

ÉLECTROMAGNÉTISME 4 :

Ondes électromagnétiques dans un milieu diélectrique

École Centrale Pékin

2020-2021

Table des matières

1 Milieu diélectrique et réponse à un champ électromagnétique	2
1.1 Qu'est ce qu'un milieu diélectrique ?	2
1.2 Polarisation d'un milieu	2
1.3 Susceptibilité électrique	6
2 Ondes électromagnétiques dans les milieux D.L.H.I.	12
2.1 Équations de MAXWELL dans un D.L.H.I.	12
2.2 Équation de propagation et relation de dispersion dans un D.L.H.I. parfait	14
2.3 Absorption et dispersion	15
2.4 Relation de structure	15
2.5 Champ électromagnétique et vecteur de Poynting	16
3 Application à l'optique	17
3.1 Indice optique	17
3.2 Loi de CAUCHY	18
3.3 Lois de SNELL-DESCARTES	19

Après avoir étudié les ondes électromagnétiques dans le vide (sans charge ni courant), continuons à étudier les ondes électromagnétiques dans les milieux. Nous avons déjà abordé la propagation d'ondes électromagnétiques dans les conducteurs mais cette fois, nous allons les étudier dans les milieux isolants : ce sont des milieux matériels appelés aussi **diélectriques**.

Comment décrire et caractériser un milieu diélectrique ? Comment le champ électromagnétique pénètre-t-il dans le milieu et quel est son effet dans ce milieu ?

1 Milieu diélectrique et réponse à un champ électromagnétique

1.1 Qu'est ce qu'un milieu diélectrique ?

Les milieux **diélectriques** ou **isolants** sont des milieux qui contiennent des charges qui ne peuvent se déplacer que sur des distances très faibles à l'échelle du milieu (de l'ordre de 0,1 nm, distance caractéristique de l'échelle moléculaire) : on parle de **charges liées** notées ρ_p . Contrairement aux milieux conducteurs, les milieux diélectriques ne laissent pas passer le courant électrique à l'échelle mésoscopique (échelle du matériau), d'où la dénomination de **milieux isolants**. Sous l'effet d'un champ électrique les charges liées se mettent en mouvement, engendrant des **courants liés** notés \vec{j}_p à plus petite échelle.

Il existe cependant des milieux matériels **partiellement isolants** ou **isolants réels** qui contiennent majoritairement des charges liées mais autorisent un peu le mouvement de charges libres. On a alors :

$$\rho = \rho_{\text{libre}} + \rho_p \quad \text{et} \quad \vec{j} = \vec{j}_{\text{libre}} + \vec{j}_p$$

Les milieux diélectriques sont par exemple le verre et le plastique. Ces milieux diélectrique peuvent être solides (céramique, plastique), liquide (pyralène ou certaines huiles minérales) ou encore gazeux (l'air, l'azote).

1.2 Polarisation d'un milieu

L'apparition de courants liés montre que les milieux diélectriques réagissent à l'application d'un champ électrique. Regardons plus précisément l'effet d'un champ électrique sur un milieu diélectrique.

1.2.1 Mécanisme de polarisation d'un milieu isolant

- **Mise en évidence expérimentale :**

Expérience : un condensateur plan est chargé puis maintenu isolé. La différence de potentiel entre ses plaques vaut U_{vide} , les plaques portant les charges opposées Q et $-Q$ (voir figure 1). On introduit alors une lame de verre entre les deux armatures : on constate que la différence de potentiel diminue (voir figure 2).

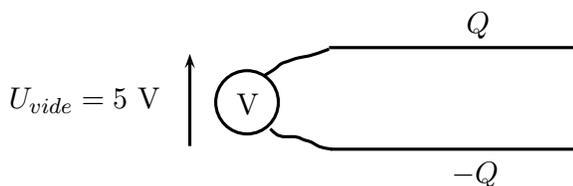


FIGURE 1 – Condensateur chargé et isolé

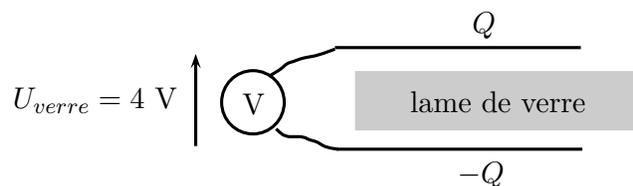


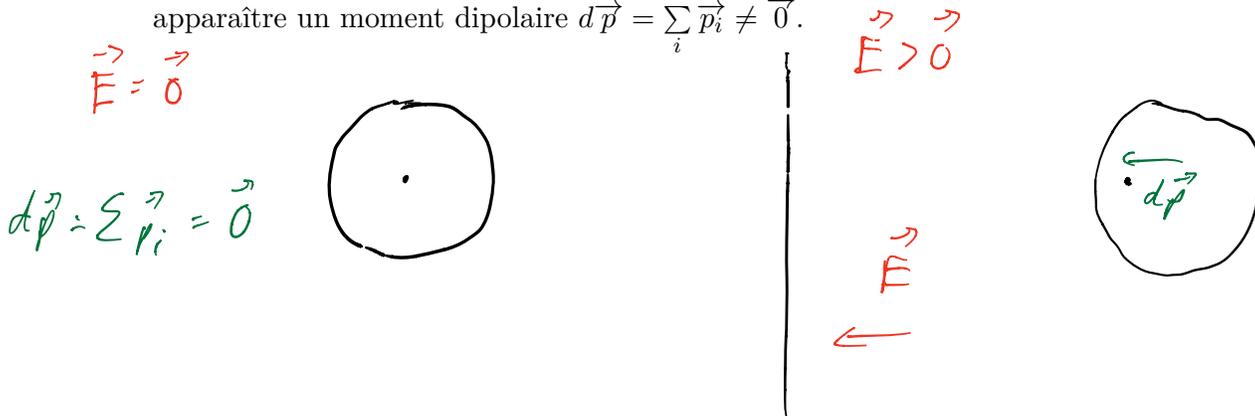
FIGURE 2 – Introduction d'une lame de verre

Interprétation : dans l'espace entre les armatures, il existe un champ électrique \vec{E} (proportionnel à la différence de potentiel U). Lorsqu'on introduit une lame de verre dans cet espace, la différence de potentiel diminue : tout se passe comme si un champ électrique \vec{E}_{induit} était induit dans le verre,

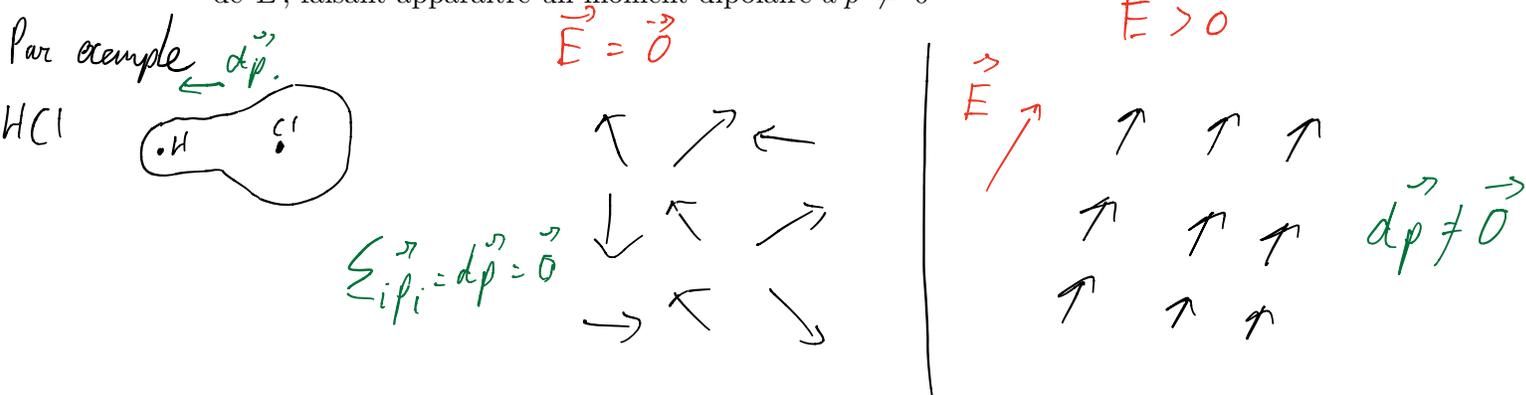
parallèles à \vec{E} mais dans le sens opposé : le champ induit s'oppose au champ initial. Le champ total résultant $\vec{E} + \vec{E}_{induit}$ possède alors une norme plus faible que celle de \vec{E} , c'est pourquoi $U_{verre} < U_{vide}$.

