

ÉLECTROMAGNÉTISME 3 :

Émettre une onde électromagnétiques

Rayonnement dipolaire électrique

École Centrale Pékin

2020-2021

Table des matières

1 Émission d'une onde électromagnétisme : relier les sources et les champs	2
1.1 Équation de propagation des champs	2
1.2 Équation de propagation des potentiels	3
1.3 Solutions en potentiels retardés	4
2 Le rayonnement dipolaire électrique	4
2.1 Description du modèle	4
2.2 Potentiels vecteur et scalaire dans la zone de rayonnement	6
2.3 Champ électromagnétique dans la zone de rayonnement	8
2.4 Puissance rayonnée	12
3 Une application : la diffusion RAYLEIGH	15
3.1 Observations expérimentales	15
3.2 Modèle de l'électron élastiquement lié	15
3.3 Polarisation par diffusion	19

Jusqu'à présent, nous avons étudié la propagation d'ondes électromagnétiques sans les relier aux charges et courants qui les génèrent. Ce problème est difficile : nous nous limiterons à en donner la solution dans le cas le plus simple, celui du **dipôle oscillant**, et d'en dégager le contenu physique.

Ce chapitre nous permettra, en exercice, d'étudier le **rayonnement d'une antenne simple** et également comment la **matière** (l'atmosphère par exemple) **interagit avec les ondes électromagnétiques** en les absorbant et les réémettant : nous expliquerons ainsi pourquoi le ciel est bleu et le soleil couchant rouge.

1 Émission d'une onde électromagnétique : relier les sources et les champs

Soit une distribution de charge et de courant $\{\rho(P, t); \vec{j}(P, t)\}$ connue. Comment obtenir le champs électromagnétique engendré par ces sources ?

1.1 Équation de propagation des champs

En présence des sources $\{\rho(P, t); \vec{j}(P, t)\}$, les équations de propagation des champs sont :

$$\begin{aligned} \vec{\Delta} \vec{E}(M, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}(M, t) &= \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t}(M, t) + \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{\rho(M, t)}{\epsilon_0} \right) \\ \vec{\Delta} \vec{B}(M, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}(M, t) &= -\mu_0 \overrightarrow{\text{rot}} \vec{j}(M, t) \end{aligned}$$

Contrairement au vide, la résolution de ces équations est difficile. **Nous ne résoudrons pas le problème de cette façon : passons par les potentiels scalaire et vecteur comme intermédiaires de calculs.**

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}} (M.F.) \rightarrow \overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) &= \overrightarrow{\text{rot}} \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) \\ -\Delta \vec{E} + \overrightarrow{\text{grad}} (\text{div} \vec{E}) &= -\frac{\partial}{\partial t} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}) \\ -\Delta \vec{E} + \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{\rho}{\epsilon_0} \right) &= -\mu_0 \frac{\partial (\vec{j})}{\partial t} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \\ \Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} &= \mu_0 \frac{\partial \vec{j}}{\partial t} + \overrightarrow{\text{grad}} \left(\frac{\rho}{\epsilon_0} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{rot}} (M.A.) \rightarrow \overrightarrow{\text{rot}} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{B}) &= \mu_0 \overrightarrow{\text{rot}} \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} (\overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}) \\ \Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} &= -\mu_0 \overrightarrow{\text{rot}} \vec{j} \end{aligned}$$

1.2 Équation de propagation des potentiels

Nous avons montré qu'il existait un **potentiel vecteur** $\vec{A}(M, t)$ et un **potentiel scalaire** $V(M, t)$ tels que :

$$\begin{aligned}\vec{B}(M, t) &= \text{rot} \vec{A}(M, t) \\ \vec{E}(M, t) &= -\text{grad} V(M, t) - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}(M, t)\end{aligned}$$

En remplaçant ces expressions dans les équations de Maxwell, nous avons aussi montré que \vec{A} et V vérifient les équations suivantes :

$$\begin{aligned}\Delta \vec{A}(M, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}(M, t) &= -\mu_0 \vec{j}(M, t) + \text{grad} \left[\text{div} \vec{A}(M, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t}(M, t) \right] \\ \Delta V(M, t) &= -\frac{\rho(M, t)}{\epsilon_0} + \frac{\partial (\text{div} \vec{A}(M, t))}{\partial t}\end{aligned}$$

Le couple de potentiels $\{V(M, t); \vec{A}(M, t)\}$ n'est pas unique pour un même champ électromagnétique. On peut donc choisir librement une **condition de jauge**. Ici la **jauge de Lorentz** semble toute indiquée :

$$\text{div} \vec{A}(M, t) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t}(M, t) = 0$$

Les équations vérifiées par \vec{A} et V deviennent alors :

$$\begin{aligned}\Delta \vec{A}(M, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}(M, t) &= -\mu_0 \vec{j}(M, t) \\ \Delta V(M, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}(M, t) &= -\frac{\rho(M, t)}{\epsilon_0}\end{aligned}$$

M.A. $\left. \begin{cases} \vec{B} = \text{rot} \vec{A} \\ \vec{E} = -\text{grad} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{cases} \right\} \rightarrow \text{rot}(\text{rot} \vec{A}) = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(-\text{grad} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)$

$$-\Delta \vec{A} + \text{grad}(\text{div} \vec{A}) = \mu_0 \vec{j} - \mu_0 \epsilon_0 \text{grad} \left(\frac{\partial V}{\partial t} \right) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2}$$

$$\Delta \vec{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0 \vec{j} + \text{grad} \left(\text{div} \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} \right)$$

M.G. $\text{div} \left(-\text{grad} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

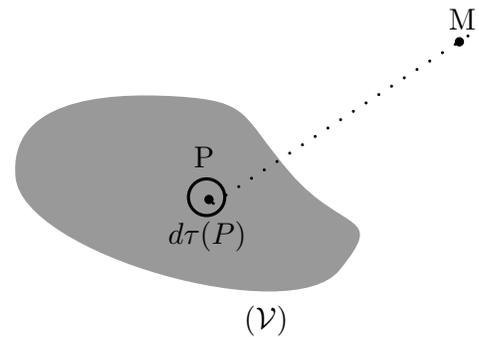
$$-\Delta V - \frac{\partial \text{div} \vec{A}}{\partial t} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\Delta V - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

0
jauge de Lorentz

1.3 Solutions en potentiels retardés

On considère que des sources contenues dans un volume (\mathcal{V}) fini de l'espace. Soit un petit volume $d\tau(P)$ centré sur le point P appartenant au volume (\mathcal{V}). Un observateur est situé au point M hors du volume (\mathcal{V}).



