北航中法工程师学院
Centrale Pékin

Équations différentielles

École Centrale de Pékin

Cours de mathématiques du cycle préparatoire

11 octobre 2020

Table des matières

Chapitre 1 Notion d'équations différentielles

Table des matières du chapitre

Ce premier chapitre est une introduction aux équations différentielles. Il introduit le vocabulaire et les notions fondamentales qui seront utilisés dans les prochains chapitres. Il a pour but de préciser un certain nombre de questions que l'on se pose lorsque l'on étudie une équation différentielle et donne quelques éléments de réponse. Nous allons définir ce qu'est une équation différentielle, une solution d'une telle équation, puis un problème de Cauchy. Nous dresserons un catalogue des équations différentielles que nous étudierons plus précisément dans la suite. Nous verrons enfin sous quelles conditions une solution existe et est unique, et nous en donnerons une interprétation géométrique. Nous n'aborderons pas dans ce chapitre relativement abstrait les méthodes pour trouver la forme explicite des solutions de certaines équations différentielles, elles feront l'objet des chapitres suivants. Notons d'ailleurs qu'en général on ne sait pas se résoudre explicitement les équations différentielles. Cela n'empêche pas de pouvoir donner des conditions d'existence et d'unicité, et de savoir étudier les solutions de ces équations différentielles.

Dans tout ce chapitre, n désigne un entier naturel non nul, $\mathbb{K}$ désigne le corps des nombres réels $\mathbb{R}$ ou celui des nombres complexes $\mathbb{C}$, et enfin E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. En pratique, on a généralement $E = \mathbb{K}^N$, où $N \in \mathbb{N}^*$.

1.1 Définitions

Une équation différentielle est une équation portant sur les dérivées d'une fonction. Plus précisément,

Définition 1
Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, Ω un ouvert E^{n+1} et G une application de $I \times \Omega$ dans E. On dit que la relation

$$G(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \tag{$\mathcal{E}$}$$

*est une **équation différentielle d'ordre** n.*

Exemple 2 — *La relation $t^2 y'' + y' - 3ty + \cos(t) = 2t - 5$ est une équation différentielle d'ordre 2, où G est l'application $G : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$; $(t, y_0, y_1, y_2) \longmapsto t^2 y_2 + y_1 - 3ty_0 + \cos(t) - 2t + 5$*

Définition 3
*On appelle **solution** de $\mathcal{E}$ toute application φ d'un intervalle J de $\mathbb{R}$ à valeurs dans E, n fois dérivable et telle que*

1. *pour tout $t \in J$, $\big(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n)}(t)\big) \in I \times \Omega$,*
2. *pour tout $t \in J$, $G\big(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n)}(t)\big) = 0$.*

Lorsque l'on donne une solution d'une équation différentielle, il ne faut pas oublier de préciser son intervalle de définition.

REMARQUE 4 — *Lorsque l'on demande de résoudre une équation différentielle sur un intervalle J, cela signifie que l'on cherche les solutions définies sur J.*

EXEMPLES 5

- *Une solution de l'équation différentielle $t^2y'' + y' - 3ty + \cos(t) = 2t - 5$ est une application φ d'un intervalle J de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, deux fois dérivable, telle que, pour tout $t \in J$,*

$$t^2\varphi''(t) + \varphi'(t) - 3t\varphi(t) + \cos(t) = 2t - 5.$$

- *Une solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = 0$ est, par exemple, la fonction $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $x \longmapsto 1$.*
- *Des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + y = 0$ sont, par exemple, les fonctions sinus ou cosinus définies sur $\mathbb{R}$.*

Les théorèmes que nous énoncerons porteront sur les équations différentielles dites résolues.

DÉFINITION 6
Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et U un ouvert de E^n. Une équation différentielle est dite ***résolue*** *si elle s'écrit sous la forme*

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \qquad (\mathcal{E}_R)$$

où f est une application de $I \times U$ à valeurs dans E.

