Travaux dirigés d'Électromagnétisme 3 :
Rayonnement dipolaire électrique

École Centrale Pékin

2020 – 2021

Application du cours

Exercice 1 : Structure du champ rayonné par un dipôle oscillant sans calcul

On assimile une antenne rectiligne, de taille 1 cm, à un dipôle électrique oscillant $\overrightarrow{p}(t) = p(t)\overrightarrow{u_z}$ placé au milieu de l'antenne et parallèle à l'antenne. L'antenne est alimentée en courant sinusoïdal de fréquence $f = 200$ MHz. On considère deux points M et M' tels que $\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM'}$ sont perpendiculaires à $\vec{p}$ et $MM' = 75$ cm.

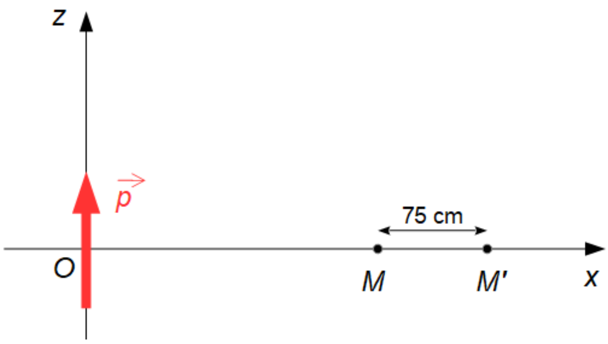


Figure 1

1. L'approximation de mouvement non relativiste des charges est-elle vérifiée ici ?
2. À quelle condition (non respectée sur la figure) M et M' sont-ils dans la zone de rayonnement du dipôle oscillant ? Que signifie la phrase : "Dans la zone de rayonnement l'onde émise par un dipôle oscillant a localement la structure dune onde plane progressive dans le vide" ? Répondre aussi précisément que possible.
3. Supposant que M et M' sont dans la zone de rayonnement, l'approximation dipolaire est-elle alors vérifiée ?
4. Reproduire la Figure 1 en représentant les champs électriques et magnétiques en M et M' à un même instant quelconque. Justifier la réponse sans faire de calcul.

Exercice 2 : Absorption d'une onde par un électron

Un électron non relatisviste, de charge $-e$ et de masse m, est initialement immobile. Une O.P.P.H. électromagnétique de pulsation ω, d'amplitude (E_0, B_0), polarisée rectilignement selon Oz (champ électrique polarisé selon Oz), se propage dans le vide selon Ox.

1. En considérant l'électron comme **élastiquement lié** par une force $\overrightarrow{F} = -m\omega_0^2\overrightarrow{r}$, sans frottement, faire un bilan des forces que subit l'électron. On supposera que le champ électromagnétique est uniforme à l'échelle de l'atome. Le poids de l'électron est négligé.
2. On cherche $\overrightarrow{r}$ sous la forme $\overrightarrow{r_0}\cos(\omega t + \varphi)$. Montrer que le mouvement est selon l'axe Oz et donner l'expression de $\overrightarrow{r}$ en fonction du temps.
3. Que devient l'expression de $\overrightarrow{r}$ si $\omega \ll \omega_0$? Comment appelle-t-on ce domaine de diffusion ?
4. Que se passe-t-il en $\omega = \omega_0$?
5. Que devient l'expression de $\overrightarrow{r}$ si $\omega \gg \omega_0$? Comment appelle-t-on ce domaine de diffusion ?
6. L'électron se comporte comme un petit disque normal à $\overrightarrow{u_x}$ de rayon r_0 absorbant l'onde électromagnétique.
   a) Déterminer la puissance moyenne de l'onde électromagnétique traversant ce disque.
   b) L'électron a absorbé une certaine puissance (question précédente) puis rayonne la même quantité dans l'espace. On se place dans la cas où $\omega \gg \omega_0$. L'électron se comporte comme une charge q animée d'un mouvement $r = a\cos(\omega t)$ qui rayonne la puissance moyenne
   $$\langle \mathcal{P} \rangle = \frac{\mu_0}{12\pi c}\omega^4 q^2 a^2$$
   . Déterminer le rayon r_0.
   c) En déduire la section efficace $\sigma = \pi r_0^2$. On exprimera l'application numérique en "Mégabarn" noté "Mb", l'unité usuelle des sections efficaces atomiques ou molécules (1 Mb $= 10^{-28}$ m^2).