Les densité de charge et de courant varie dans le temps dans le volume $d\tau(P)$. **L'observateur en M sera informé des modifications des charges et courants en P avec un retard de $\frac{PM}{c}$ qui correspond au temps de propagation d'un signal électromagnétique se propageant à la célérité c de P vers M.**

On démontre que les solutions des équations de propagation des potentiels sont les suivantes, nommées «potentiels retardés»

$$V(M, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{P \in (\mathcal{V})} \frac{\rho(t - \frac{PM}{c})}{PM} d\tau(P) \quad \vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{P \in (\mathcal{V})} \frac{\vec{j}(t - \frac{PM}{c})}{PM} d\tau(P)$$

Ces **potentiels retardés** permettent de calculer les potentiels. À partir de ces derniers, on pourra en déduire les expressions des champs $\vec{E}(M, t)$ et $\vec{B}(M, t)$.

2 Le rayonnement dipolaire électrique

Pour calculer les potentiels retardés, plaçons nous dans le cas le plus simple de charge et courant qui varient dans le temps : celui d'un dipôle électrique oscillant.

2.1 Description du modèle

2.1.1 Le dipôle oscillant

• **Rappels sur le dipôle électrostatique :**

En électrostatique, le **dipôle électrostatique** est défini comme un ensemble neutre de charges $\{M_i(q_i)\}$ pour lequel le barycentre N des charges négatives ne coïncide pas avec le barycentre P des charges positives. On note a la distance entre les barycentres.

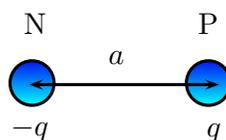
La caractérisation quantitative du dipôle est son **moment dipolaire** \vec{p} qui peut être défini par :

$$\vec{p} \triangleq \sum_i q_i \overrightarrow{OM_i}$$

Si q désigne la somme des charges positives de cette distribution alors :

$$\vec{p} = \sum_i q_i \overrightarrow{OM_i} = \sum_{q_i < 0} q_i \overrightarrow{OM_i} + \sum_{q_i > 0} q_i \overrightarrow{OM_i} = -q \overrightarrow{ON} + q \overrightarrow{OP} = q \overrightarrow{NP}$$

Ainsi le dipôle électrostatique peut être modélisé par deux charges opposées $+q$ et $-q$ situées en N et P distants de a .



• **Définition du dipôle électrique rayonnant :**

Définition : Le **dipôle électrique rayonnant** est un dipôle électrique donc le moment dipolaire varie en fonction du temps. Ce dipôle est à l'origine d'une onde électromagnétique.

On restreint l'étude au cas où l'on peut définir l'axe ($z'z$) avec $\vec{p}(t) = p(t)\vec{u}_z$

La **variation de $p(t)$** peut être réalisée lorsque :

- $q(t)$ **est variable** : les deux charges restent à distance constante mais leurs valeurs évoluent : il existe alors un courant i avec $i(t) = \frac{dq}{dt}$ (avec l'orientation adoptée sur la figure 1).
- $\|\vec{NP}(t)\|$ **est variable** : les charges restent constantes mais sont en mouvement : il existe aussi un courant i .

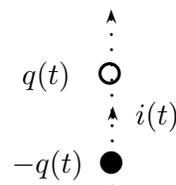


FIGURE 1

Pour plus de simplicité, on considère une seule source de variation et non les deux en même temps.

• **Définition du dipôle électrique oscillant :**

Définition : Le **dipôle électrique oscillant** est le cas particulier du dipôle électrique rayonnant pour lequel le moment dipolaire s'écrit :

$$\vec{p}(t) = p_0 \cos(\omega t)\vec{u}_z$$

En pratique on s'intéresse essentiellement au dipôle électrique oscillant car **l'analyse de Fourier** nous indique qu'il est possible d'étudier n'importe quel dipôle électrique rayonnant comme une superposition de dipôle électrique oscillant.

• **Approximations liées à l'étude des dipôles rayonnants :**

Soit un dipôle rayonnant de longueur caractéristique a .

On considère une variation périodique de période T de la grandeur $p(t)$. Par linéarité des équations de Maxwell le champ électromagnétique généré par ce dipôle rayonnant aura une période T et une longueur d'onde $\lambda = c'T$ avec c' la vitesse de la lumière dans le milieu considéré. (c dans le vide)

L'observateur se place au point M situé à la distance $r = OM$ du dipôle.

Approximations 1

- **approximation dipolaire** : $r \gg a$
- **mouvement non relativiste des charges** : $\lambda \gg a$

temps de variation du dipôle est grande devant le temps pour lequel la lumière traverse le dipôle : $T \gg \frac{a}{c'}$ $\Leftrightarrow c'T \gg a$
 $\Leftrightarrow \lambda \gg a$

2.1.2 Les différentes zones d'étude

Dans l'étude du champ rayonné par un dipôle rayonnant, on peut mettre en évidence plusieurs échelles de longueurs définies par rapport à λ :

- la **zone statique** ($r \ll \lambda$) où on ne tient pas compte de la durée de propagation de l'information ;
- la **zone intermédiaire** ($r \approx \lambda$) ;
- la **zone de rayonnement** ($r \gg \lambda$) : c'est dans le cadre de notre étude.

Approximation 2

L'expression du champ électromagnétique créé par le dipôle oscillant sera donnée dans la **zone de rayonnement** définie par $r \gg \lambda$.

2.1.3 Exemples

Dans les cas suivant, peut-on faire les approximations nécessaires pour décrire ce rayonnement par un dipôle rayonnant ?

B.G.

- Une onde lumineuse visible est émise par un atome d'une lampe spectrale.

$$\lambda \sim 600 \text{ nm} \quad a \approx 10^{-10} \text{ m}$$

$$\lambda \gg a \quad r \gg \lambda \quad \text{si } r > 10^{-5} \text{ m}$$

- Une antenne émet des ondes radio.

$$a \sim 10 \text{ m} \quad f = 100 \text{ MHz} \quad \lambda = \frac{c}{f} = 3 \text{ m}$$

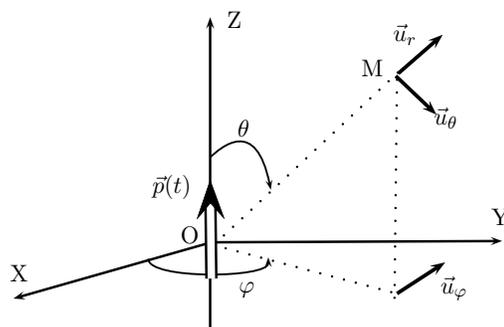
$$\lambda \gg a$$

2.2 Potentiels vecteur et scalaire dans la zone de rayonnement

Soit un dipôle rayonnant centré en O de taille caractéristique a . On observe la dipôle depuis un point M situé en $r = OM$. On considère que $\vec{p}(t) = p(t)\vec{u}_z$.