Une solution d'une telle équation est donc une application φ d'un intervalle J de $\mathbb{R}$ à valeurs dans E, n fois dérivable et telle que

1. *pour tout $t \in J$, $\left(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t)\right) \in I \times U$,*
2. *pour tout $t \in J$, $\varphi^{(n)}(t) = f\left(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t)\right)$.*

EXEMPLE 7 — *L'équation $y' = y^2 + 1$ est une équation différentielle résolue.*

REMARQUE 8 — *Si f est continue alors toute solution φ de $\mathcal{E}_R$ est de classe $\mathcal{C}^n$ puisque φ est n fois dérivable et $\varphi^{(n)}$ est continue par continuité de f.*

REMARQUE 9 — *Les équations différentielles non résolues de la forme $h(t)y^{(n)} = g(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ où h est une application de I dans $\mathbb{K}$ se ramènent à la forme résolue $\mathcal{E}_R$ sur les intervalles sur lesquels h ne s'annule pas, en divisant par $h(t)$. Pour résoudre l'équation $h(t)y^{(n)} = g(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ sur un intervalle I, l'idée sera donc de résoudre l'équation différentielle résolue sur les intervalles de non annulation de h, puis de "recoller" éventuellement les solutions pour trouver les solutions définies sur I. On parlera de problèmes de raccordement de solutions.*

1.2 Quelques équations différentielles particulières

Nous dressons dans cette partie un catalogue des différentes équations différentielles que nous rencontrerons dans les chapitres suivants.

1.2.1 Équations différentielles scalaires

On se place dans le cas particulier où $E = \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

On considère I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, U un ouvert de $\mathbb{K}^n$ et f est une application continue de $I \times U$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

DÉFINITION 10
L'équation différentielle $y^{(n)} = f(t, y, \dots, y^{(n-1)})$ est appelée ***équation différentielle scalaire*** *d'ordre n.*

Une solution d'une équation différentielle scalaire d'ordre n est donc en particulier une application n fois dérivable d'un intervalle de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Donnons quelques exemples d'équations différentielles scalaires que l'on étudiera.

1. **Les équations différentielles linéaires scalaires.**
   • Les équations différentielles linéaires scalaires d'ordre n sont de la forme
   $$y^{(n)} = a_0(t)y + a_1(t)y' + \ldots + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + b(t),$$
   où les $a_i : I \longrightarrow \mathbb{K}$ et $b : I \longrightarrow \mathbb{K}$ sont des applications continues. Les a_i sont appelés les **coefficients** de l'équation.
   • L'équation différentielle **homogène** ou **sans second membre** associée à l'équation différentielle précédente est l'équation
   $$y^{(n)} = a_0(t)y + a_1(t)y' + \ldots + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}.$$
   Il s'agit du cas où b est l'application nulle.
   • Si les a_i sont des applications constantes, on dit que l'équation est **à coefficients constants**. Elle s'écrit donc sous la forme
   $$y^{(n)} = a_0y + a_1y' + + \ldots + a_{n-1}y^{(n-1)} + b(t),$$
   où pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, $a_i \in \mathbb{K}$ et $b : I \longrightarrow \mathbb{K}$ est une application continue.

   Exemples 11
   - *$y' = 5ty + \mathrm{e}^t$ est une équation différentielle linéaire du premier ordre (ou d'ordre 1).*
   - *$y' - 4y = \cos(2t)$ est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants.*
   - *$y' = x^2y$ est une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre.*
   - *$y'' = x^2y' + \dfrac{1}{x}y + (x+1)\mathrm{e}^{2x}$ est une équation différentielle linéaire du second ordre (ou d'ordre 2).*
   - *$y'' = y$ est une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants.*
   - *$(y')^2 = 2y$ et $y' \times y = 1$ ne sont pas des équations différentielles linéaires.*

2. **Les équations différentielles scalaires à variables séparables**
   Ce sont de les équations différentielles de la forme
   $$y' = g(t)h(y),$$
   où $g : I \longrightarrow \mathbb{K}$ et $h : J \longrightarrow \mathbb{K}$ sont des applications continues.

   Exemple 12 — *L'équation $y' = \dfrac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-y}$ est une équation différentielle scalaire à variables séparables.*

1.2.2 Équations différentielles vectorielles du premier ordre

On se place dans le cas particulier où $n = 1$.

On considère I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, U un ouvert de E et f une application continue de $I \times U$ à valeurs dans E.

Définition 13
*L'équation différentielle $y' = f(t, y)$ est appelée **équation différentielle vectorielle du premier ordre** (ou d'ordre 1).*

Une solution d'une équation différentielle vectorielle du premier ordre est donc en particulier une application dérivable d'un intervalle de $\mathbb{R}$ à valeurs dans le $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

Donnons quelques exemples d'équations différentielles vectorielles que l'on étudiera.