S'entraîner

Exercice 3 : Rayonnement du dipôle magnétique oscillant.

En jauge de Lorentz, les potentiels scalaire V et vecteur $\vec{A}$ créés à grande distance par un dipôle magnétique variable $m(t)$ placé à l'origine des coordonnées sont respectivement :

$$V(\vec{r}, t) = 0 \qquad \text{et} \qquad \vec{A}(\vec{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\left(\frac{\vec{m}(t - r/c)}{r^2} + \frac{\dot{\vec{m}}(t - r/c)}{rc}\right) \wedge \vec{u}_r$$

On notera $\vec{m}(t) = m_0\cos(\omega t)\vec{u}_z$ le moment magnétique dipolaire avec m_0 réel. On rappelle que l'expression d'un moment magnétique statique généré par une spire de rayon a parcouru par un courant I_0 s'écrit $m_0 = I_0 \times \pi a^2$.

1. A partir des expressions des potentiels, dériver les expressions des champs électrique et magnétique dans la zone de rayonnement. On pourra introduire noter θ, l'angle entre $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_z$.
2. Calculer le vecteur de Poynting du champ électromagnétique rayonné par le dipôle magnétique dans la zone de rayonnement.
3. Quelle est la puissance moyenne $\langle \mathcal{P}_\mathrm{m} \rangle$ rayonnée à grande distance travers une sphère centrée sur le dipôle magnétique et de rayon r ?
4. Comparer cette puissance rayonnée moyenne au cas du dipôle électrique $\langle \mathcal{P}_\mathrm{e} \rangle = \frac{\mu_0 p_0^2 \omega^4}{12\pi c}$.
5. En utilisant le modèle planétaire de l'atome d'hydrogène où l'électron décrit une trajectoire circulaire de vitesse $v = \alpha c = c/137$ et de rayon $a = 53$ pm, comparer les rayonnements dipolaires électrique et magnétique d'un atome à fréquence identique. Commenter.

