

$E_x 1:$

1. Taille caractéristique de l'antenne:  $L = 1 \text{ cm}$

Longueur d'onde:  $\lambda = \frac{c}{f} = 1,5 \text{ m} = 150 \text{ cm}$

On a bien  $\lambda \gg L$

2. La zone de rayonnement se situe à  $r \gg \lambda$ , il faut alors  $OM, OM' \gg \lambda$ .

La phrase signifie:

$(\vec{u}_r, \vec{E}, \vec{B})$  est un trièdre direct

$E = cB$

3. Approximation dipolaire vérifiée:  $r \gg L$   
puisque  $r \gg \lambda \gg L$

4. - Direction de  $\vec{E}(M, t)$ :

$(Ozx)$  est plan de charges (le dipôle)

$\hookrightarrow \vec{E}(M, t) \in (Ozx)$

$(Oxy)$  est plan d'antisymétrie de charges

$\hookrightarrow \vec{E}(M, t) \perp (Oxy)$

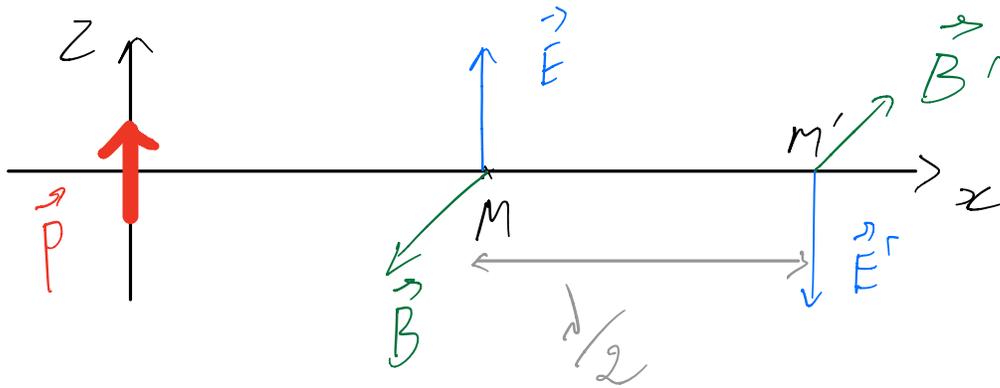
Finalement  $\vec{E}(M, t) \parallel \vec{u}_z$

- On choisit  $t$  pour lequel  $\vec{E}(M, t)$  est maximal et vers le haut

- On en déduit  $\vec{B}(M, t)$  sachant que  $(\vec{u}_r, \vec{E}, \vec{B})$  est

un trièdre direct.

-  $MM' = \frac{d}{2}$  donc les champs en M et M' sont en opposition de phase :



Ex 2:

1. Bilan de forces:

$$\cdot \vec{F} = -m\omega_0^2 \vec{r}$$

$$\cdot \vec{F}_L = -e(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

or  $B \sim \frac{E}{c}$  donc

$$\frac{\|\vec{v} \wedge \vec{B}\|}{\|\vec{E}\|} \sim \frac{v}{c} \ll 1$$

hypothèse non relativiste

$$\text{d'où } \vec{F}_L \sim -e\vec{E}$$

2.  $\vec{E} \propto \vec{u}_z$  donc la force excitatrice est selon  $\vec{u}_z$   
PFD appliqué à l'électron dans  $\mathcal{R}_{lab}$  supposé galiléen :

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -m\omega_0^2 \vec{r} - e \vec{E}$$

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cos \omega t \quad \rightarrow \quad \vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\omega t}$$

$$\vec{r} = \vec{r}_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad \rightarrow \quad \vec{r} = \vec{r}_0 e^{i\omega t} \quad \text{avec} \quad \vec{r}_0 = e^{i\varphi}$$

$$\vec{r} = \frac{e}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \vec{E} \parallel \vec{u}_z$$

donc

$$\vec{r} = \frac{e E_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos(\omega t) \vec{u}_z$$


---

3. Régime de Rayleigh :  $\omega \ll \omega_0$

$$\vec{r} \approx \frac{e E_0}{m \omega_0^2} \cos(\omega t) \vec{u}_z$$


---

4. Si  $\omega = \omega_0$   $r = \infty$  ! Resonance

En réalité il y a une force de frottement pour éviter la divergence à la résonance

5. Régime de Thomson :  $\omega \gg \omega_0$

$$\vec{r} \approx -\frac{e E_0}{m \omega^2} \cos(\omega t) \vec{u}_z$$


---

6.a On cherche  $\langle \mathcal{P} \rangle = \iint \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot d\vec{S}$

où  $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{E^2}{c \mu_0} \vec{u}_x$

ici  $\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{E_0^2}{2 c \mu_0} \vec{u}_x$

---

donc  $\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{E_0^2}{2c\mu_0} \pi \sigma^2$