1. **Les équations différentielles linéaires vectorielles du premier ordre**
   • Les équations différentielles linéaires vectorielles du premier ordre sont de la forme
   $$y' = a(t) \cdot y + b(t),$$
   où $a : I \longrightarrow \mathcal{L}(E)$ et $b : I \longrightarrow E$ sont des applications continues.
   • L'équation différentielle **homogène** ou **sans second membre** associée à l'équation différentielle précédente est l'équation
   $$y' = a(t) \cdot y.$$
   Il s'agit du cas où b est l'application nulle.
   • Si l'application a est constante, on dit que l'équation est **à coefficient constant**. Elle s'écrit donc sous la forme
   $$y' = a \cdot y + b(t),$$
   où $a \in \mathcal{L}(E)$ et $b : I \longrightarrow E$ est une application continue.
   • Soient N la dimension de E et $\mathcal{B}$ une base de E. En notant $A(t) = (a_{i,j}(t))_{\substack{i=1\ldots N \\ j=1\ldots N}}$ la matrice de $a(t)$ dans la base $\mathcal{B}$ et $B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_N(t) \end{pmatrix}$ le vecteur colonne des composantes de $b(t)$ dans la base $\mathcal{B}$, l'équation différentielle $y' = a(t) \cdot y + b(t)$ s'écrit sous forme matricielle
   $$Y' = A(t)Y + B(t).$$
   Alors $\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_N \end{pmatrix}$ est solution de $Y' = A(t)Y + B(t)$ si et seulement si $(\varphi_1, \ldots, \varphi_N)$ est solution du système différentiel linéaire scalaire du premier ordre suivant
   $$\left\{ \begin{array}{lcl} y_1' & = & a_{11}(t)y_1 + \ldots + a_{1N}(t)y_N + b_1(t) \\ \vdots & & \\ y_N' & = & a_{N1}(t)y_1 + \ldots + a_{NN}(t)y_n + b_N(t). \end{array} \right.$$

   Remarque 14 — *En pratique, on a généralement $E = \mathbb{K}^N$ et en considérant la base canonique, on confondra alors l'endomorphisme $a(t) \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^N)$ avec sa représentation matricielle $A(t) \in \mathcal{M}_N(\mathbb{K})$ et le vecteur $b(t) \in \mathbb{K}^N$ avec le vecteur colonne $B(t) \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{K})$.*

   Exemples 15
   - $Y' = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} \ln(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *est une équation différentielle linéaire vectorielle du premier ordre.*
   - $Y' = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \\ 0 \end{pmatrix}$ *est une équation différentielle linéaire vectorielle du premier ordre à coefficients constants.*
   - $Y' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} Y$ *est une équation différentielle linéaire vectorielle homogène du premier ordre à coefficients constants.*
   - $\left\{ \begin{array}{l} x' = 5x - y \\ y' = x + 3y \end{array} \right.$ *est un système d'équations différentielles linéaires scalaires du premier ordre.*

2. **Les équations différentielles autonomes**
   Ce sont les équations différentielles de la forme
   $$y' = f(y),$$
   où f est une application de I dans E.

   Exemple 16 — *Les équations $y' = \sqrt{y}$ et $Y' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont des équations différentielles autonomes.*

1.2.3 De l'ordre n à l'ordre 1

Les équations différentielles scalaires d'ordre n se ramènent aux équations différentielles vectorielles du premier ordre. Ceci nous permettra en particulier de ramener l'étude de certaines équations différentielles linéaires scalaires d'ordre n à celle des équations différentielles linéaires vectorielles d'ordre 1.

Plus précisément, considérons I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, J un intervalle inclus dans I, U un ouvert de $\mathbb{K}^n$ et $f : I \times U \longrightarrow \mathbb{K}$ une application continue.

Alors l'application

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathcal{D}^n(I, \mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{D}^1\left(I, \mathbb{K}^n\right) \\ & \varphi & \longmapsto & \begin{pmatrix} \varphi \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)} \end{pmatrix} \end{array}$$

induit une bijection de l'ensemble $\mathcal{S}_n(J)$ des solutions définies sur J de $y^{(n)} = f(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ sur l'ensemble $\mathcal{S}_1(J)$ des solutions définies sur J de $Y' = F(t, Y)$, où

$$F : I \times U \longrightarrow \mathbb{K}^n \ ; \ \left(t, \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}\right) \longmapsto \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ f(t, y_0, \ldots, y_{n-1}) \end{pmatrix}.$$

Preuve — • Soit $\varphi \in \mathcal{S}_n(J)$. L'application $\varphi : J \longrightarrow \mathbb{K}$ est donc une solution de $y^{(n)} = f\left(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right)$ sur J. Alors φ est n fois dérivable donc $\Phi(\varphi)$ est dérivable et, pour tout $t \in J$,

$$(\Phi(\varphi))'(t) = \begin{pmatrix} \varphi'(t) \\ \varphi''(t) \\ \vdots \\ \varphi^{(n)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi'(t) \\ \varphi''(t) \\ \vdots \\ f(t, \varphi(t), \varphi'(t), \ldots, \varphi^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} = F\left(t, \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \varphi'(t) \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}\right) = F\left(t, \Phi(\varphi)(t)\right).$$

Donc $\Phi(\varphi) : J \longrightarrow \mathbb{K}^N$ est solution de $Y' = F(t, Y)$. D'où, $\Phi(\varphi) \in \mathcal{S}_1(J)$.