• **Point de vue microscopique** : un milieu diélectrique est initialement neutre. On applique ensuite un champ électrique extérieur et on regarde comment le milieu réagit à l'échelle microscopique.

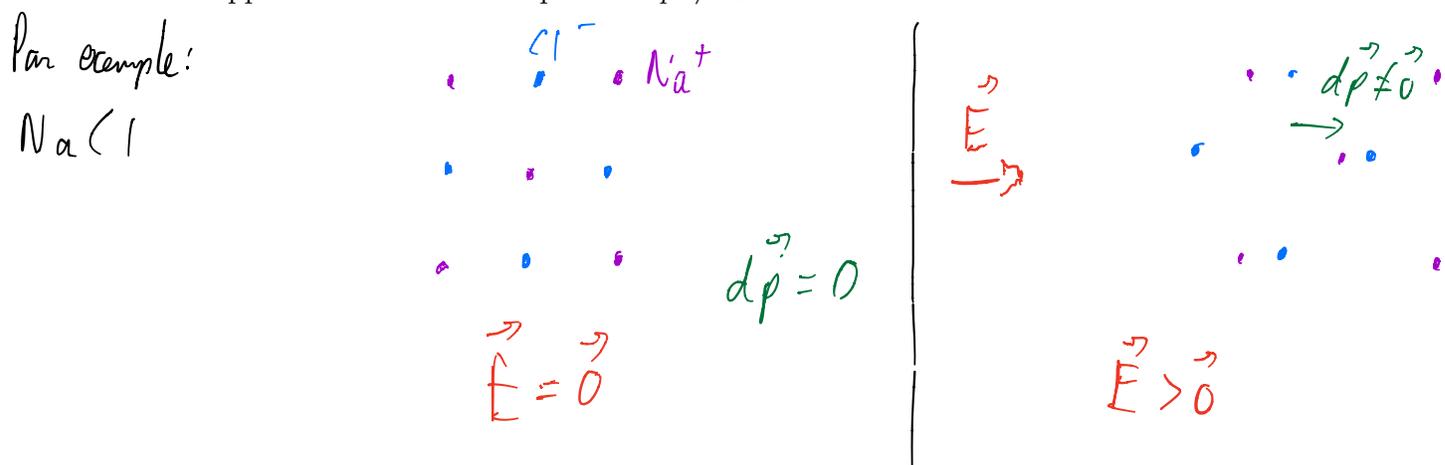
— Polarisation électronique ou atomique : le milieu est composé d'atomes ou de molécules où les barycentres des charges négatives (nuage électronique) et positives (noyau) sont initialement confondus. L'application d'un champ électrique déforme la répartition de charge : les barycentres des charges négatives et positives ne sont plus confondus, il y a alors apparition d'un dipôle électrique et donc d'un moment dipolaire microscopique \vec{p}_i . Dans un volume $d\tau$, on voit alors apparaître un moment dipolaire $d\vec{p} = \sum_i \vec{p}_i \neq \vec{0}$.



— Polarisation dipolaire ou d'orientation : Le milieu est composé de molécules possédant un moment dipolaire permanent \vec{p}_i (causé par la nature des atomes et la géométrie de la molécule). Sans champ électrique extérieur, ces moments dipolaires sont orientés aléatoirement et sur le volume $d\tau$ on a $d\vec{p} = \vec{0}$. L'application d'un champ extérieur oriente ces dipôles dans la direction de \vec{E} , faisant apparaître un moment dipolaire $d\vec{p} \neq \vec{0}$.



— Polarisation ionique : le milieu est composé d'ions positifs (cations) et négatifs (anions) répartis aléatoirement dans le volume $d\tau$: il n'y a pas de moment dipolaire $d\vec{p}$ en moyenne. L'application d'un champ électrique extérieur modifie la répartition des charges positives et négatives, faisant apparaître un moment dipolaire $d\vec{p} \neq \vec{0}$.



- **Polarisation d'un milieu diélectrique :**

Définition : Dans les **milieu diélectrique**, sous l'action d'un champ électrique, les charges liées se déplacent et créent à l'échelle atomique dans la matière des dipôles électriques. On dit que le **milieu se polarise**.

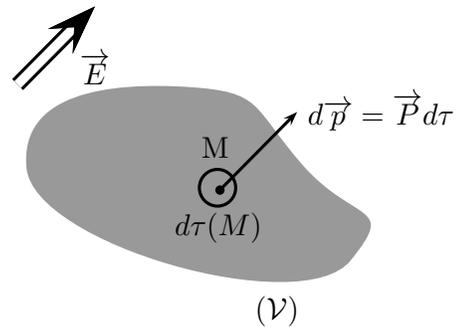
Remarque : le nom *diélectrique* vient du grec $\delta\iota\alpha$ ("dia") qui signifie "à travers" : cela vient du fait que le champ électrique pénètre à l'intérieur du matériau et agit sur les porteurs de charge.

1.2.2 Vecteur polarisation

Pour étudier les propriétés macroscopiques d'un milieu diélectrique, il faut moyenner à l'échelle mésoscopique les dipôles qui apparaissent à l'échelle microscopique :

Définition : On note $d\vec{p}(M, t)$ la somme des moments dipolaires contenus dans le volume infinitésimal $d\tau(M)$ centré sur M et on définit le vecteur polarisation $\vec{P}(M, t)$ à la date t par :

$$\vec{P}(M, t) = \frac{d\vec{p}}{d\tau}(M, t) \quad (\text{unité : } \text{C} \cdot \text{m}^{-2})$$



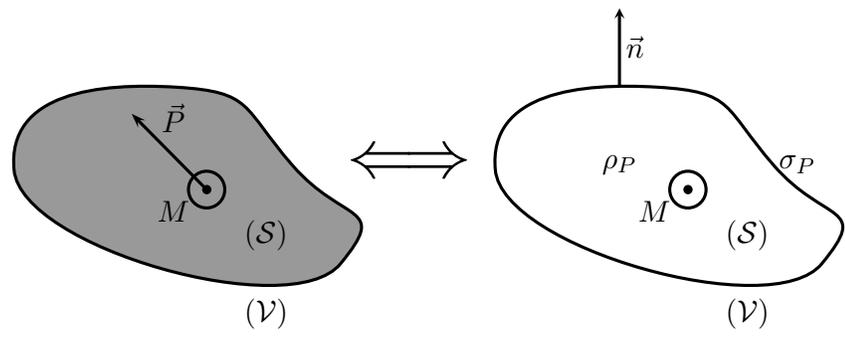
Remarque : l'indice p des charges et courant liés vient de *Polarisation*, on appelle parfois les charges et courants liés les "charges et courants de polarisation"

1.2.3 Densités et charges équivalentes

Propriété : Soit \vec{P} le vecteur polarisation d'un milieu diélectrique de volume \mathcal{V} , de surface \mathcal{S} , orientée par le vecteur unitaire \vec{n} (normal à la surface orienté vers l'extérieur).