On se place dans le cadre des approximations :

$$a \ll \lambda \ll r$$



Expressions des potentiels retardés :

Les potentiels vecteurs et scalaire donnés par le dipôle rayonnant dans le cadre des approximations $a \ll \lambda \ll r$ sont :

$$\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \dot{\vec{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right)$$

$$V(M, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{\vec{p} \left(t - \frac{r}{c} \right)}{r^2} + \frac{\dot{\vec{p}} \left(t - \frac{r}{c} \right)}{rc} \right) \cdot \vec{u}_r$$

• Détermination du potentiel vecteur \vec{A} : • Détermination du potentiel scalaire V :

Potentiel retardé:
$$\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_{PEV} \frac{\vec{j}(t - \frac{PM}{c})}{PM} dZ$$

$r \gg a \rightarrow PM \sim r$

$$\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \iiint_V \vec{j}(t - \frac{r}{c}) dZ$$

or $\iiint_V \vec{j}(\vec{r}') d\vec{r}' = \sum_V q_i \vec{v}_i = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \vec{j} = \rho \vec{v}$

finalement
$$\vec{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \frac{d\vec{p}(t - \frac{r}{c})}{dt} \quad // \vec{u}_z$$

Potentiel V : jauge de Lorentz $\text{div } \vec{A} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t} = 0$

$$\rightarrow \frac{\partial V}{\partial t} = -c^2 \text{div } \vec{A} = -c^2 \text{div} (A \vec{u}_z)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = -c^2 \left(\text{grad } A \cdot \vec{u}_z + A \text{div } \vec{u}_z \right)$$

$$= -c^2 \frac{\partial A}{\partial r} \vec{u}_r \cdot \vec{u}_z \quad (\text{pas de dépendance en } \theta \text{ ou } \varphi)$$

$$= -c^2 \frac{\mu_0 \cos \theta}{4\pi} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \dot{p}(t - \frac{r}{c}) \right)$$

$$= -\frac{\cos \theta}{4\pi \epsilon_0} \left(-\frac{1}{r^2} \dot{p}(t - \frac{r}{c}) + \frac{1}{r} \times \frac{-1}{c} \ddot{p}(t - \frac{r}{c}) \right)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\cos \theta}{4\pi \epsilon_0 r} \left(\frac{1}{r} p(t - \frac{r}{c}) + \frac{1}{c} \dot{p}(t - \frac{r}{c}) \right) \right]$$

$$V(M, t) = \frac{\cos \theta}{4\pi \epsilon_0 r} \left(\frac{1}{r} p(t - \frac{r}{c}) + \frac{1}{c} \dot{p}(t - \frac{r}{c}) \right)$$

2.3 Champ électromagnétique dans la zone de rayonnement

2.3.1 Expression du champ électromagnétique rayonné dans la zone de rayonnement

Expressions du champ électromagnétiques :

Le champ électromagnétique rayonné par le dipôle rayonnant dans le cadre des approximations envisagées ($a \ll \lambda \ll r$) est :

$$\vec{E}(M, t) = \frac{\mu_0 \sin \theta}{4\pi r} \ddot{p} \left(t - \frac{r}{c} \right) \vec{u}_\theta$$

$$\vec{B}(M, t) = \frac{\mu_0 \sin \theta}{4\pi r c} \ddot{p} \left(t - \frac{r}{c} \right) \vec{u}_\phi$$

Remarque : On constate que

$$\vec{B}(M, t) = \frac{\vec{u}_r \wedge \vec{E}(M, t)}{c}$$

Dans la zone de rayonnement, le champ électromagnétique a **localement** une structure d'onde plane se propageant dans la direction \vec{u}_r à la vitesse c .

⚠ Cette expression ne signifie pas que l'onde est plane ! Elle rappelle simplement que localement la relation de structure établie dans le cadre des ondes planes progressives se propageant dans la direction \vec{u}_r est valable !

Les démonstrations qui suivent sont hors-examen.

• Détermination du champ \vec{B} :

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} (A_\phi \sin \theta) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right) \\ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial A_r}{\sin \theta} - \frac{\partial (r A_\phi)}{\partial r} \right) \\ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial (r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \end{pmatrix}$$

avec $\vec{A} \parallel \vec{u}_z$

$$A_r = A \vec{u}_z \cdot \vec{u}_r = A \cos \theta$$

$$A_\theta = -\sin \theta A$$

$$A_\phi = 0$$

$$\vec{B} = \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} \left(-r \sin \theta \frac{\mu_0}{4\pi r} \dot{p} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right) - \frac{\partial \cos \theta}{\partial \theta} \frac{\mu_0}{4\pi r} \dot{p} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right) \right] \vec{u}_\phi$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 \sin \theta}{4\pi r} \left[\frac{1}{c} \ddot{p} \left(t - \frac{r}{c} \right) + \frac{1}{r} \dot{p} \left(t - \frac{r}{c} \right) \right] \vec{u}_\phi$$

$\propto 1/r$

$\propto 1/r^2$

rayonné à grande distance

quasi-statique

• Détermination du champ \vec{E} :

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}} V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad \text{ou} \quad \vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (\text{M. A.})$$

$$\vec{\text{rot}} \vec{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (B \sin \theta) - 0 \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r B) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r \sin \theta} \times \frac{\mu_0}{4\pi r} \cos \theta \left(\frac{1}{c} \ddot{p}(t-r/c) + \frac{1}{r} \dot{p}(t-r/c) \right) \\ -\frac{\mu_0 \sin \theta}{4\pi r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{c} \ddot{p}(t-r/c) + \frac{1}{r} \dot{p}(t-r/c) \right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \begin{pmatrix} \frac{\mu_0}{4\pi r^2 \tan \theta} \left(\frac{1}{c} \ddot{p}(t-r/c) + \frac{1}{r} \dot{p}(t-r/c) \right) \\ -\frac{\mu_0 \sin \theta}{4\pi r} \left(-\frac{1}{c^2} \dddot{p}(t-r/c) - \frac{1}{r^2} \ddot{p}(t-r/c) - \frac{1}{rc} \dot{p}(t-r/c) \right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{E} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4\pi \epsilon_0 r^2 \tan \theta} \left(\frac{1}{c} \dot{p}(t-r/c) + \frac{1}{r} p(t-r/c) \right) \\ \frac{\sin \theta}{4\pi \epsilon_0 r} \left(\frac{1}{c^2} \ddot{p}(t-r/c) + \frac{1}{r^2} \dot{p}(t-r/c) - \frac{1}{rc} p(t-r/c) \right) \\ 0 \end{pmatrix}$$

\mathcal{L}^{1/r^2}
 \mathcal{L}^{1/r^3}

$\mathcal{L}^{1/r}$
 \mathcal{L}^{1/r^3}
 \mathcal{L}^{1/r^2}

Dans la zone de rayonnement: $\vec{E} = \frac{\sin \theta}{4\pi \epsilon_0 r c^2} \ddot{p}(t-r/c) \vec{u}_\theta$

2.3.2 Tous les commentaires qu'il faut absolument savoir faire

1. Directions des champs :

Le plan (M, Oz) est plan de symétrie de la source du champ électromagnétique. Le champ $\vec{B}(M, t)$ est donc orthogonal à ce plan et est donc dirigé selon \vec{u}_φ . Le champ $\vec{E}(M, t)$ appartient à ce plan : a priori il a une composante selon \vec{u}_r et une selon \vec{u}_θ mais dans la zone de rayonnement la composante selon \vec{u}_r est négligée.