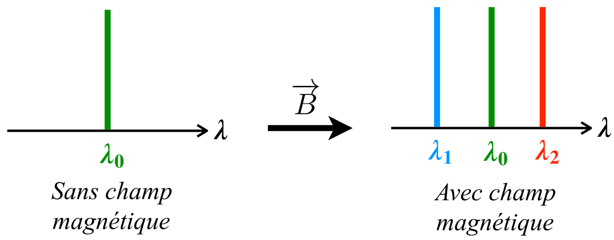
APPROFONDIR

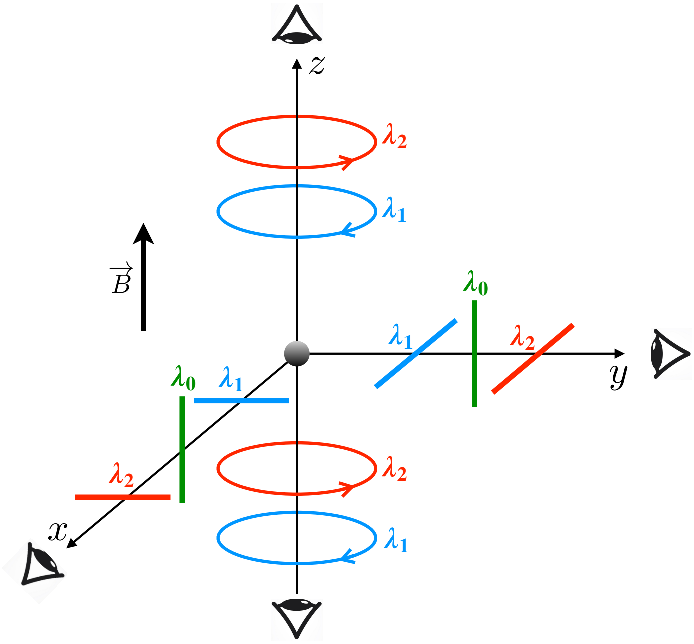
EXERCICE 4 : Effet ZEEMAN

Effet ZEEMAN : *les atomes émettent de la lumière sous forme de raies spectrales : ces raies correspondent aux niveaux d'énergie accessibles pour les électrons de l'atome. Si l'atome subit un champ magnétique $\overrightarrow{B}$ extérieur, les raies spectrales primaires se séparent trois raies secondaires de fréquences légèrement différentes et polarisées différemment :*

- *si l'observation se fait dans la direction du champ $\overrightarrow{B}$, alors la raie centrale disparaît, les deux autres raies sont polarisées circulairement dans deux sens opposés*
- *si l'observation se fait dans la direction orthogonale à $\overrightarrow{B}$, les raies sont polarisées rectilignement : la raie centrale parallèlement à $\overrightarrow{B}$, les deux autres orthogonalement à $\overrightarrow{B}$.*

Cet effet fut découvert en 1896 par Pieter ZEEMAN ce qui lui valu le prix Nobel de physique en 1902.





Pour comprendre cet effet, regardons l'influence d'un champ $\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{e_z}$ uniforme et stationnaire sur la fréquence d'émission d'un atome. Pour cela, on adopte le modèle de l'électron élastiquement lié (de masse m et de charge $-e$). On note ω_0 la pulsation propre de l'électron et on suppose que $\dfrac{eB}{m\omega_0} \ll 1$

1. Écrire les équations du mouvement de l'électron en coordonnées cartésiennes.
2. En déduire $z(t)$.
3. On admet que x et y sont sous la forme complexe $\underline{x}(t) = A_1 e^{j\omega t}$ et $\underline{y}(t) = A_2 e^{j\omega t}$. Montrer qu'il existe alors deux pulsations possibles ω_1 et ω_2 que l'on exprimera en fonction de e, m, B et ω_0.
   Indication : les équations en x et y étant couplées, on écrira le système d'équations sous forme matricielle et on donnera une condition pour avoir une solution (ω_1, ω_2) non nulle.
4. Pour ω_1, puis ω_2, déterminer le rapport $\dfrac{A_2}{A_1}$ et la forme de la trajectoire correspondante de l'électron dans le plan xOy.
5. En décomposant le mouvement de l'électron comme la somme de trois mouvements rectilignes L'atome rayonne et on se place dans les mêmes approximations que pour l'étude d'un dipôle rayonnant. Quelles sont les fréquences détectées dans la direction Oz et la polarisation des ondes électromagnétiques correspondantes ? Même question pour une observation dans la direction Ox.

DONNÉES

— vitesse de la lumière dans le vide $c = 3,0 \cdot 10^8$ m·s^{-1},

— permittivité du vide $\varepsilon_0 = 8,9 \cdot 10^{-12}$ F·m^{-1},

— perméabilité du vide $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H·m^{-1},

— charge d'un électron $-e = -1,6 \cdot 10^{-19}$ C,

— masse d'un électron $m = 9,1 \cdot 10^{-31}$ kg,

Formulaire mathématique

L'expression du rotationnel d'un champ vectoriel $\vec{A}(r,\theta,\varphi,t)$, dans la base $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_\varphi)$ est :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\vec{A}(r,\theta,\varphi,t) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{r\text{sin}\theta}\left(\dfrac{\partial(A_\varphi\text{sin}\theta)}{\partial\theta} - \dfrac{\partial A_\theta}{\partial z}\right) \\ \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{1}{\text{sin}\theta}\dfrac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \dfrac{\partial(rA_\varphi)}{\partial r}\right) \\ \dfrac{1}{r}\left(\dfrac{\partial(rA_\theta)}{\partial x} - \dfrac{\partial A_r}{\partial\theta}\right) \end{pmatrix}.$$