Le potentiel créé par la distribution volumique de dipôles à l'origine de la polarisation est équivalent au potentiel qui serait créé par une densité macroscopique de charges caractérisée par **une densité surfacique** σ_P et **une densité volumique** ρ_P (de charges liées) telles que :

$$\sigma_P(M, t) = \vec{P}(M, t) \cdot \vec{n} \quad \text{et} \quad \rho_P(M, t) = -\text{div} \vec{P}(M, t)$$



Définition : Le vecteur densité de courant de polarisation \vec{j}_P représente le vecteur densité de courant associé au mouvement des charges liées. Il vaut :

$$\vec{j}_P(M, t) = \frac{\partial \vec{P}(M, t)}{\partial t}$$

Preuve : $V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \frac{\vec{P} \cdot \vec{r}}{r^3}$ potentiel électrostatique créé par un dipôle en O

Potentiel $V(M)$ créé par le diélectrique $\rightarrow \rightarrow$
 $V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\text{diélectrique}} \frac{\vec{P} \cdot \vec{QM}}{QM^3} dV$ \mathcal{Q} diélectrique

Comme $\frac{\vec{QM}}{QM^3} = \vec{\nabla}_Q \left(\frac{1}{QM} \right)$

On a $\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{P}}{QM} \right) = \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{P}}{QM} + \vec{P} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{QM} \right) = \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{P}}{QM} + \vec{P} \cdot \frac{\vec{QM}}{QM^3}$

d'où $V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_{\text{diélect}} \left[\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{\vec{P}}{QM} \right) - \frac{\vec{\nabla} \cdot \vec{P}}{QM} \right] dV$

théorème d'Ostrogradski $V(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint \frac{\vec{P} \cdot \vec{n}}{QM} dS + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint \frac{-\vec{\nabla} \cdot \vec{P}}{QM} dV$

Conservation de la charge : $\frac{\partial \rho_p}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_p = 0$

$$\frac{\partial (-\vec{\nabla} \cdot \vec{P})}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_p = 0$$

$$\rightarrow \underline{\vec{j}_p = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}}$$

1.3 Susceptibilité électrique

Sous l'influence d'un champ électrique, un milieu diélectrique se polarise : c'est le phénomène de **polarisation induite**. Pour connaître la réponse du milieu à ce champ extérieur, on cherche une relation entre le vecteur polarisation \vec{P} et le champ électrique \vec{E} . Le vecteur polarisation n'apparaît qu'en présence du champ \vec{E} . Ils sont reliés par la **susceptibilité électrique**. Cette relation dépend du type de milieu diélectrique que l'on étudie.

1.3.1 Milieux diélectriques linéaires homogènes et isotropes D.L.H.I

La plupart des milieux ne présentent pas de polarisation permanente par conséquent la polarisation qui apparaît dans ces milieux est directement due à l'application d'un champ électrique \vec{E} . La relation entre \vec{P} et \vec{E} n'est pas simple de manière générale, on peut toutefois dans certains cas l'exprimer simplement.

Supposons que le champ \vec{E} varie sinusoidalement dans le temps et qu'on peut donc utiliser la notation complexe.

- **Diélectrique linéaire** (hors programme) :

Un diélectrique est **linéaire** si les composantes du vecteur polarisation $\vec{P}(M, t)$ s'expriment linéairement en fonction de celles de $\vec{E}(M, t)$ autrement dit, s'il existe une matrice 3x3 dite **matrice de**

susceptibilité électrique $[\chi_e(M)]$ telle que :

$$\vec{P}(M, t) = \varepsilon_0 [\chi_e(M)] \vec{E}(M, t)$$

Cette relation définit la matrice susceptibilité électrique dont les éléments sont sans dimension.

- **Diélectrique linéaire et homogène** (hors programme) :

En plus d'être linéaire, le milieu est homogène si la matrice $[\chi(M)]$ est indépendante du point M. La matrice $[\chi_e]$ est alors symétrique : elle est donc diagonalisable dans une base orthonormée. Ainsi dans un milieu linéaire et homogène :

$$\begin{pmatrix} \underline{P}_x(M, t) \\ \underline{P}_y(M, t) \\ \underline{P}_z(M, t) \end{pmatrix} = \varepsilon_0 \begin{pmatrix} \underline{\chi}_x & 0 & 0 \\ 0 & \underline{\chi}_y & 0 \\ 0 & 0 & \underline{\chi}_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \underline{E}_x(M, t) \\ \underline{E}_y(M, t) \\ \underline{E}_z(M, t) \end{pmatrix}$$

- **Diélectrique linéaire, homogène et isotrope (D.L.H.I.)** (seul cas au programme) :

Dans un milieu diélectrique, linéaire, homogène et isotrope, toutes les directions de l'espace jouent le même rôle. Ainsi $\underline{\chi}_x = \underline{\chi}_y = \underline{\chi}_z = \underline{\chi}_e$ c'est-à-dire que $[\chi_e(M)] = \underline{\chi}_e Id$ où $\underline{\chi}_e$ est un complexe.

Définition : Un milieu est considéré comme un **milieu diélectrique linéaire, homogène et isotrope (D.L.H.I.)** lorsque la relation phénoménologique suivante est vérifiée :

$$\vec{P}(M, t) = \varepsilon_0 \underline{\chi}_e \vec{E}(M, t)$$

où $\underline{\chi}_e$, sans dimension, est nommé **susceptibilité diélectrique** du milieu.

Remarque : Physiquement, si $\vec{E}(M, t)$ désigne une O.P.P.H. polarisée rectilignement, une susceptibilité complexe traduit l'existence d'un déphasage entre $\vec{P}(M, t)$ et $\vec{E}(M, t)$. En effet, si $\vec{E}(M, t) = \vec{E}_0 \exp[j(\omega t - kx)]$ alors

$$\vec{P}(M, t) = \varepsilon_0 |\underline{\chi}_e| \vec{E}_0 \exp[j(\omega t - kx + \arg(\underline{\chi}_e))]$$

Ainsi $\arg(\underline{\chi}_e)$ représente le déphasage entre $\vec{P}(M, t)$ et $\vec{E}(M, t)$.

1.3.2 Description du modèle

Pour déterminer la forme de la susceptibilité électrique, plaçons nous dans le cas d'un milieu D.L.H.I. peu dense où la polarisation induite est une polarisation électronique.

Reprenons le **modèle de l'électron élastiquement lié** vu au chapitre 3 d'ÉLECTROMAGNÉTISME lors de l'étude de la diffusion RAYLEIGH et ajoutons des hypothèses :

1. **Champ électrique extérieur :** le milieu est soumis à une onde électromagnétique plane progressive harmonique. Celle-ci peut toujours être décomposée en la superposition d'O.P.P.H. polarisées rectilignement. Nous restreindrons donc notre étude à une **O.P.P.H. polarisée rectilignement** : $\vec{E}(M, t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$.
2. **Mouvement du nuage électronique :** l'onde excitatrice interagit avec les charges des atomes ou des molécules. Les noyaux étant beaucoup plus lourds que les électrons, nous les supposons immobiles et nous ne considérerons que les mouvements des nuages électroniques.

3. **Indépendances des électrons** : les électrons sont traités indépendamment les uns des autres, c'est-à-dire que l'on **néglige toute interaction entre eux**.