2. Décroissance des champs en $\frac{1}{r}$

L'amplitude des champs décroît en $\frac{1}{r}$ (contrairement au cas statique où elle décroît en $\frac{1}{r^3}$). On dégagera la signification physique de cette décroissance au 2.4.2.

3. Anisotropie

L'amplitude du champ électromagnétique est proportionnelle à $\sin \theta$: le rayonnement dipolaire est donc nul sur l'axe du dipôle et maximum dans le plan équatorial.

4. Retard de propagation

La valeur du champ électromagnétique à l'instant t est liée à l'accélération des charges mesurée à la date $t - \frac{r}{c}$, ce qui est caractéristique d'une *onde progressive* se propageant dans la direction \vec{u}_r à la célérité c .

5. Charges accélérées

Le champ électromagnétique est lié à la dérivée seconde du moment dipolaire ainsi seuls les porteurs de charges accélérés peuvent rayonner une onde électromagnétique dans le cadre des approximations envisagées.

2.3.3 Cas particulier du dipôle oscillant

Dipôle oscillant : dans le cas du dipôle oscillant où $\vec{p}(t) = p_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$, l'expression du champ électromagnétique est (avec $k = \frac{\omega}{c}$) :

$$\vec{E}(M, t) = -\frac{\mu_0 \sin \theta}{4\pi r} \omega^2 p_0 \cos(\omega t - kr) \vec{u}_\theta$$

$$\vec{B}(M, t) = -\frac{\mu_0 \sin \theta}{4\pi r c} \omega^2 p_0 \cos(\omega t - kr) \vec{u}_\varphi$$

En effet : $p(t - r/c) = p_0 \cos(\omega(t - r/c)) = p_0 \cos(\omega t - kr)$

$$\dot{p}(t - r/c) = -\omega p_0 \sin(\omega t - kr)$$

$$\ddot{p}(t - r/c) = -\omega^2 p_0 \cos(\omega t - kr)$$

2.3.4 Carte de champ dans le cas du dipôle oscillant

Pour dessiner la carte du champ rayonné, revenons au dipôle électrostatique puis regardons comment les lignes de champs sont déformées lorsque le dipôle oscille.

• **Cas du dipôle électrostatique :**

Le champ électrique au point $M(r, \theta, \varphi)$ a deux composantes selon \vec{u}_r et \vec{u}_θ données par :

$$E_r(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p \cos(\theta)}{r^3}$$

$$E_\theta(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin(\theta)}{r^3}$$

On observe le champ dans le plan $\varphi = \text{constante}$. Les lignes de champs sont représentées sur la figure 2

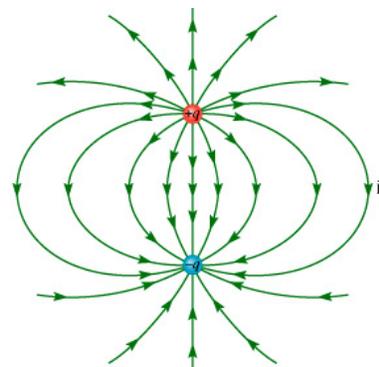
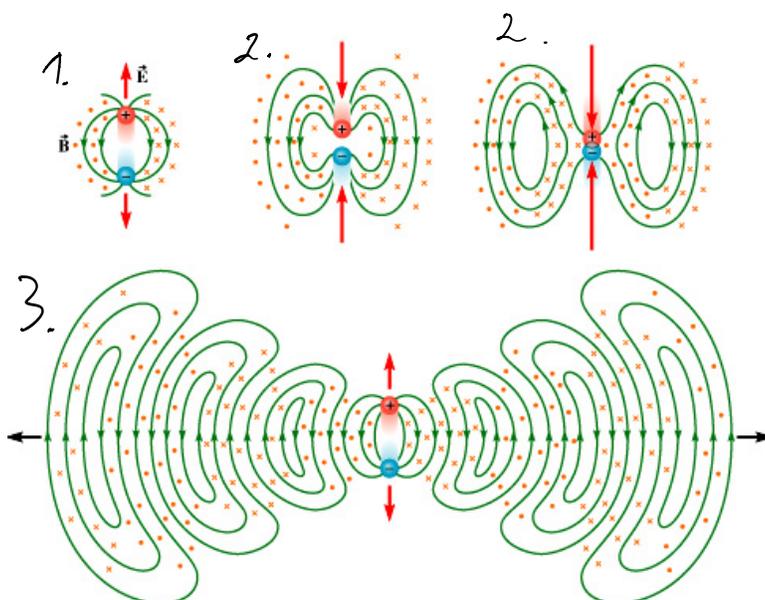


FIGURE 2

• **Cas du dipôle oscillant :**

Le dessin de la carte de champ se déroule en plusieurs étapes :

1. le dipôle crée un champ électromagnétique : les lignes de champ électrique partent de la charge $+q$ puis se terminent sur la charge $-q$
2. les charges se rapprochent : les lignes de champs se resserrent, puis se ferment car elles ne peuvent pas se croiser. *Dans le vide $\text{div} \vec{E} = 0$*
3. après plusieurs périodes d'oscillation du dipôle, on voit que le rayonnement est orthogonal à la direction de propagation



La carte du champ rayonné est représentée sur la figure 3 pour le champ électrique dans un plan $\varphi = \text{constante}$. En trois dimension, on fait tourner cette figure autour de l'axe (Oz) .

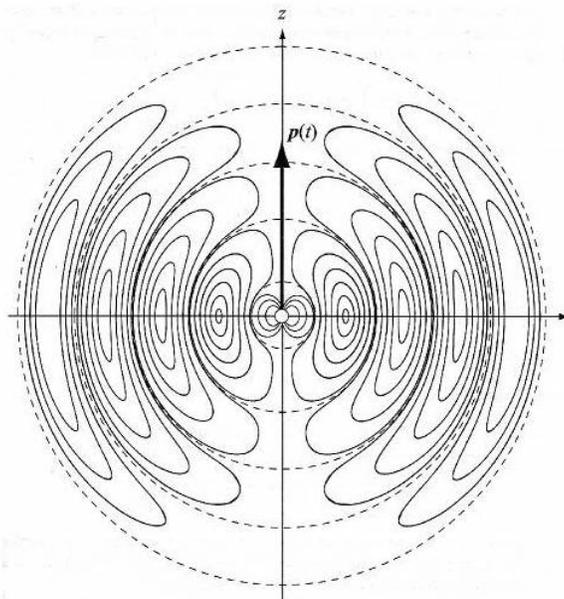


FIGURE 3 – Carte du champ électrique rayonné par le dipôle oscillant

2.4 Puissance rayonnée

2.4.1 Calcul du vecteur de Poynting

Pour un dipôle rayonnant dans le cadre de l'approximation $a \ll \lambda \ll r$, le vecteur de POYNTING a pour expression :

$$\vec{\Pi} = \frac{\mu_0}{16\pi^2} \frac{\sin^2 \theta}{r^2 c} \ddot{p}^2 \left(t - \frac{r}{c}\right) \vec{u}_r$$

Preuve :
$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \frac{\mu_0 \sin^2 \theta}{\cancel{\mu_0} (4\pi r)^2 c} \ddot{p} \left(t - \frac{r}{c}\right)^2 \underbrace{\vec{u}_\theta \wedge \vec{u}_\varphi}_{\vec{u}_r}$$

On remarque que le rayonnement d'un dipôle électrique rayonnant est anisotrope : la puissance surfacique rayonnée est **nulle dans la direction du dipôle** et **maximale dans le plan équatorial**.

