k}{\omega}\frac{a}{\sqrt{r}} = \frac{k}{\omega} E(r)$$

A grande distance du fil $\vec{B} = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega}$, structure d'onde plane.

5. On part de $\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$

or $\Delta E = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[r \frac{\partial\left(\frac{a}{\sqrt{r}} \exp\left(i(\omega t - kr)\right)\right)}{\partial r}\right]$

$\Delta E = a \exp\left(i(\omega t - kr)\right)\left(-\frac{k^2}{\sqrt{r}} + \frac{1}{4r^{5/2}}\right)$

donc $\Delta E \xrightarrow[r >> \lambda]{} -k^2 E$

Par ailleurs $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\frac{\omega^2}{c^2}\vec{E}$

On en déduit la relation de dispersion $\underline{k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}}$, ie $\underline{k = \frac{\omega}{c}}$

C'est normal, à grande distance, l'onde se propage dans le vide comme une onde plane