4. **Bilan des forces** le barycentre M du nuage électronique de masse m est soumis à :

- une **force de rappel élastique** $\vec{F} = -m\omega_0^2 \vec{r}$ où \vec{r} est le vecteur position de M ;
- une **force de frottement** $\vec{F}_f = -m\Gamma \frac{d\vec{r}}{dt}$ dans le référentiel lié à l'atome.
- la **force de LORENTZ** avec :
 - une **composante magnétique négligeable** ← $v \ll c$
 - un **champ électrique uniforme à l'échelle du déplacement du barycentre du nuage électronique** : $\vec{E}(M, t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t)$. cf chap. 3.

5. **milieu peu dense** : on peut **négliger les interactions entre dipôles** induit-induit, permanent-permanent ou permanent-induit. La plupart des gaz constitués de molécules non polaires constituent de bons exemples de D.L.H.I. peu denses.

1.3.3 Expression de la susceptibilité électrique

Dans le cadre du modèle de l'électron élastiquement lié, la **susceptibilité électrique complexe** vaut :

$$\chi_e = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\Gamma\omega} \quad \text{où} \quad \omega_p = \sqrt{\frac{n_e e^2}{m\epsilon_0}}$$

On a noté m la masse de l'électron, n_e le nombre d'électrons par unité de volume et e la charge élémentaire.

Remarque : on fait apparaître la pulsation ω_p appelée **pulsation plasma**.

Preuve :

PFD à M $\vec{OM} = \vec{r} = \vec{r}_0 \cos(\omega t) \quad \vec{r}_0 \parallel \vec{E}$

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{F}_f + \vec{F}_L$$

en notation complexe : $m(j\omega)^2 \vec{r} = -m\omega_0^2 \vec{r} - m\Gamma j\omega \vec{r} - e\vec{E}$

$$\vec{r} = \frac{-e\vec{E}}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + j\Gamma\omega)} \quad (*)$$

or $\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}$ et $\vec{P} = \frac{d\vec{p}(M)}{dZ} = n_e \vec{p} = -n_e e \vec{r} \rightarrow \vec{r} = \frac{\vec{P}}{n_e e}$

d'où en injectant dans (*) $\chi_e = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\Gamma\omega}$ avec $\omega_p = \sqrt{\frac{n_e e^2}{m\epsilon_0}}$

1.3.4 Dépendance en fréquence

On peut étudier l'évolution de la susceptibilité électrique $\underline{\chi}_e$ en fonction de la fréquence (ou pulsation) en étudiant séparément la partie réelle et imaginaire :

$$\underline{\chi}_e = \chi'_e + i\chi''_e \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} \chi'_e = \Re(\underline{\chi}_e) = \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\Gamma^2 \omega^2}{\omega_0^4}} \quad \in \mathbb{R} \\ \chi''_e = \Im(\underline{\chi}_e) = -\frac{\omega_p^2}{\omega_0^2} \frac{\frac{\Gamma \omega}{\omega_0^2}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\Gamma^2 \omega^2}{\omega_0^4}} \quad \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

- Signification physique de χ''_e :

Calculons l'expression de la puissance moyenne fournie par le champ électrique à la matière

\mathcal{P} puissance cédée au diélectrique (en moyenne)

$$\mathcal{P} = \frac{1}{2} \Re(\vec{j}_p \cdot \vec{E}^*) = \frac{1}{2} \Re(j\omega \vec{P} \cdot \vec{E}^*) = \frac{1}{2} \Re(j\omega \epsilon_0 (\chi'_e + j\chi''_e) E_0^2)$$

$$\mathcal{P} = -\frac{\epsilon_0 \omega \chi''_e}{2} E_0^2$$

Nous avons montré que la partie imaginaire de la susceptibilité est directement liée à l'énergie absorbée par la matière.

- Représentation graphique :

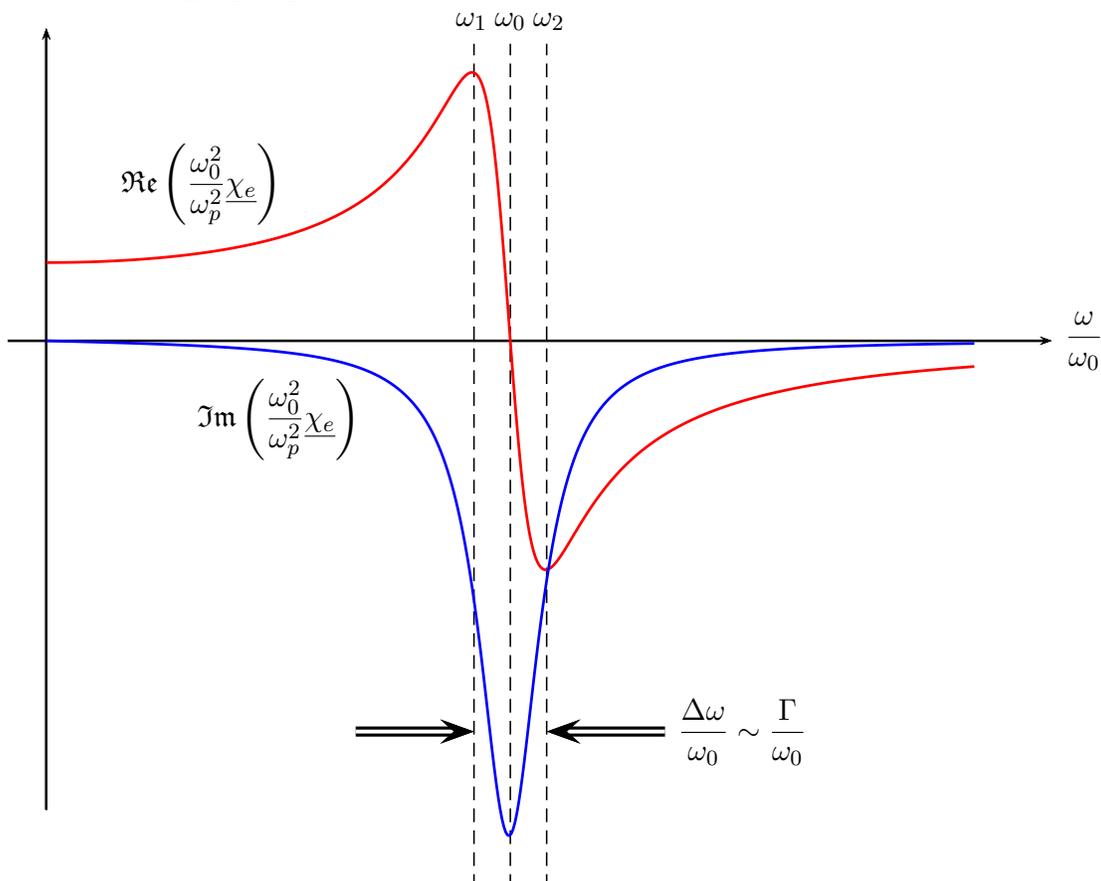


FIGURE 3 – Variation des parties réelle et imaginaire de la susceptibilité électrique

- **Ordre de grandeur :**

1. pour des électrons, on a $\omega_0 \sim 10^{16} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ et $\Gamma \sim 10^8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ ainsi $\Gamma \ll \omega_0$. Il en est de même pour la polarisation ionique où $\omega_0 \approx 10^{12} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$
2. pour les milieux peu denses $\omega_p \sim \frac{1}{2}\omega_0$
3. les courbes de la figure 3 ont été représentées avec le choix du rapport $\frac{\omega_0}{\Gamma} \sim 10$ ce qui est beaucoup plus faible que dans la réalité mais qui permet d'obtenir des courbes lisibles! En réalité, le produit $\frac{\omega_0}{\Gamma}$ est beaucoup plus grand (de l'ordre de 10^3 à 10^4) : les pics sont beaucoup plus étroits.