2.4.2 Puissance rayonnée

• **Puissance rayonnée par unité de surface :**

La puissance rayonnée à travers une surface élémentaire dS s'écrit : $dP = \vec{\Pi} \cdot d\vec{S}$. On a alors la puissance rayonnée par unité de surface :

$$\frac{dP}{dS} = \frac{\mu_0}{16\pi^2} \frac{\sin^2 \theta}{r^2 c} \ddot{p}^2 \left(t - \frac{r}{c}\right)$$

On peut également définir la puissance rayonnée par unité d'angle solide $d\Omega = \sin(\theta)d\theta d\varphi$:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\mu_0}{16\pi^2} \frac{\sin^2 \theta}{c} \ddot{p}^2 \left(t - \frac{r}{c}\right)$$

$$R_g: dS = r^2 d\Omega$$

Remarque : Ce résultat est remarquable car il ne dépend pas de la distance r ! La dépendance en $\frac{1}{r}$ des champs au lieu du $\frac{1}{r^2}$ en statique nous permet de détecter des signaux à grande distance.

$$\frac{1}{r^3}$$

• **Diagramme de rayonnement :**

La puissance rayonnée par unité de surface fait apparaître, par l'intermédiaire de $\sin^2 \theta$, que le rayonnement n'est pas isotrope c'est-à-dire que toutes les directions de l'espace ne reçoivent pas la même puissance surfacique. On peut visualiser la répartition de la puissance rayonnée suivant une direction en introduisant un **diagramme de rayonnement**.

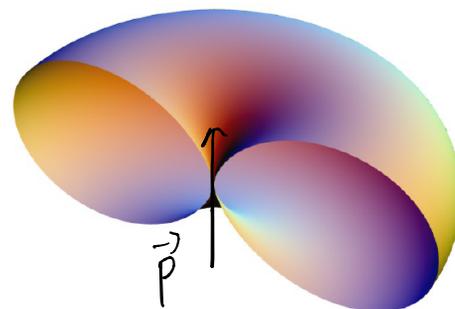


FIGURE 4 – Diagramme de rayonnement du dipôle oscillant

On définit pour cela le vecteur \vec{R} dans une direction (θ, φ) donnée, de longueur proportionnelle à $\frac{dP}{d\Omega}$. L'ensemble des extrémités de ce vecteur dessine une surface appelée **diagramme de rayonnement** avec une symétrie de révolution autour de l'axe Oz représenté sur la figure 4.

Remarque : la puissance est préférentiellement rayonnée dans la direction orthogonal à Oz (là où le vecteur \vec{R} est maximum). Il n'y a pas de puissance rayonnée dans la direction de \vec{p} .

• **Puissance rayonnée à travers une sphère :**

Puissance totale rayonnée : La moyenne temporelle de la puissance rayonnée par le dipôle rayonnant à travers une sphère centrée sur le dipôle est donnée par :

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{\mu_0}{6\pi c} \langle \ddot{p}^2 \rangle$$

Remarque : L'indépendance de $\langle \mathcal{P} \rangle$ avec le rayon de la sphère montre qu'il y a **absence d'absorption** et qu'il y a **dilution géométrique** de l'énergie électromagnétique.

Preuve :
$$\mathcal{P} = \iint \frac{d\mathcal{P}}{d\Omega} d\Omega = \frac{\mu_0}{4\pi c^3} \ddot{p}(t-r/c)^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta$$

avec
$$\int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \int_0^\pi \left(\frac{-\sin 3\theta}{4} + \frac{3}{4} \sin \theta \right) d\theta$$

$$= \frac{1}{4} \left[\frac{\cos 3\theta}{3} \right]_0^\pi + \frac{3}{4} \left[-\cos \theta \right]_0^\pi$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{-1-1}{3} \right) + \frac{3}{4} (1+1) = -\frac{1}{6} + \frac{3}{2} = \frac{8}{6} = \frac{4}{3}$$

$$\mathcal{P} = \frac{\mu_0}{6\pi c} \ddot{p}(t-r/c)^2 \quad \text{donc} \quad \langle \mathcal{P} \rangle = \frac{\mu_0}{6\pi c} \langle \ddot{p}(t-r/c)^2 \rangle$$

Cas du dipôle oscillant : dans le cas particulier du dipôle oscillant, la puissance moyenne rayonnée à travers une sphère centrée sur le dipôle est :

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{12\pi c}$$

Remarque : la puissance moyenne rayonnée par le dipôle oscillant à travers la sphère est proportionnelle à ω^4 : la puissance est plus importante pour des fréquences élevées.

$$\ddot{p}(t - r/c)^2 = (\omega^2 p_0 \cos(\omega t - kr))^2$$

$$\langle \ddot{p}(t - r/c)^2 \rangle = \frac{\omega^4 p_0^2}{2}$$

$$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{12\pi c} \propto \frac{1}{r^4}$$

• **Généralisation** : (hors programme)

On applique le résultat précédent à une particule de charge q en mouvement non relativiste au voisinage de O avec $p = qz$ et $\ddot{p} = q\ddot{z}$. On note $\ddot{z} = \alpha$ l'accélération de la particule. La puissance rayonnée devient alors :

$$\mathcal{P} = \frac{\mu_0}{6\pi c} \alpha^2$$

appelée **formule de LARMOR**. Ainsi, toute particule chargée accélérée rayonne.

À partir de ce constat, on peut expliquer plusieurs phénomènes, en particulier le **rayonnement de freinage** appelé **rayonnement bremsstrahlung** : une particule accélérée rayonne, donc perd de l'énergie cinétique et donc va ralentir.

Cette propriété est exploitée dans les accélérateurs de particules. La figure 5 présente le schéma de principe du synchrotron : lorsqu'une particule chargée subissant une accélération atteint une énergie dite relativiste, elle émet un rayonnement appelé, **rayonnement synchrotron**. Comme les particules sont relativistes, il faut changer les équations, mais le principe reste le même : elles rayonnent. Des électrons sont accélérés dans l'anneau de stockage central. Le rayonnement est canalisé vers des sorties dites « lignes de lumière » (voir figure 6). L'émission synchrotron se produit de l'infrarouge (10^{-5} m) aux rayons X durs ($2,5 \times 10^{-11}$ m). Chaque utilisateur peut sélectionner la longueur d'onde adaptée à l'expérience qu'il réalise.