---

b. b. On identifie :

$$\frac{E_0^2}{2c\mu_0} \pi r_0^2 = \frac{\mu_0}{12\pi c} \omega^4 e^2 a^2 \quad \text{or } r = \frac{e E_0}{m \omega^2} \cos \omega t \vec{u}_z$$

donc  $r_0 = \frac{\mu_0 e^2}{\sqrt{6} \pi m}$

---

b. c.  $\mathcal{P} = \pi r_0^2 = \frac{\mu_0^2 e^4}{6 \pi m^2} = 0,58 \text{ Mb}$

---

Ex 3:

1.  $\vec{E} = -\text{grad } V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$

avec  $\vec{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{\dot{m}(t-r/c)}{r^2} + \frac{\ddot{m}(t-r/c)}{r c} \right) \sin \theta \vec{u}_y$

$$\vec{E} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{\dot{m}(t-r/c)}{r^2} + \frac{\ddot{m}(t-r/c)}{r c} \right) \sin \theta \vec{u}_y$$

$$\vec{E} \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\ddot{m}(t-r/c)}{r c} \sin \theta \vec{u}_y$$

$\propto 1/r^2$                        $\propto 1/r$

$$\vec{E}(r, t) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{\mu_0 m_0 \omega^2 \cos(\omega t)}{4\pi r c} \sin \theta \vec{u}_y$$


---

On a  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$  et  $\vec{A} = A_y(r, \theta, t) \vec{u}_y$

donc  $\vec{B} = \frac{1}{r^2} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sin\theta} \left( \frac{\partial(\sin\theta A_\varphi)}{\partial\theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi} \right) \\ \frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial(r A_\varphi)}{\partial r} \\ \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta} \end{pmatrix}$

$$\vec{B} = \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \sin^2\theta \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{m(t-r/c)}{r^2} + \frac{im(t-r/c)}{rc} \right) \right) \vec{u}_r$$

$$- \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \sin\theta \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{m(t-r/c)}{r} + \frac{im(t-r/c)}{c} \right) \right) \vec{u}_\theta$$

$$\vec{B} = \frac{2 \cos\theta \sin\theta}{\sin\theta} \times \frac{\mu_0}{4\pi} \left( \frac{m(t-r/c)}{r^3} + \frac{im(t-r/c)}{r^2 c} \right) \vec{u}_r$$

$$- \frac{\sin\theta \mu_0}{4\pi} \left[ \frac{-im(t-r/c)}{cr^2} - \frac{m(t-r/c)}{r^3} - \frac{im(t-r/c)}{c^2 r} \right] \vec{u}_\theta$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\mu_0 \sin\theta}{4\pi r} im(t-r/c) \vec{u}_\theta$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) \underset{r \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\mu_0 \sin\theta m_0 \omega^2 \cos \omega t}{4\pi r c^2} \vec{u}_\theta$$

$$2. \quad \vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\mu_0 \sin^2\theta m_0^2 \omega^4 \cos^2 \omega t}{(4\pi r)^2 c^3} \vec{u}_r$$

$$3. \quad P_m = \iint \vec{\Pi} \cdot d\vec{S}$$

$$= \frac{\mu_0 \cos^2 \omega t m_0^2 \omega^4}{(4\pi)^2 c^3} \int_0^{2\pi} r^2 d\varphi \int_0^\pi \sin^3\theta d\theta$$

$$= \frac{\mu_0 \cos^2 \omega t m_0^2 \omega^4}{6\pi c^3}$$

$$\text{et } \langle P_m \rangle = \frac{\mu_0 m_0^2 \omega^4}{12\pi c^3}$$

$$4. \quad \frac{\langle P_m \rangle}{\langle P_e \rangle} = \frac{m_0^2}{P_0^2 c^2}$$

$$5. \quad \text{Pour l'atome} \quad m_0 \frac{e v}{2 \pi a} \times \pi a^2 = \frac{e v a}{2} = \frac{e a d c}{2}$$

$$p_0 \sim e a$$

$$\text{donc} \quad \frac{\langle P_m \rangle}{\langle P_e \rangle} \sim \frac{e^2 a^2 d^2 c^2}{4 e^2 a^2 c^2} = \frac{\alpha^2}{4} = 1,3 \times 10^{-5} \ll 1$$

Pour l'atome, la puissance rayonnée par son dipôle magnétique est négligeable devant la puissance rayonnée par son dipôle électrique.