- **On distingue trois zones sur la figure 3 :**

- Pour $\omega \ll \omega_0$: $\Re(\underline{\chi}_e) \sim \frac{\omega_p^2}{\omega_0^2}$ et $\Im(\underline{\chi}_e) \approx 0$ donc $\underline{\chi}_e \in \mathbb{R}$: \vec{P} et \vec{E} sont en phase. **Les variations du champ \vec{E} sont suffisamment lentes pour que les électrons les suivent immédiatement.**
- Sur une fenêtre de largeur $\Delta\omega \sim \Gamma$ centrée sur ω_0 : $\Re(\underline{\chi}_e)$ subit de grandes variations et $\Im(\underline{\chi}_e)$ prend des valeurs importantes. **C'est dans cette zone que le milieu est absorbant.**
- Pour $\omega \gg \omega_0$: $\Re(\underline{\chi}_e) \approx 0$ et $\Im(\underline{\chi}_e) \approx 0$ soit $\underline{\chi}_e \approx 0$ et $\vec{P} \approx \vec{0}$. **Le champ électrique varie trop rapidement pour que les électrons aient le temps de le suivre.** L'onde "ne voit pas" le milieu diélectrique et le traverse comme si c'était du vide.

1.3.5 Lien avec les différentes polarisations du milieu (polarisation totale)

• L'étude que nous venons de faire ne considère que la polarisation électronique du milieu diélectrique. Mais plus généralement, le milieu diélectrique contient d'autres types de charges liées (comme les noyaux ou ions) et peut donc subir en plus une polarisation dipolaire (ou d'orientation). Dans ce cas, la forme de la susceptibilité électrique $\underline{\chi}_e$ peut se mettre sous la forme :

$$\underline{\chi}_e(\omega) = \sum_i \frac{\omega_{p,i}^2}{\omega_{0,i}^2 - \omega^2 + j\Gamma_i\omega}$$

où à chaque type de charges liées i sont associées des grandeurs $\omega_{p,i}$, $\omega_{0,i}$ et Γ_i .

• De plus, les résultats précédents ne sont valables qu'en milieu peu dense pour pouvoir négliger les interactions entre dipôles. Nous admettrons que le modèle précédent reste valable pour des milieux un peu plus denses comme les liquides, à condition de modifier les paramètres $\omega_{p,i}$, $\omega_{0,i}$ et Γ_i .

• Si de plus le milieu est polaire (constitué de molécules possédant un moment dipolaire permanent), il faut tenir compte de la polarisation d'orientation (ou dipolaire) pour écrire la susceptibilité électrique. Prenons l'exemple de l'eau qui est un milieu dipolaire. L'allure des parties réelles et imaginaire de $\underline{\chi}_e$ sont données sur la figure 4.

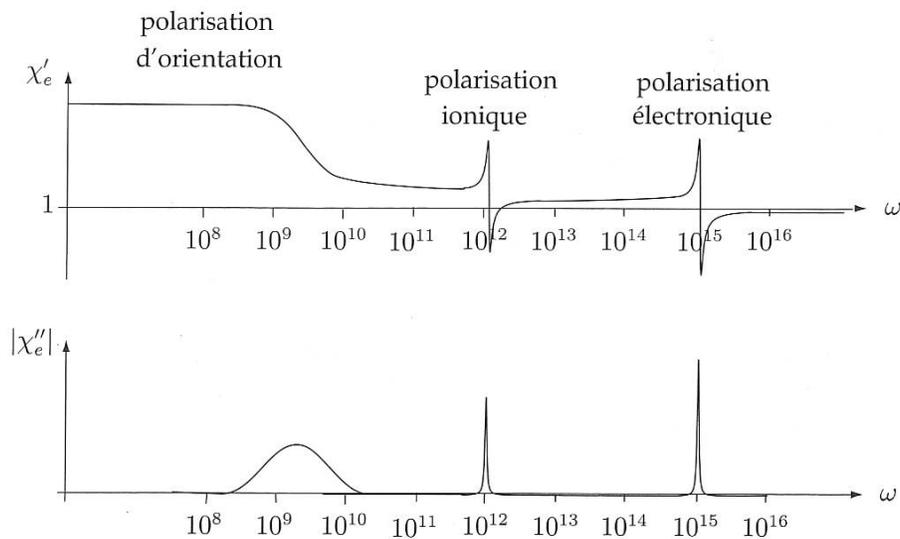


FIGURE 4 – Susceptibilité électrique de l'eau

Ordres de grandeur : les différents types de polarisations influençant la susceptibilité électrique du milieu, n'interviennent pas aux mêmes fréquences :

- polarisation électronique : dans le domaine du visible et de l'ultraviolet (fréquence de l'ordre de 10^{14} à 10^{15} Hz).
- polarisation ionique : dans le domaine de l'infra-rouge (fréquence de l'ordre de 10^{12} à 10^{14} Hz)
- polarisation d'orientation : dans le domaine de l'infra-rouge lointain et micro-ondes (fréquence de l'ordre de 10^9 Hz)

En considérant les zones où $\chi''_e < 0$ comme des zones où l'onde est absorbée, on remarque que l'eau est transparente dans le domaine visible (pas d'absorption) mais absorbe dans l'UV (polarisation électronique), IR (polarisation ionique) et autour de 10 GHz (polarisation d'orientation). Cette dernière absorption est à la base du fonctionnement des fours à micro-ondes : l'eau absorbe l'onde électromagnétique à cette fréquence, les molécules sont excitées et se désexcitent en donnant de l'énergie au milieu qui chauffe.

2 Ondes électromagnétiques dans les milieux D.L.H.I.

2.1 Équations de MAXWELL dans un D.L.H.I

2.1.1 Cas général d'un diélectrique

Les équations de MAXWELL demeurent valables dans un D.L.H.I. mais il faut faire attention à la densité volumique de charges ρ qui est la densité volumique de charge totale, c'est-à-dire que $\rho = \rho_{\text{libre}} + \rho_p$ et à la densité volumique de courants \vec{j} qui est la densité volumique de courant totale, c'est-à-dire $\vec{j} = \vec{j}_{\text{libre}} + \vec{j}_p$.

Les quatre équations de MAXWELL dans un diélectrique

① Équation de MAXWELL-GAUSS	$\text{div} \left(\underbrace{\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}}_{\vec{D}} \right) = \rho_{\text{libre}}$
② Équation de MAXWELL-flux	$\text{div} \vec{B} = 0$
③ Équation de MAXWELL-FARADAY	$\text{rot} \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
④ Équation de MAXWELL-AMPÈRE	$\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_{\text{libre}} + \mu_0 \frac{\partial \left(\underbrace{\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}}_{\vec{D}} \right)}{\partial t}$

Remarque : on introduit parfois le **vecteur induction électrique** $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$ pour alléger les équations de MAXWELL.

Preuve : M-G.
$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho_{\text{tot}}}{\epsilon_0} = \frac{\rho_{\text{libre}} + \rho_p}{\epsilon_0} \quad \text{or} \quad \rho_p = -\text{div } \vec{P}$$

d'où
$$\text{div} (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \text{div } \vec{D} = \frac{\rho_{\text{libre}}}{\epsilon_0}$$

M-A.
$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_{\text{tot}} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 (\vec{j}_{\text{libre}} + \vec{j}_p) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad \text{or} \quad \vec{j}_p = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_{\text{libre}} + \mu_0 \frac{\partial (\underbrace{\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}}_{\vec{D}})}{\partial t}$$

Dans la suite du cours, on se placera en notation complexe pour utiliser la relation $\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e(\omega) \vec{E}$.
On peut réécrire les équations de MAXWELL sous la forme

Les quatre équations de MAXWELL complexe dans un D.L.H.I.