Ainsi, $\Phi\left(\mathcal{S}_n(J)\right) \subset \mathcal{S}_1(J)$.

On peut donc considérer l'application induite $\tilde{\Phi} : \mathcal{S}_n(J) \longrightarrow \mathcal{S}_1(J)$.

• L'application $\tilde{\Phi}$ est injective puisque si φ_1 et φ_2 sont des éléments de $\mathcal{S}_n(J)$ tels que $\tilde{\Phi}(\varphi_1) = \tilde{\Phi}(\varphi_2)$ alors par égalité des composantes, on a $\varphi_1 = \varphi_2$.

• Montrons que $\tilde{\Phi}$ est surjective. Soit $\begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \vdots \\ \varphi_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_1(J)$, une solution de $Y' = F(t, Y)$ sur l'intervalle J. Alors pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, φ_i est dérivable et pour tout $t \in J$, on a

$$\begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \vdots \\ \varphi_{n-2} \\ \varphi_{n-1} \end{pmatrix}'(t) = \begin{pmatrix} \varphi_0'(t) \\ \vdots \\ \varphi_{n-2}'(t) \\ \varphi_{n-1}'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \vdots \\ \varphi_{n-1}(t) \\ f\left(t, \varphi_0(t), \ldots, \varphi_{n-1}(t)\right) \end{pmatrix}.$$

Ainsi, pour tout $i \in [\![0, n-2]\!]$, $\varphi_i' = \varphi_{i+1}$ et pour tout $t \in J$, $\varphi_{n-1}'(t) = f(t, \varphi_0(t), \ldots, \varphi_{n-1}(t))$.

On en déduit que φ_0 est dérivable, de dérivée φ_1 elle-même dérivable, et ainsi de suite, φ_0 est n fois dérivable. et pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, $\varphi_i = \varphi_0^{(i)}$.

Donc pour tout $t \in J$,

$$\varphi_0^{(n)}(t) = (\varphi_0^{(n-1)})'(t) = (\varphi_{n-1})'(t) = f\left(t, \varphi_0(t), \ldots, \varphi_{n-1}(t)\right) = f(t, \varphi_0(t), \varphi_0'(t), \ldots, \varphi_0^{(n-1)}(t)).$$

Donc $\varphi_0 : J \longrightarrow \mathbb{K}$ est une solution définie sur J de $y^{(n)} = f(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$, et donc $\varphi_0 \in \mathcal{S}_n(J)$.

Comme $\tilde{\Phi}(\varphi_0) = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \vdots \\ \varphi_{n-1} \end{pmatrix}$, on en déduit que $\tilde{\Phi}$ est surjective.

• L'application $\tilde{\Phi}$ est donc bijective. D'où le résultat. $\square$

On pourra donc retenir que l'équation $y^{(n)} = f(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ $(\mathcal{E}_n)$ est équivalente à l'équation $Y' = F(t, Y)$ $(\mathcal{E}_1)$, dans le sens où si φ est solution de $(\mathcal{E}_n)$ alors $\begin{pmatrix} \varphi \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)} \end{pmatrix}$ est solution de $(\mathcal{E}_1)$ et si $\begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \vdots \\ \varphi_{n-1} \end{pmatrix}$ est solution de $(\mathcal{E}_1)$ alors φ_0 est solution de $(\mathcal{E}_n)$.

Exemple 17 — *L'étude de équation différentielle, d'ordre 2, $y'' + 4ty' + 2y = 0$ se ramène à celle de l'équation différentielle, d'ordre 1, $Y' = f(t, Y)$, où*

$$F\left(t, \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y_1 \\ -4ty_1 - 2y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -4t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

Précisément, φ est solution de l'équation différentielle, d'ordre 2, $y'' + 4ty' + 2y = 0$ si et seulement si $\begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi' \end{pmatrix}$ est solution de l'équation différentielle, d'ordre 1, $Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -4t \end{pmatrix} Y$.