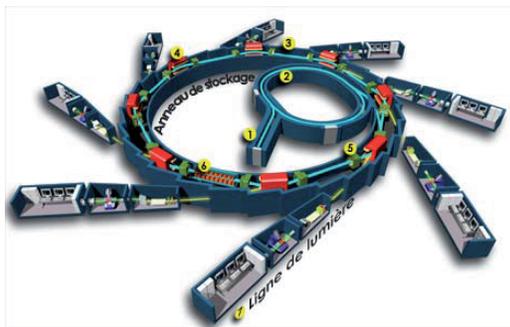


FIGURE 5 – Schéma synthétique du synchrotron SOLEIL

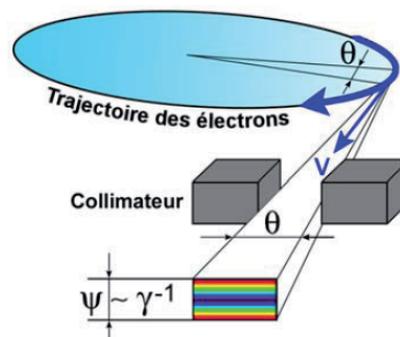


FIGURE 6 – Émission d'une onde électromagnétique

3 Une application : la diffusion RAYLEIGH

3.1 Observations expérimentales

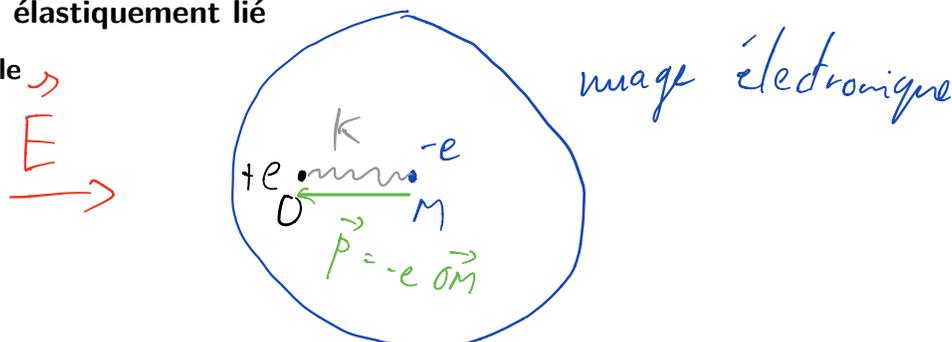
La lumière émise par le Soleil est **non polarisée** et **dominée par le jaune**. Mais sur Terre, la lumière du ciel est **dominée par le bleu** et **partiellement polarisée**.

Pour rendre compte de ces observations, il faut modéliser le comportement des molécules de l'atmosphère : le **champ électrique du rayonnement émis par le Soleil excite les molécules** de l'atmosphère qui se mettent à osciller et se comportent alors comme des **dipôles électriques oscillants**. Ces dipôles induits **rayonnent** à leur tour des ondes électromagnétiques **dans toutes les directions** et non pas seulement dans la direction de la lumière émise par le Soleil. On dit que la lumière du Soleil est **diffusée**.

Pour étudier quantitativement la diffusion de la lumière du Soleil par le ciel, il faut adopter un modèle décrivant l'excitation des molécules de l'atmosphère ainsi que leur réponse : c'est le **modèle de l'électron élastiquement lié**. À l'aide de ce modèle, nous pourrions rendre compte de la couleur bleue du ciel et de la polarisation partielle de la lumière diffusée.

3.2 Modèle de l'électron élastiquement lié

3.2.1 Description du modèle



1. L'onde excitatrice interagit avec les charges des atomes ou des molécules. Les noyaux étant beaucoup plus lourds que les électrons, nous les supposons immobiles et **nous ne considérerons que le mouvement du barycentre M du nuage électronique**.
2. Les électrons sont traités indépendamment les uns des autres, c'est-à-dire que l'on **néglige toute interaction entre électrons**.
3. Le barycentre M du nuage électronique est soumis à :

- une **force de rappel élastique** (de constante de raideur K) qui modélise son **interaction avec le noyau** situé en O

$$\vec{F} = -\underbrace{m\omega_0^2}_K \vec{OM} = -m\omega_0^2 \vec{r}$$

— une **force de frottement** avec un coefficient de frottement Γ

$$\vec{F}_f = -m\Gamma \left. \frac{d\vec{OM}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = -m\Gamma \left. \frac{d\vec{r}}{dt} \right|_{\mathcal{R}}$$

dans le référentiel \mathcal{R} lié à l'atome ou à la molécule considéré galiléen. Cette force modélise toutes les causes d'**amortissement** (interaction avec le milieu ambiant, énergie rayonnée par le dipôle oscillant induit sous l'action du champ exciteur).

En ordre de grandeur : $\omega_0 \sim 10^{16} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\Gamma \sim 10^8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ (ainsi $\Gamma \ll \omega_0$). Le paramètre m désigne la masse du nuage électronique.

4. Le barycentre du nuage électronique **subit le champ électromagnétique** $\{\vec{E}_S(M, t); \vec{B}_S(M, t)\}$ **rayonné par le Soleil** qu'on considère comme une somme d'O.P.P.H. polarisées rectilignement de pulsation ω avec : $2.10^{15} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} < \omega < 4.10^{15} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ (spectre de la lumière visible).

— **La composante magnétique de la force de LORENTZ est négligeable.**

$$\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \quad \text{or} \quad B = \frac{E}{c}$$

donc $\frac{\|\vec{v} \wedge \vec{B}\|}{\|\vec{E}\|} \sim \frac{v}{c} \ll 1 \quad (\text{non-relativiste})$

— **Le champ électrique est considéré uniforme à l'échelle du déplacement du barycentre du nuage électronique.** On écrira donc $\vec{E}_S(M, t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t)$. $\approx 1 \text{ \AA}$

En effet, le barycentre M du nuage électronique se déplace sur une distance caractéristique $a = 0,1 \text{ nm}$ et la longueur d'onde moyenne dans le spectre visible est $\lambda_0 = 600 \text{ nm}$. Si on nomme S l'origine du Soleil, la composante électrique $\vec{E}_S(M, t)$ du champ électromagnétique émis par le Soleil s'écrit :

$$\vec{E}_S(M, t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{SM} + \varphi)$$

Si O désigne la position du noyau, comme $\vec{k} \cdot \vec{SM}(t) + \varphi = \underbrace{\vec{k} \cdot \vec{SO}}_{=\text{constante}} + \varphi + \vec{k} \cdot \vec{OM}(t)$ avec lorsque t varie :

$$\vec{k} \cdot \vec{OM}(t) \sim \frac{2\pi}{\lambda} a = \frac{2\pi}{600 \text{ nm}} \times 0,1 \text{ nm} = 1,0 \times 10^{-3}$$

Il vient :

$$\vec{E}_S(M(t), t) = \vec{E}_0 \cos \left(\omega t - \underbrace{\vec{k} \cdot \vec{SM} + \varphi}_{=\text{cte à l'échelle de l'atome}} \right)$$

Ainsi, on peut considérer que $\vec{E}_S(M, t)$ est **uniforme dans l'atome ou la molécule** c'est-à-dire à l'échelle du déplacement de l'électron. Pour ne pas alourdir les calculs, on choisira l'origine des temps telle que $-\vec{k} \cdot \vec{SM} + \varphi = 0$.