- ① Équation de MAXWELL-GAUSS $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho_{\text{libre}}}{\epsilon_0 \epsilon_r}$
- ② Équation de MAXWELL-flux $\text{div } \vec{B} = 0$
- ③ Équation de MAXWELL-FARADAY $\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
- ④ Équation de MAXWELL-AMPÈRE $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}_{\text{libre}} + \mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

Remarque : cela revient à remplacer ϵ_0 par $\epsilon_0 \epsilon_r$ dans les équations de MAXWELL "dans le vide".

Définition : On appelle **permittivité diélectrique relative** ou **constante diélectrique relative** la grandeur sans unité définie par :

$$\epsilon_r = 1 + \chi_e$$

En effet
$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi_e \vec{E} \quad \text{dans un DLHI}$$

$$\vec{D} = \underbrace{\epsilon_0 (1 + \chi_e)}_{\epsilon_r} \vec{E}$$

2.1.2 Cas du D.L.H.I. parfait

Définition : Un D.L.H.I. est dit **parfait** (ou parfaitement isolant) lorsqu'il n'y a aucune source libre ($\vec{j}_{\text{libre}} = \vec{0}$; $\rho_{\text{libre}} = 0$).

Dans ce cas, on peut écrire les équations de MAXWELL sous la forme :

Les quatre équations de MAXWELL dans un D.L.H.I. parfait

- | | |
|-------------------------------|--|
| ① Équation de MAXWELL-GAUSS | $\operatorname{div} \vec{E} = 0$ |
| ② Équation de MAXWELL-flux | $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ |
| ③ Équation de MAXWELL-FARADAY | $\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ |
| ④ Équation de MAXWELL-AMPÈRE | $\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ |

2.2 Équation de propagation et relation de dispersion dans un D.L.H.I. parfait

2.2.1 Équations de propagation

Dans un D.L.H.I. parfait, les équations de propagation des champs $\vec{E}(M, t)$ et $\vec{B}(M, t)$ sont :

$$\boxed{\Delta \vec{E} - \frac{\varepsilon_r}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}} \quad \text{et} \quad \boxed{\Delta \vec{B} - \frac{\varepsilon_r}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}} \quad \text{où } c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

Preuve : $\operatorname{rot} (M.A.) : \operatorname{rot} (\operatorname{rot} \vec{B}) = \operatorname{rot} (\mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$
 $\operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{B}) - \Delta \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \varepsilon_r \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{E}$
 $\Delta \vec{B} - \frac{\varepsilon_r}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \quad \text{où } c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$

idem $\operatorname{rot} (M.F.) \rightarrow \Delta \vec{E} - \frac{\varepsilon_r}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0$

2.2.2 Relation de dispersion

Les O.P.P.H ne pouvant être solutions de l'équation de propagation, nous cherchons des solutions aux équations de propagation dans un D.L.H.I. parfait sous la forme de pseudo-O.P.P.H. : $\vec{E}(M, t) = \vec{E}_0 \exp [i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})]$

Relation de dispersion : Dans un D.L.H.I. parfait, les pseudo-ondes électromagnétiques P.P.H.

$$\vec{E}(M, t) = \vec{E}_0 \exp [i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})]$$

suivent la relation de dispersion :

$$\boxed{k^2 = \varepsilon_r \frac{\omega^2}{c^2} \Leftrightarrow k^2 = \left(n \frac{\omega}{c}\right)^2}$$

Preuve : $\vec{E}(M,t) = \vec{E}_0 \exp(i(\omega t - \underline{k}_x x - \underline{k}_y y - \underline{k}_z z))$

$$\Delta \vec{E} - \frac{\epsilon_r}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \Leftrightarrow - \underbrace{(\underline{k}_x^2 + \underline{k}_y^2 + \underline{k}_z^2)}_{\underline{k}^2} \vec{E}(M,t) - \frac{\epsilon_r (-\omega^2)}{c^2} \vec{E}(M,t) = 0$$

$$\left[-\underline{k}^2 + \frac{\epsilon_r \omega^2}{c^2} \right] \vec{E}(M,t) = 0 \rightarrow \underline{k}^2 = \frac{\epsilon_r \omega^2}{c^2} = \left(\frac{n\omega}{c} \right)^2 \quad n^2 = \epsilon_r$$

2.3 Absorption et dispersion

Le vecteur d'onde \vec{k} est complexe et dépend de ω , cela signifie qu'il y a, a priori, un phénomène d'absorption et de dispersion. Notons

$$\vec{k} = \underline{k} \vec{u} = (k' + jk'') \vec{u} \quad k', k'' \in \mathbb{R}$$

avec \vec{u} un vecteur unitaire dans la direction de propagation de l'onde.

$$\vec{E}(M,t) = \vec{E}_0 \exp(j(\omega t - \underline{k} \cdot \vec{r})) = \vec{E}_0 \underbrace{\exp(j(\omega t + k'(w) \vec{u} \cdot \vec{r}))}_{\text{propagation}} \underbrace{\exp(-k''(w) \vec{u} \cdot \vec{r})}_{\text{atténuation due à l'absorption}}$$

dispersion car $\underline{k}(w) = \frac{\epsilon_r(w) \omega^2}{c^2}$

2.4 Relation de structure

Relation de structure d'une pseudo-O.P.P.H. électromagnétique dans un D.L.H.I. parfait :

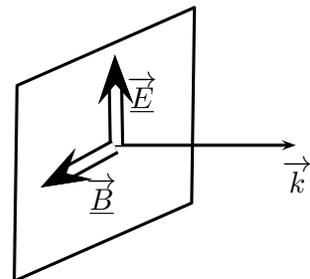
- Si $\vec{E}(M,t)$ (respectivement $\vec{B}(M,t)$) est une pseudo-O.P.P.H. se dirigeant selon \vec{u} alors $\vec{B}(M,t)$ (respectivement $\vec{E}(M,t)$) est une pseudo-O.P.P.H. se dirigeant selon \vec{u} .
- Dans ces conditions, l'O.P.P.H. électromagnétique $(\vec{E}(M,t), \vec{B}(M,t))$ vérifie alors :

$$\boxed{\vec{E}(M,t) \cdot \vec{u} = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{B}(M,t) \cdot \vec{u} = 0}$$

et la **relation de structure** est :

$$\boxed{\vec{B}(M,t) = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}(M,t)}{\omega} \Leftrightarrow \vec{E}(M,t) = \frac{\vec{B} \wedge \vec{k}}{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r \omega}}$$

- Ces relations montrent que, pris dans cet ordre, $(\vec{E}, \vec{B}, \vec{k})$ forme un trièdre direct (valable en réel).



⚠ La relation de structure n'est valable qu'en notation complexe!

Comme dans le vide $\text{div } \vec{E} = 0, \text{div } \vec{B} = 0 \Leftrightarrow \vec{E} \cdot \vec{u} = 0$ et $\vec{B} \cdot \vec{u} = 0$ (cf chap. 2.)