1.3 Problème de Cauchy

Les questions naturelles qui se posent lorsque l'on étudie une équation différentielle sont de savoir trouver des solutions, mais aussi leur intervalle maximal d'existence, de savoir si on a obtenu toutes les solutions, et en particulier d'obtenir éventuellement l'unicité lorsque l'on rajoute des conditions initiales. Nous discutons dans cette partie des questions d'existence, d'unicité et d'intervalles de définition des solutions. Le calcul explicite, s'il est possible, de ces solutions fera l'objet de chapitres plus spécifiques.

Dans cette partie, on considère I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, U un ouvert de E^n et f une application continue de $I \times U$ dans E.

On s'intéresse à l'équation différentielle

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \qquad (\mathcal{E}_R)$$

1.3.1 Définition

Définition 18
Soit $(t_0, y_0, \ldots, y_{n-1}) \in I \times U$. On appelle ***problème de Cauchy***

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(t, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \\ y(t_0) = y_0, \\ y'(t_0) = y_1, \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}, \end{cases}$$

la recherche de la (ou les) solution φ de $\mathcal{E}_R$ définie sur un intervalle J contenant t_0 et telle que $\varphi(t_0) = y_0$, $\varphi'(t_0) = y_1$, … $\varphi^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}$.

On dit qu'une telle solution φ satisfait à la condition initiale $y(t_0) = y_0$, … , $y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}$.

Exemple 19 — *La fonction $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $t \longmapsto 2e^{-t}$ est une solution du problème de Cauchy*

$$\begin{cases} y' + y = 0 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Remarque 20 — *Si l'équation $\mathcal{E}_R$ décrit la loi d'évolution d'un système physique au cours du temps, résoudre le problème de Cauchy revient à trouver l'évolution du système connaissant son état en t_0.*

1.3.2 Solutions maximales et globales

Pour définir une solution d'une équation différentielle, il faut préciser un intervalle de définition. La fonction $t \longmapsto \mathrm{e}^t$ est une solution de $y' = y$ sur $]1, 2[$ mais aussi sur $\mathbb{R}$ et donc sur tout intervalle de $\mathbb{R}$. Il est donc intéressant de fournir le plus grand intervalle possible.

Définition 21
Soient $\varphi_1 : J_1 \longrightarrow E$ et $\varphi_2 : J_2 \longrightarrow E$ deux solutions de $y^{(n)} = f(t, y, \dots, y^{(n-1)})$. On dit que φ_2 est un ***prolongement*** *de φ_1 si $J_1 \subset J_2$ et si, pour tout $t \in J_1$, $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$.*

Exemple 22 — *La fonction $\varphi_1 :]1, 3[\longrightarrow \mathbb{R}$; $t \longmapsto \mathrm{e}^t$ est une solution de l'équation différentielle $y' = y$ qui prolonge la fonction $\varphi_2 :]1, 2[\longrightarrow \mathbb{R}$; $t \longmapsto \mathrm{e}^t$.*

Définition 23
Une solution $\varphi : J \longrightarrow E$ de $y^{(n)} = f(t, y, \dots, y^{(n-1)})$ est dite ***maximale*** *si elle n'admet pas de prolongement qui soit solution.*

Remarque 24 — *La question de l'unicité dans le problème de Cauchy nécessite de considérer les solutions maximales.*

Définition 25
On appelle ***solution globale*** *de $\mathcal{E}_R$ toute solution définie sur l'intervalle I tout entier.*

Proposition 26
Une solution globale est une solution maximale. La réciproque est fausse en général.

Preuve — • Une solution globale étant définie sur I en entier, elle ne peut pas être prolongée et elle est donc maximale.

• Donnons l'exemple d'une solution maximale non globale. Considérons le problème de Cauchy $\begin{cases} y' = y^2, \\ y(0) = y_0 > 0 \end{cases}$. On a $f(t, y) = y^2$, définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et $I = \mathbb{R}$. La fonction $\varphi : \left]-\infty ; \frac{1}{y_0}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$; $t \longmapsto \dfrac{y_0}{1 - y_0 t}$ est une solution de ce problème de Cauchy sur $\left]-\infty ; \frac{1}{y_0}\right[$ (nous verrons par la suite comment trouver une telle solution). Comme φ tend vers l'infini lorsque t tend vers $\dfrac{1}{y_0}$, elle ne peut pas admettre de prolongement continu. Cette solution est donc maximale mais n'est pas globale. □

Exemple 27 — *La fonction $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $x \longmapsto \exp(x)$ est une solution globale, donc maximale, de l'équation différentielle $y' = y$.*

1.3.3 Existence et unicité des solutions

Dans le cas linéaire à coefficients continus, les théorèmes suivants donnent l'existence et l'unicité d'une solution globale avec une condition initiale.