Généralement, le champ rayonné à grande distance par un dipôle magnétique varie en  $1/r$ , comme celui du dipôle électrique. Il est aussi en  $\langle \ddot{m}^2 \rangle$  mais

$$\frac{\langle P_m \rangle}{\langle P_e \rangle} \sim \frac{v^2}{c^2} \ll 1 \quad \text{si non relativiste}$$

## Ex 4

1. PFD appliqué à l'électron dans  $\mathcal{R}_{lab}$  supposé galiléen.

$$m \frac{d\vec{r}}{dt^2} = -m\omega_0^2 \vec{r} - e \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{B}$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\omega_0^2 x - \frac{eB}{m} \dot{y} & (1) \\ \ddot{y} = -\omega_0^2 y + \frac{eB}{m} \dot{x} & (2) \\ \ddot{z} = -\omega_0^2 z & (3) \end{cases}$$

2. (3)  $\rightarrow$   $z(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$  avec  $A, \varphi \in \mathbb{R}$

3. (1) et (2) s'écrivent alors en notation complexe :

$$\begin{cases} -\omega^2 A_1 = -\omega_0^2 A_1 - j\omega \frac{eB}{m} A_2 \\ -\omega^2 A_2 = -\omega_0^2 A_2 + j\omega \frac{eB}{m} A_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (\omega_0^2 - \omega^2) A_1 + j\omega \frac{eB}{m} A_2 = 0 \\ (\omega_0^2 - \omega^2) A_2 - j\omega \frac{eB}{m} A_1 = 0 \end{cases}$$

Solution non triviale si et seulement si

$$\begin{vmatrix} \omega_0^2 - \omega^2 & j\omega eB/m \\ -j\omega eB/m & \omega_0^2 - \omega^2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (\omega_0^2 - \omega^2)^2 - \omega^2 e^2 B^2 / m^2 = 0$$

ce  $\omega_0^2 - \omega^2 = \pm \frac{eB\omega}{m}$

$$\omega^2 \pm \frac{eB\omega}{m} - \omega_0^2 = 0$$

fonction du 2<sup>nd</sup> degré à

déterminant  $\Delta = \frac{e^2 B^2}{m^2} + 4\omega_0^2 > 0$

Solutions :  $\omega = \pm \frac{eB}{2m} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$  or  $\omega_0 \gg \frac{eB}{m} \rightarrow \Delta \sim 4\omega_0^2$

et  $\omega > 0$

d'où  $\boxed{\begin{matrix} \omega_1 = \omega_0 - \frac{eB}{2m} \\ \omega_2 = \omega_0 + \frac{eB}{2m} \end{matrix}}$

Il y a 2 pulsations possibles pour  $x(t)$  et  $y(t)$ .

4. Rq :  $\omega_i^2 = \omega_0^2 \pm \frac{eB}{m} + \frac{e^2 B^2}{4m^2} \xrightarrow{\sim 0}$  terme d'ordre 2 en  $eB/m$

Si  $\omega = \omega_1$ , le système ( $\Sigma$ ) devient

$$\begin{cases} \frac{\omega_0 e B}{m} A_1 + \frac{j e B}{m} \left( \omega_0 - \frac{e B}{2m} \right) A_2 = 0 \\ \frac{\omega_0 e B}{m} A_2 - \frac{j e B}{m} \left( \omega_0 - \frac{e B}{2m} \right) A_1 = 0 \end{cases}$$

*idem*

$$\rightarrow \underline{A_2 = j A_1}$$

alors 
$$\begin{cases} x(t) = A_1 e^{j \omega_1 t} \\ y(t) = A_1 e^{j(\omega_1 t + \pi/2)} \end{cases}$$

et 
$$\begin{cases} x(t) = A_1 \cos(\omega_1 t) \\ y(t) = -A_1 \sin(\omega_1 t) \end{cases}$$

$$x^2 + y^2 = A_1^2 = \text{cste}$$

mouvement circulaire

De même, si  $\omega = \omega_2$ , il vient  $\underline{A_2 = -j A_1}$

d'où 
$$\begin{cases} x(t) = A_1 \cos \omega_2 t \\ y(t) = A_1 \sin \omega_2 t \end{cases}$$

5. Comme  $\vec{r} = \begin{pmatrix} A_1 \cos(\omega_i t) \\ \pm A_1 \sin(\omega_i t) \\ A \cos(\omega_0 t + \varphi) \end{pmatrix}$  où  $\omega_i = \omega_1$  ou  $\omega_2$

$$\vec{r} = \underbrace{\begin{pmatrix} A_1 \cos \omega_i t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{P_x} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ \pm A_1 \sin \omega_i t \\ 0 \end{pmatrix}}_{P_y} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ A \cos(\omega_0 t + \varphi) \end{pmatrix}}_{P_z}$$

$P_x$

$P_y$

$P_z$

dipôle  $\parallel \vec{u}_x$

$\parallel \vec{u}_y$

$\parallel \vec{u}_z$

Chaque dipôle émet des ondes polarisées rectilignement dans les directions perpendiculaires au dipôle.

$P_x \rightarrow d_1$  et  $d_2$  polarisées rectilignement émises selon  $\vec{u}_z$  et  $\vec{u}_y$ .  
 $P_y \rightarrow d_1$  et  $d_2$  " " " " " " $\vec{u}_x$ .  
 $P_z \rightarrow d_0$  polarisée rectilignement émise selon  $\vec{u}_x$  et  $\vec{u}_y$ .

$d_1$  et  $d_2$  émises selon  $\vec{u}_z$  par  $P_x$  et  $P_y$  vont se superposer pour générer des polarisations circulaires.

voir schéma de l'énoncé.