Travaux dirigés d'Électromagnétisme 2 :
Ondes électromagnétiques dans le vide et polarisation

École Centrale Pékin

2020-2021

Données :

- $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-11}$ H·m^{-1},
- $\varepsilon_0 = 1/\mu_0 c^2 \approx 8,85 \cdot 10^{-12}$ F·m^{-1}.

Application du cours

Exercice 1 : Onde électromagnétique plane progressive

On étudie la propagation d'une onde électromagnétique dans le vide.

1. Démontrer les équations de propagation vérifiées par $\overrightarrow{E}(M,t)$ et $\overrightarrow{B}(M,t)$. Quelle est le nom des solutions générales de ces équations ?
2. On suppose que le champ électrique est de la forme : $\overrightarrow{E}(M,t) = E_0 \cos(\omega t - kz)\,\overrightarrow{e_x}$.
   - 2.1. À quelle équation doit satisfaire k pour que ce champ soit solution de l'équation de la question 1. Comment nomme-t-on cette relation ?
   - 2.2. Quels sont la direction, le sens et la vitesse de propagation de cette onde ?
   - 2.3. Quel est l'état de polarisation de cette onde ?
   - 2.4. Quelle est la relation de structure de cette onde ?
   - 2.5. Calculer le champ magnétique $\overrightarrow{B}(M,t)$ associé à $\overrightarrow{E}(M,t)$ ainsi que le vecteur de Poynting de l'onde.
   - 2.6. Déterminer l'énergie moyenne électromagnétique volumique.
3. La puissance moyenne rayonnée par cette onde à travers une surface $S = 4,0$ mm^2 orthogonale à sa direction de propagation est $P = 10$ W. Calculer les amplitudes E_0 et B_0 des champs électrique et magnétique.

Exercice 2 : État de polarisation d'une onde électromagnétique

Indiquer si les ondes suivantes sont planes et progressives (éventuellement harmonique) et déterminer leurs états de polarisation et leurs directions et sens de propagation. E_0, ω, λ et k sont des réels positifs.

1. $$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kz)\vec{u}_x,$$
2. $$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t + kz)\vec{u}_x,$$

3.
$$\vec{E} = E_0 \cos\left(\frac{\pi z}{\lambda}\right)\cos(\omega t)\vec{u}_x,$$

4.
$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kz)\vec{u}_x + \frac{E_0}{\sqrt{3}}\cos(\omega t - kz)\vec{u}_y,$$

5.
$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kz)\vec{u}_x + E_0 \sin(\omega t - kz)\vec{u}_y,$$

6.
$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kz)\vec{u}_x + \frac{E_0}{\sqrt{3}}\cos(\omega t - kz - \frac{\pi}{3})\vec{u}_y.$$

S'entraîner

Exercice 3 : Réflexion d'une onde électromagnétique sur un miroir parfait sous incidence normale.

Une onde électromagnétique plane progressive harmonique se propage suivant $\vec{u}_x$ tout en étant polarisée suivant $\vec{u}_y$. L'espace est vide et infini selon $x < 0$ et est limité par un miroir, conducteur parfait (conductivité γ infinie) en $0 \leq x$.

1. Pourquoi n'y a-t-il pas de champ électrique dans le conducteur ?
2. Rappeler sans démonstration l'équation de propagation du champ électrique.
3. Ecrire l'expression du champ électrique $\underline{\vec{E}_\mathrm{i}}$ sans démonstration. En déduire celle de $\underline{\vec{B}_\mathrm{i}}$, le champ magnétique. On utilisera les notations complexes.
4. Sur le conducteur, l'onde électromagnétique se réfléchit. Ecrire les relations de passage à l'interface avec le conducteur parfait pour le champ électrique total et le champ magnétique total.
5. En déduire l'expression de l'onde (champs électrique et magnétique) réfléchie. On suppose qu'elle est de même pulsation que l'onde incidente. Commenter sa structure.
6. En déduire l'expression de l'onde (champs électrique et magnétique) totale dans le vide en notation complexe. Commenter sa structure.
7. Exprimer le vecteur de Poynting $\vec{\Pi}$ ainsi que sa moyenne temporelle.
8. Exprimer l'énergie électromagnétique volumique u_em de l'onde ainsi que sa moyenne temporelle. Commenter.