Théorème 28 (Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, cas vectoriel du premier ordre)
Soit $(t_0, y_0) \in I \times E$. Soient $a \in \mathcal{C}(I, \mathcal{L}(E))$ et $b \in \mathcal{C}(I, E)$. Alors il existe une unique solution $\varphi : I \longrightarrow E$ au problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = a(t) \cdot y + b(t), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

En particulier, φ est une solution globale.

Théorème 29 (Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, cas scalaire d'ordre n)
Soit $(t_0, y_0, \dots, y_{n-1}) \in I \times \mathbb{K}^n$. Soient a_0, …, a_{n-1} et b des applications continues de I dans $\mathbb{K}$. Alors il

existe une unique solution $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{K}$ *au problème de Cauchy*

$$\begin{cases} y^{(n)} = a_0(t)y + \ldots + a_{n-1}y^{(n-1)} + b(t), \\ y(t_0) = y_0, \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}. \end{cases}$$

En particulier, φ *est une solution globale.*

Dans le cas linéaire à coefficients continus, tout problème de Cauchy admet donc une unique solution définie sur I tout entier.

Lorsque l'équation différentielle n'est plus linéaire, on peut encore, sous certaines hypothèses sur la fonction f, assurer l'existence et l'unicité au problème de Cauchy, mais les solutions ne seront pas nécessairement globales.

Théorème 30 (Théorème de Cauchy-Lipschitz)
Soit $(t_0, y_0) \in I \times U$*. Supposons* f *de classe* $\mathcal{C}^1$*. Alors il existe une unique solution maximale* $\varphi_m : J_m \longrightarrow E$ *au problème de Cauchy*

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

De plus, l'intervalle de définition J_m *de* φ_m *est ouvert et cette solution maximale* φ_m *est un prolongement de toute autre solution à ce même problème de Cauchy.*

Théorème 31 (Théorème de Cauchy-Lipschitz, cas scalaire d'ordre n)
Soit $(t_0, y_0, \ldots, y_{n-1}) \in I \times U$*. Supposons* f *de classe* $\mathcal{C}^1$*. Alors il existe une unique solution maximale* $\varphi_m : J_m \longrightarrow \mathbb{K}$ *au problème de Cauchy*

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(t, y, \ldots, y^{(n-1)}) \\ y(t_0) = y_0 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1} \end{cases}$$

De plus, l'intervalle de définition J_m *de* φ_m *est ouvert et cette solution maximale* φ_m *est un prolongement de toute autre solution à ce même problème de Cauchy.*

Exemple 32 — *L'application* $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ (t, y) \longmapsto y^2$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$*. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} y' = y^2, \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

admet une et une seule une solution maximale définie sur un intervalle ouvert.

Remarques 33

- *Sous la seule hypothèse de continuité de* f*, on n'a pas en général, d'unicité de la solution d'un problème de Cauchy. Par exemple, il n'y a pas unicité au problème de Cauchy* $\begin{cases} y' = 3(y^2)^{\frac{1}{3}} \\ y(0) = 0. \end{cases}$. *L'application nulle et l'application* $\varphi_0 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto t^3$ *sont, par exemple, deux solutions de ce problème de Cauchy sur* $\mathbb{R}$.
- *Ce théorème est encore vrai avec des hypothèses sur la fonction* f *un peu plus faibles que* $\mathcal{C}^1$*, mais l'on rencontre généralement ce cas en pratique. Sous ces hypothèses plus faibles, le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire peut se voir alors comme une conséquence du théorème de Cauchy-Lipschitz.*
- *Ce théorème ne précise pas l'intervalle de définition de la solution maximale.*

Ces théorèmes donnent donc l'existence et l'unicité de solutions sous certaines hypothèses mais ne donnent pas de méthode de résolution. Nous verrons dans les prochains chapitres les techniques de calcul pour trouver la forme explicite des solutions, plus nombreuses dans le cas linéaire que non linéaire.

1.4 Interprétation géométrique

Plaçons-nous dans le cas scalaire du premier ordre : $y' = f(t,y)$ où f est une application à valeurs réelles.

Si φ est une solution de cette équation différentielle et si (t,y) est un point du graphe de φ alors $y = \varphi(t)$ et en ce point, la pente de la tangente est $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) = f(t,y)$. À chaque point (t,y) du plan, on associe alors un vecteur dont la direction est donnée par la pente $f(t,y)$, par exemple le vecteur $(1, f(t,y))$. L'ensemble de ces vecteurs d'origine (t,y) est appelé le **champ de vecteurs** associé à l'équation différentielle $y' = f(t,y)$.