3.2.2 Moment dipolaire induit. Régime de Rayleigh.

Moment dipolaire induit : dans le cadre du "modèle de l'électron élastiquement lié" où le champ électrique local est noté $\vec{E}(M, t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t)$, le moment dipolaire induit s'écrit en notation complexe :

$$\underline{\vec{p}}(t) = \frac{e^2}{m \omega_0^2 - \omega^2 + i\Gamma\omega} \vec{E}_0 e^{i\omega t}$$

PFD au niveau électronique.

$$m \frac{d^2 \vec{OM}}{dt^2} = -m \omega_0^2 \vec{OM} - m \Gamma \frac{d\vec{OM}}{dt} - e \vec{E}_s \quad (*)$$

avec $\vec{p} = -e \vec{OM}$

Hypothèse de réponse harmonique: $\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i\omega t}$ $\vec{p} = \vec{p}_0 e^{i\omega t}$

$$(*) \rightarrow -\frac{m \omega^2}{-e} \vec{p} = -\frac{m \omega_0^2}{-e} \vec{p} - \frac{i\omega m \Gamma}{-e} \vec{p} - e \vec{E}_0 e^{i\omega t}$$

$$\vec{p} = \frac{e^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\Gamma\omega} \vec{E}_0 e^{i\omega t}$$

Régimes de fréquence : l'expression précédente est complexe mais la figure 7 révèle trois cas limites :

- le régime RAYLEIGH lorsque $\omega \ll \omega_0$;
- le régime de résonance lorsque $\omega \sim \omega_0$;
- le régime THOMSON lorsque $\omega \gg \omega_0$.

L'expression du moment dipolaire induit dans le régime de RAYLEIGH s'écrit en notation complexe :

$$\vec{p}(t) = \frac{e^2}{m \omega_0^2} \vec{E}_0 e^{i\omega t}$$

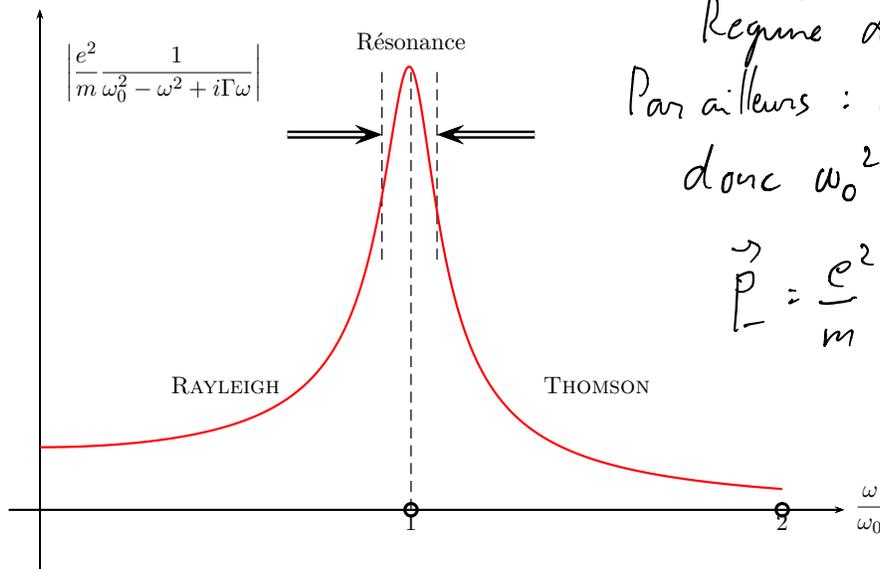


FIGURE 7 - Variations de $\left| \frac{e^2}{m \omega_0^2 - \omega^2 + i\Gamma\omega} \right|$

Régime de Rayleigh: $\omega \ll \omega_0$
Par ailleurs: $\Gamma \ll \omega_0$

donc $\omega_0^2 \gg \omega^2$ et $\omega_0^2 \gg \Gamma\omega$

$$\vec{p} = \frac{e^2}{m} \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\Gamma\omega} \vec{E}_0 e^{i\omega t}$$

$$\vec{p} = \frac{e^2}{m \omega_0^2} \vec{E}_0 \cos(\omega t)$$

dipôle oscillant

3.2.3 Puissance moyenne diffusée dans le régime de Rayleigh

Puissance moyenne diffusée dans le régime de RAYLEIGHT : Dans le régime de RAYLEIGH, la puissance moyenne rayonnée par le dipôle oscillant à travers une sphère est :

$$\langle P \rangle = \frac{\mu_0 e^4}{12\pi c m^2} E_0^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^4$$

Elle est proportionnelle à $\left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^4$ ou à $\left(\frac{\lambda_0}{\lambda} \right)^4$

Preuve :

Généralement $\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{M_0}{6\pi c} \langle \ddot{p}^2 \rangle$

or $\ddot{p}(t-r/c) = \frac{e^2}{m\omega_0^2} E_0 \cos \omega t$ donc $\langle \ddot{p}^2 \rangle = \left(\frac{e^2 \omega^2}{m\omega_0^2} \right)^2 \frac{E_0^2}{2}$

$\propto \omega^4 \propto \frac{1}{\lambda^4}$

3.2.4 Pourquoi, pourquoi ?

• Pourquoi le ciel est bleu ?

Le paragraphe 3.2.3 a révélé que la puissance moyenne rayonnée par un dipôle était proportionnelle à ω^4 . Ainsi, le rapport des puissances moyennes rayonnées à l'extrémité rouge du spectre visible $\lambda_{rouge} = 0,8 \mu\text{m}$ et à l'extrémité violette $\lambda_{violette} = 0,4 \mu\text{m}$ est :

$$\frac{\langle P_{violette} \rangle}{\langle P_{rouge} \rangle} = \left(\frac{\omega_{violette}}{\omega_{rouge}} \right)^4 = \left(\frac{\lambda_{rouge}}{\lambda_{violette}} \right)^4 = 16$$

La lumière blanche du soleil qui pénètre dans l'atmosphère est diffusée par les molécules de l'air. Celles-ci **rayonnent 16 fois plus dans le violet**, lorsqu'on regarde dans une direction différente de celle du soleil (cf. figure 8), il nous parvient essentiellement de la **lumière bleue**¹ : cf. figure 9. Sans ce phénomène, le ciel nous paraîtrait noir (c'est le cas sur la lune où il n'y a pas d'atmosphère).