Soit
$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \\ \vec{B} = \vec{B}_0 e^{j(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})} \end{cases}$$

M.F.
$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \\ \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \\ \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \end{pmatrix} = -j\omega \vec{B}$$

$$\Leftrightarrow -j \begin{pmatrix} k_y E_z - k_z E_y \\ k_z E_x - k_x E_z \\ k_x E_y - k_y E_x \end{pmatrix} = -j\omega \vec{B}$$

$\rightarrow \underline{k} \wedge \underline{E} = \omega \underline{B}$

idem M.A. $\rightarrow \underline{E} = \frac{\underline{B} \wedge \underline{k}}{\mu_0 \epsilon_0 \epsilon_r \omega}$

Remarque : si le D.L.H.I. est transparent pour l'onde (pas d'absorption donc k réel), alors l'onde est une O.P.P.H. est la relation de structure est de la forme :

$$\boxed{\vec{E}(M,t) \cdot \vec{u} = 0} \quad \boxed{\vec{B}(M,t) \cdot \vec{u} = 0} \quad \boxed{\vec{B}(M,t) = \frac{\vec{k} \wedge \vec{E}(M,t)}{\omega}}$$

2.5 Champ électromagnétique et vecteur de Poynting

- À partir de la relation de structure et en connaissant le champ électrique \vec{E} , on obtient le champ magnétique \vec{B} .
- Le vecteur de POYNTING se calcule à partir des champs réels. Il s'écrit toujours $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$. Pour la valeur moyenne, on peut utiliser les champs complexe :

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \Re(\vec{E} \wedge \vec{B}^*)$$

$$\vec{E} \wedge \vec{B}^* = \vec{E} \wedge \left(\frac{\vec{k} \wedge \vec{E}}{\omega} \right)^* = \vec{E} \wedge \left(\frac{\vec{k}^* \wedge \vec{E}^*}{\omega} \right)$$

$$\forall \vec{A}, \vec{B}, \vec{C} \in \mathcal{F}^3 \quad \vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B})$$

$$\text{donc } \vec{E} \wedge \vec{B}^* = \frac{\vec{k}^*}{\omega} (\vec{E} \cdot \vec{E}^*) - \vec{E}^* \left(\frac{\vec{k}^* \cdot \vec{E}}{\omega} \right) = \frac{\vec{k}^*}{\omega} |E|^2 \vec{u}$$

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \Re(\vec{E} \wedge \vec{B}^*) = \frac{|E|^2}{2\mu_0 \omega} \Re(\vec{k}^*) \vec{u} \quad \text{où } \underline{k}^* = k' - jk''$$

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{k'(w) |E|^2}{2\mu_0 \omega} \vec{u}$$

3 Application à l'optique

3.1 Indice optique

• Définition de l'indice optique complexe : $\underline{k} = k' + j k''$

Posons $k_0 = \frac{\omega}{c}$ (comme dans le vide) et considérons $k' > 0$. On pose alors :

$$\underline{k} = \underline{n} k_0 = \underline{n} \frac{\omega}{c}$$

où \underline{n} est appelé l'indice optique complexe du milieu.

Définition : On appelle **indice optique complexe** du milieu la grandeur \underline{n} reliée à la permittivité diélectrique relative ou à la susceptibilité électrique par la relation :

$$\underline{n}^2 = \underline{\epsilon}_r = 1 + \underline{\chi}_e$$

$$\underline{n} = n' + j n'' \quad \underline{n}^2 = n'^2 - n''^2 + 2j n' n'' \quad \text{or } \underline{n}^2 = 1 + \chi_e' + j \chi_e''$$

$$\begin{cases} n' - n''^2 = 1 + \chi_e' \\ 2 n' n'' = \chi_e'' \end{cases}$$

Milieu peu dense : $|\chi_e| \ll 1 \rightarrow \underline{n} \sim 1 + \frac{\chi_e}{2}$

Ainsi on a $k' = n'(\omega) k_0$ et $k'' = n''(\omega) k_0$.

$$\begin{cases} n' \sim 1 + \chi_e' / 2 \\ n'' \sim \chi_e'' / 2 \end{cases}$$

La propagation et la dispersion de l'onde sont liées à la partie réelle de l'indice optique complexe n' appelé **indice de réfraction** et l'absorption à sa partie imaginaire n'' appelée **indice d'absorption**.

• Évolution de l'indice optique complexe en fonction de la pulsation :

La figure 5 représente les parties réelle et imaginaire de l'indice complexe en fonction de la pulsation. On distingue :

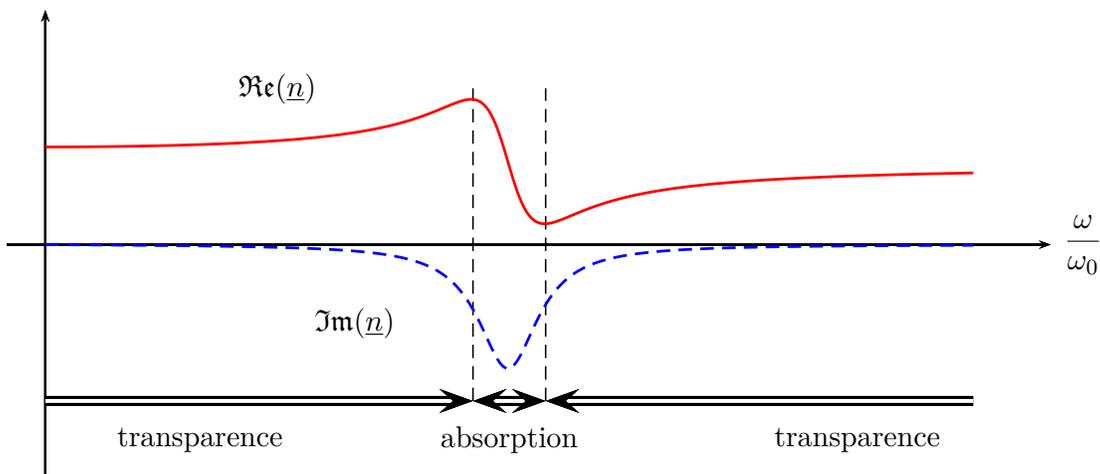


FIGURE 5 – Variation des parties réelle et imaginaire de l'indice complexe

1. La **zone d'absorption** est la zone spectrale où $n'' = \Im(n)$ prend des valeurs non négligeables. Elle est centrée sur ω_0 . Dans le cas du verre¹ (pour lequel $\omega_0 \sim 10^{16}$ rad · s⁻¹), la longueur d'onde dans le vide correspondante est $\lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega_0} = \frac{2\pi \cdot 3,0 \cdot 10^8}{10^{16}} = 2,0 \cdot 10^{-8}$ m = 20 nm ce qui correspond au domaine des ultraviolets. Cela signifie que le verre absorbe les ondes électromagnétiques situées dans l'ultraviolet (c'est pour cela qu'on ne bronze pas derrière une vitre...).

Dans la zone d'absorption l'indice optique est complexe, le milieu absorbe les ondes et la dispersion est importante

2. La **zone de transparence** est le complémentaire de la zone d'absorption. Dans cette zone $\Im(n) \approx 0$.

$$\rightarrow \underline{n} \sim n' = \sqrt{1 + \chi_e'} \in \mathbb{R}$$

Dans la zone de transparence, l'indice optique est réel, une onde électromagnétique se propage sans atténuation et la dispersion est relativement faible

3.2 Loi de CAUCHY

L'absorption est importante au voisinage de ω_0 et négligeable partout ailleurs. Plaçons nous hors de cette zone d'absorption, dans le domaine de pulsation où $\omega \ll \omega_0$, en particulier dans le domaine visible de l'optique.