Le graphe d'une solution est en tout point tangent au champ de vecteurs.

Définition 34
*On appelle **courbe intégrale** d'une équation différentielle la courbe représentative d'une solution maximale de cette équation différentielle.*

Sous les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz, par un point $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$ du plan, il passe une courbe intégrale et une seule. Ainsi, deux courbes intégrales ne peuvent pas se couper.

Le tracé du champ de vecteurs permet de deviner le comportement des solutions.

Donnons quelques exemples.

Exemples 35

- *Sur la figure 1, on a tracé le champ de vecteurs associé à l'équation différentielle $y' = -\dfrac{1}{2}y$. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire à coefficient constant donc continu. Le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire nous dit donc que tout problème de Cauchy admet une unique solution globale, définie sur $\mathbb{R}$. Ainsi, à tout point du plan, il passe une unique courbe intégrale.*
  Plusieurs courbes intégrales sont ici tracées. Elles correspondent aux graphes des solutions de $y' = -\dfrac{1}{2}y$. La courbe mauve passe par le point $(0,3)$, elle représente donc LA solution qui vérifie de plus la condition initiale $y(0) = 3$. On voit également que les solutions tendent vers 0 en $+\infty$. Enfin, seule la droite $y = 0$ passe par le point $(0,0)$: l'application nulle est l'unique solution du problème de Cauchy $\left\{ \begin{array}{l} y' = -\dfrac{1}{2}y, \\ y(0) = 0 \end{array} \right.$.
- *Sur la figure 2, on a tracé le champ de vecteurs associé à l'équation différentielle $y' = 3(y^2)^{\frac{1}{3}}$. Nous avons vu à la remarque 33 que le théorème de Cauchy-Lipschitz ne s'applique pas (on n'est pas dans le cas $\mathcal{C}^1$) et qu'il n'y a pas unicité du problème de Cauchy.*
  Des courbes intégrales passant par le point $(0,0)$ sont ici tracées. Il existe donc plusieurs, et même une infinité, de courbes intégrales passant par le point $(0,0)$. Cela traduit le fait que le problème de Cauchy $\left\{ \begin{array}{l} y' = 3(y^2)^{\frac{1}{3}}, \\ y(0) = 0 \end{array} \right.$. admet une infinité de solutions. Il n'y a pas unicité.
- *Sur la figure 3, on a tracé le champ de vecteurs associé à l'équation différentielle $y' = y^2$. La fonction $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $(t,y) \longmapsto y^2$ étant de classe $\mathcal{C}^1$, le théorème de Cauchy-Lipschitz nous dit que tout problème de Cauchy admet une unique solution maximale. Ainsi, à tout point du plan, il passe une et seule courbe intégrale. Cependant, nous avons vu à la proposition 26 qu'une solution maximale n'est pas forcément globale. Nous en avions donné un exemple.*
  Deux courbes intégrales sont ici tracées. Elles admettent une asymptote verticale. Elles représentent donc des solutions maximales mais non globales car elles ne sont pas définies sur $\mathbb{R}$.

Chapitre 2 Équations différentielles scalaires

Dans tout ce chapitre, n désigne un entier naturel non nul, $\mathbb{K}$ désigne le corps des nombres réels $\mathbb{R}$ ou celui des nombres complexes $\mathbb{C}$.

2.1 Équations différentielles linéaires scalaires

Dans cette partie, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

2.1.1 Résultats généraux

On s'intéresse à l'équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n

$$y^{(n)} = a_0(t)y + a_1(t)y' + \ldots + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + b(t), \qquad (E)$$

où pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $a_i : I \longrightarrow \mathbb{K}$ et $b : I \longrightarrow \mathbb{K}$ sont des fonctions continues.

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions maximales de l'équation (E) et $\mathcal{S}_h$ l'ensemble des solutions maximales de l'équation homogène associée

$$y^{(n)} = a_0(t)y + a_1(t)y' + \ldots + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}. \qquad (E_h)$$

D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire (voir chapitre 1), les solutions des équations (E) et (E_h) sont globales et définies sur I.

Proposition 1
L'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions de l'équation homogène (E_h) est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$.