Exercice 4 : Superposition de deux OPPH

Une O.P.P.H. électromagnétique de pulsation ω se propage dans le vide. Son vecteur d'onde est : $\overrightarrow{k_1} = k_1 (\cos\alpha\overrightarrow{e_x} + \sin\alpha\overrightarrow{e_z})$ et son champ électrique est noté $\overrightarrow{E_1}(M,t)$. Elle est polarisée rectilignement suivant l'axe Oy. Cet exercice ne présente pas de difficulté physique particulière, ne vous laisser pas décourager par la longueur des calculs mathématiques !

1. Que vaut k_1 en fonction de ω et c ? Justifier. Quel est le champ magnétique associé à l'onde ?

Une deuxième O.P.P.H., de même fréquence, amplitude et polarisation est superposée à la première. Son vecteur d'onde est le symétrique de $\overrightarrow{k_1}$ par rapport à $\overrightarrow{e_x}$. Ces deux ondes sont en phase à l'origine des coordonnées.

2. Exprimer les champs électrique et magnétique de l'onde globale.
3. Quelle est la direction de propagation de cette onde globale ? Caractériser cette onde.
4. Quelle est la valeur moyenne temporelle $\langle\overrightarrow{\Pi}\rangle$ du vecteur de Poynting de l'onde globale ?

5. Exprimer la puissance moyenne dans le temps transportée par l'onde globale à travers une surface S rectangulaire de cotés (L, l) très grands devant la période spatiale de l'onde, perpendiculaire à la direction de propagation de l'onde globale.
6. Quelle vitesse d'énergie "moyenne" (moyenne temporelle et spatiale) peut-on associer à cette onde ? Commenter ce résultat.

Pour aller plus loin

Exercice 5 : Onde cylindrique

On étudie une onde électromagnétique cylindrique émise par des charges situées le long d'un axe Oz. En coordonnées cylindriques d'axe Oz, le champ électrique s'écrit $\underline{\vec{E}}(M,t) = E(r)\exp(i(\omega t - kr))\vec{u}_z$ où $E(r)$ est réel. L'onde se propage dans le vide.

1. Déterminer le champ magnétique $\underline{\vec{B}}(M,t)$. Quelle est la nature de l'onde ?
2. Quelle est la valeur moyenne du vecteur de Poynting ? En déduire la puissance moyenne $\mathcal{P}$ rayonnée à travers le cylindre d'axe Oz, de hauteur h et de rayon r.
3. En déduire l'expression de $E(r)$ en fonction de $r, \mathcal{P}, h, c$ et ε_0. On l'écrira sous la forme $a/\sqrt{r}$ avec a une constante à déterminer.
4. Dans la zone de champ lointain ($r >> \lambda$), donner les champs $\underline{\vec{E}}(M,t)$ et $\underline{\vec{B}}(M,t)$ et décrire la structure de l'onde.
5. En déduire la relation de dispersion dans cette zone de champ lointain.

Formulaire mathématique en coordonnées cylindriques :

- L'expression du rotationnel d'un champ vectoriel $\vec{A}(r,\theta,z,t)$, dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ est :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\vec{A} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial A_z}{\partial \theta} - \dfrac{\partial A_\theta}{\partial z} \\ \dfrac{\partial A_r}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \dfrac{\partial A_r}{\partial \theta}\right) \end{pmatrix} ;$$

- L'expression du laplacien scalaire agissant sur le champ $V(r,\theta,z,t)$ dans la base $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ est :

$$\Delta V = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}.$$