Loi de CAUCHY : Loi empirique donnant l'indice de réfraction n d'un milieu en fonction de la longueur d'onde :

$$n = A + \frac{B}{\lambda^2}$$

où A et B sont des constantes caractéristiques du milieu. Cette loi n'est valable que pour des milieux dont les fréquences caractéristiques sont supérieures aux fréquences optiques.

Milieu peu dense : $\underline{n} \sim 1 + \frac{\chi_e'(\omega)}{2} \in \mathbb{R}$

hors de la zone de transparence ($\omega \ll \omega_0$) $n \sim 1 + \frac{\omega_p^2}{2\omega_0^2} \frac{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\Gamma^2 \omega^2}{\omega_0^2}}$

on a toujours $\Gamma \ll \omega_0$

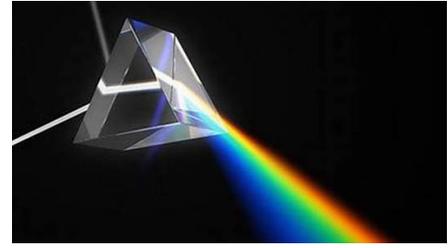
$$n \sim 1 + \frac{\omega_p^2}{2\omega_0^2} \frac{1}{1 - \frac{2\omega^2}{\omega_0^2}}$$

$$\sim 1 + \frac{\omega_p^2}{2\omega_0^2} \left(1 + 2\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right) \sim 1 + \frac{\omega_p^2}{2\omega_0^2} + \frac{\omega_p^2 \omega^2}{2\omega_0^4}$$

car $\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$ donc $n \sim \underbrace{1 + \frac{\omega_p^2}{2\omega_0^2}}_A + \frac{(2\pi c)^2}{\lambda^2} \frac{\omega_p^2}{2\omega_0^2} = B$

1. Le verre n'est pas un milieu peu dense mais on admettra que les résultats persistent.

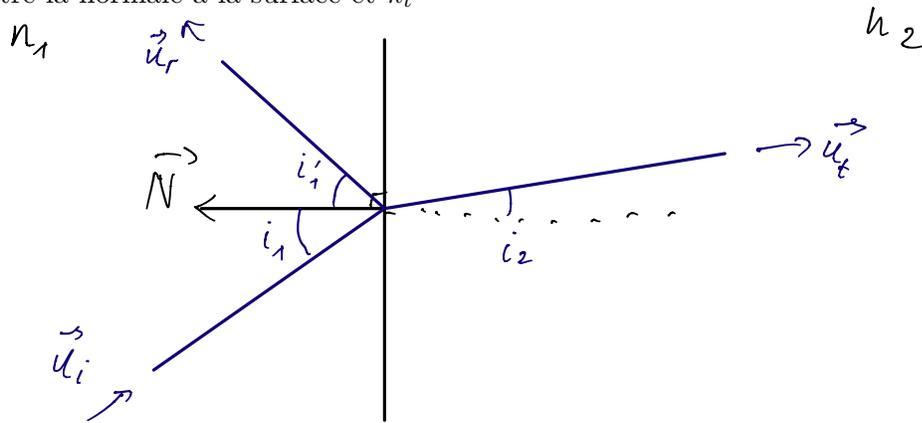
Exemple : Cette loi est valable dans le cas du prisme qui permet de disperser la lumière : dans la lumière blanche composée de toutes les couleurs, chaque longueur d'onde "voit" un indice de réfraction différent et n'est pas déviée de la même manière. On décompose alors la lumière blanche.



3.3 Lois de SNELL-DESCARTES

Soient deux milieux D.L.H.I. parfaits et transparents d'indices n_1 et n_2 réels. La surface de séparation entre ces deux milieux est considérée localement plane. Une O.P.P.H. incidente (**rayon incident**) de vecteur d'onde \vec{k}_i se propage dans le milieu d'indice n_1 et arrive à l'interface séparant les deux milieux : une partie de l'onde est réfléchi (**rayon réfléchi**) avec un vecteur d'onde \vec{k}_r et une partie de l'onde est transmise (**rayon réfracté**) dans le milieu d'indice n_2 avec un vecteur d'onde \vec{k}_t . On note :

- i_1 l'angle entre la normale à la surface et \vec{k}_i
- i'_1 l'angle entre la normale à la surface et \vec{k}_r
- i_2 l'angle entre la normale à la surface et \vec{k}_t



Définition : Le **plan d'incidence** est défini comme le plan engendré par le rayon incident et la normale à l'interface au point I où le rayon incident atteint l'interface.

Première loi de SNELL-DESCARTES : le rayon **réfléchi** et le rayon **réfracté** (s'il existe) sont dans le plan d'incidence.

Deuxième loi de SNELL-DESCARTES : le rayon **incident** et le rayon **réfléchi** sont symétriques par rapport à la normale

$$i_1 = -i'_1$$

Troisième loi de SNELL-DESCARTES : le rayon **réfracté** (s'il existe)^a est tel que

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

a. Lorsque $n_1 \sin i_1 > 1$ alors le rayon réfracté n'existe pas : c'est le phénomène de réflexion totale

Onde incidente $\vec{E}_i = \vec{E}_{oi} e^{j(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})}$ $\vec{B}_i = \frac{\vec{k}_i \wedge \vec{E}_{oi}}{\omega} e^{j(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})}$
 réfléchi $\vec{E}_r = \vec{E}_{or} e^{j(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})}$ $\vec{B}_r = \frac{\vec{k}_r \wedge \vec{E}_{or}}{\omega} e^{j(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})}$
 transmise $\vec{E}_t = \vec{E}_{ot} e^{j(\omega t - \vec{k}_t \cdot \vec{r})}$ $\vec{B}_t = \frac{\vec{k}_t \wedge \vec{E}_{ot}}{\omega} e^{j(\omega t - \vec{k}_t \cdot \vec{r})}$

$$\text{même } \omega \rightarrow \vec{k}_i = n_1 \frac{\omega}{c} \vec{u}_i \quad \vec{k}_r = n_1 \frac{\omega}{c} \vec{u}_r \quad \vec{k}_t = n_2 \frac{\omega}{c} \vec{u}_t$$

Continuité de \vec{E}_{\parallel} sur le dioptre: $\vec{r} = \vec{OM}$ $M \in \text{dioptre}$

$$\vec{E}_{oi\parallel} e^{j(\omega t - \vec{k}_i \cdot \vec{r})} + \vec{E}_{or\parallel} e^{j(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})} = \vec{E}_{ot\parallel} e^{j(\omega t - \vec{k}_t \cdot \vec{r})}$$

$$\forall t, \text{ y compris en } t=0: \vec{E}_{oi\parallel} + \vec{E}_{or\parallel} e^{j(\vec{k}_i - \vec{k}_r) \cdot \vec{r}} = \vec{E}_{ot\parallel} e^{j(\vec{k}_i - \vec{k}_t) \cdot \vec{r}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{0} = (\vec{k}_i - \vec{k}_r) \cdot \vec{r} \\ \vec{0} = (\vec{k}_i - \vec{k}_t) \cdot \vec{r} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{n_1 \omega}{c} (\vec{u}_i - \vec{u}_r) \cdot \vec{r} = 0 \\ \frac{\omega}{c} (n_1 \vec{u}_i - n_2 \vec{u}_r) \cdot \vec{r} = 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} (\vec{u}_i - \vec{u}_r) \parallel \vec{N} \\ (n_1 \vec{u}_i - n_2 \vec{u}_r) \parallel \vec{N} \end{array} \right.$$

$$\stackrel{\parallel \vec{N}}{=} \left\{ \begin{array}{l} \sin i_1 = \sin i_1' \rightarrow \underline{i_1 = i_1'} \\ \underline{n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2'} \end{array} \right.$$