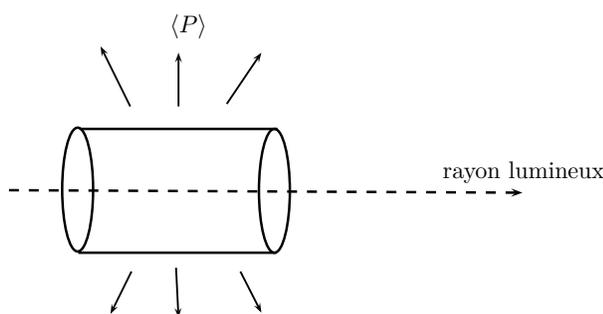


FIGURE 8 – Puissance diffusée

Le phénomène est identique la nuit mais la lumière diffusée par la lune n'est pas assez intense pour que le ciel de nuit, même à la pleine lune, nous apparaisse bleu.

• Pourquoi les couchers de soleil sont-ils rouges ?

En revanche, comme le **bleu est beaucoup plus diffusé que le rouge**, la lumière directe du soleil s'appauvrit **plus vite en bleu qu'en rouge**. Au moment du levant et du couchant, quand la

1. l'œil étant peu sensible au violet, c'est bien bleu et non violet que nous voyons le ciel

lumière du soleil **traverse une plus grande couche d'air** (l'incidence est voisine de 90°), l'effet est suffisamment fort pour que le soleil nous apparaisse rouge.

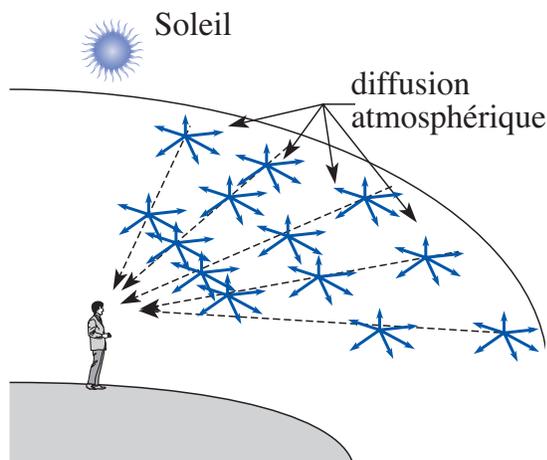


FIGURE 9 – Pourquoi le ciel est bleu

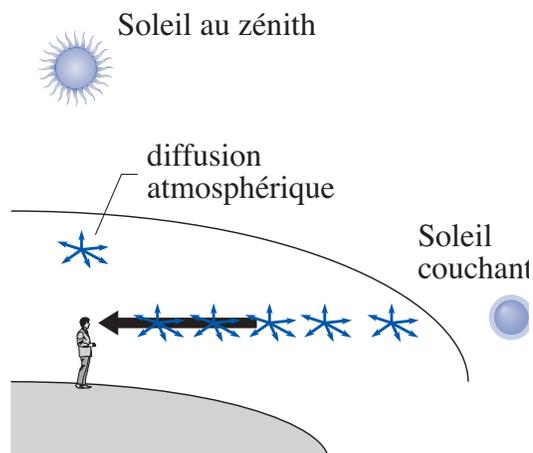


FIGURE 10 – Pourquoi le ciel est parfois rouge

3.3 Polarisation par diffusion

• **La lumière diffusée par l'atmosphère est partiellement polarisée** (on s'en rend compte sur la figure 11 où en tournant un polariseur le ciel s'assombrit, surtout si la direction d'observation est à 90° de celle du soleil). La diffusion RAYLEIGH permet d'interpréter cette propriété.



FIGURE 11 – Polarisation partielle de la lumière diffusée

• **La lumière émise par le soleil n'est pas polarisée.** Si la direction de propagation est Ox , le champ électrique $\vec{E}(M, t)$ peut se décomposer en deux O.P.P.H. :

- une O.P.P.H. \vec{E}_y polarisée rectilignement selon Oy qui induit des dipôles rayonnants $\vec{p}_y = p_y(t)\vec{u}_y$ qui rayonnent un maximum de puissance dans le plan xOz et rien selon la direction Oy .
- une O.P.P.H. \vec{E}_z polarisée rectilignement selon Oz qui induit des dipôles rayonnants $\vec{p}_z = p_z(t)\vec{u}_z$ qui rayonnent un maximum de puissance dans le plan xOy et rien selon Oz

Ainsi, un observateur situé sur l'axe Oy ne recevra aucun champ rayonné par le dipôle \vec{p}_y mais recevra le champ $E_z(M \in (Oy))\vec{u}_z$ rayonné par le dipôle \vec{p}_z : **sur l'axe Oy , le champ diffusé est polarisé rectilignement selon Oz**

De même, sur l'axe Oz , le champ diffusé est polarisé rectilignement selon Oy .

Un observateur situé dans le plan yOz , hors des axes Oy et Oz recevra un rayonnement diffusé, partiellement polarisé.

• La figure 12 présente la même situation : l'onde excitatrice $\vec{E}(M, t)$ vient du Soleil à gauche. Elle engendre une polarisation de la molécule situé au centre de la figure. On observe bien que pour la lumière diffusée dans une direction perpendiculaire à celle de la lumière incidente :

- dans une direction horizontale, seule une oscillation verticale peut produire un rayonnement : la lumière est donc polarisée verticalement.
- dans une direction verticale, seule une oscillation horizontale peut produire un rayonnement : la lumière est donc polarisée horizontalement.

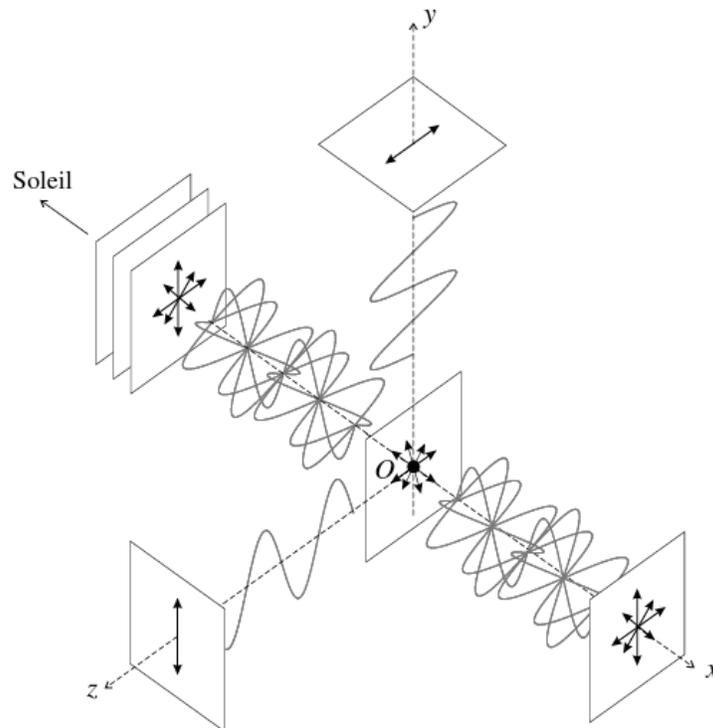


FIGURE 12 – Polarisation par diffusion

Polarisation de l'onde rayonnée :

La lumière **diffusée perpendiculairement** au faisceau incident primaire non polarisé est **complètement polarisée**.

Dans les **autres directions**, la lumière diffusée est dite **partiellement polarisée**.