Preuve — L'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions de (E_h) est le noyau de l'application linéaire

$$\begin{array}{rccl} \ell : & \mathcal{C}^n(I,\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{C}(I,\mathbb{K}) \\ & \varphi & \longmapsto & \varphi^{(n)} - a_0(t)\varphi - \ldots - a_{n-1}(t)\varphi^{(n-1)} \end{array}.$$

$\mathcal{S}_h$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$.

□

Proposition 2
L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation (E) est un espace affine dirigé par l'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions de l'équation homogène (E_h) :

$$\mathcal{S} = \varphi_p + \mathcal{S}_h,$$

où $\varphi_p \in \mathcal{S}$.

Preuve — D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, l'ensemble $\mathcal{S}$ est non vide. Il existe donc un élément φ_p de $\mathcal{S}$.

Soit $\varphi \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$. Alors $\varphi \in \mathcal{S}$ si et seulement si, pour tout $t \in I$,

$$\varphi^{(n)}(t) = a_0(t)\varphi(t) + \ldots + a_{n-1}(t)\varphi^{(n-1)}(t) + b(t),$$

soit encore, si et seulement si, pour tout $t \in I$,

$$\begin{aligned}(\varphi - \varphi_p)^{(n)}(t) &= \varphi^{(n)}(t) - \varphi_p^{(n)}(t) = a_0(t)\varphi(t) + \ldots + a_{n-1}(t)\varphi^{(n-1)}(t) + b(t) - \left(a_0(t)\varphi_p(t) + \ldots + a_{n-1}(t)\varphi_p^{(n-1)}(t) + b(t)\right) \\ &= a_0(t)\left(\varphi - \varphi_p\right)(t) + \ldots + a_{n-1}(t)\left(\varphi - \varphi_p\right)^{(n-1)}(t).\end{aligned}$$

Donc $\varphi \in \mathcal{S}$ si et seulement si $\varphi - \varphi_p \in \mathcal{S}_h$.

Donc $\mathcal{S} = \varphi_p + \mathcal{S}_h$. □

On redémontrera ce théorème dans certains cas sans utiliser le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, que nous n'avons pas démontré dans le premier chapitre.

En d'autres termes, si l'on connait une solution particulière φ_p de (E), alors l'ensemble des solutions de (E) est $\mathcal{S} = \varphi_p + \mathcal{S}_h$. Ainsi, pour trouver l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E), on cherche l'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions de l'équation homogène associée (E_h) et une solution particulière de (E).

MÉTHODE 3 — *Pour résoudre une équation différentielle linéaire scalaire non homogène (E), on procédera de la façon suivante :*

1. *On identifie le type de l'équation différentielle (E) étudiée.*
2. *On donne l'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions de l'équation homogène associée (E_h).*
3. *On cherche une solution particulière φ_p de l'équation (E)*
4. *On conclut en donnant l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation (E) : $\mathcal{S} = \varphi_p + \mathcal{S}_h$.*

Le principe de superposition des solutions énoncé ci-dessous est très utile en pratique car il permet de rechercher une solution particulière en décomposant le second membre en des membres plus simples.

PROPOSITION 4 (Principe de superposition)
Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ des éléments de $\mathbb{K}$ et $b_1, \ldots, b_N$ des applications continues de I dans $\mathbb{K}$. Supposons que pour tout $i \in [\![1, N]\!]$, φ_i est une solution particulière de l'équation

$$y^{(n)} = a_0(t)y + a_1(t)y' + \ldots + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + b_i(t).$$

Alors $\lambda_1\varphi_1 + \ldots \lambda_N\varphi_N$ est une solution particulière de l'équation

$$y^{(n)} = a_0(t)y + a_1(t)y' + \ldots + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \lambda_1 b_1(t) + \ldots + \lambda_N b_N(t).$$

Preuve — Considérons l'application linéaire

$$\begin{array}{rccl} \ell : & \mathcal{C}^n(I, \mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{C}(I, \mathbb{K}) \\ & \varphi & \longmapsto & \varphi^{(n)} - a_0(t)\varphi - \ldots - a_{n-1}(t)\varphi^{(n-1)} \end{array}.$$

Par hypothèse, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $\ell(\varphi_i) = b_i$.

Par linéarité de ℓ, on a alors $\ell(\lambda_1\varphi_1 + \ldots + \lambda_N\varphi_N) = \lambda_1\ell(\varphi_1) + \ldots + \lambda_N\ell(\varphi_N) = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_N b_N$.

Donc $\lambda_1\varphi_1 + \ldots + \lambda_N\varphi_N$ est une solution particulière de

$$y^{(n)} = a_0(t)y + a_1(t)y' + \ldots + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \lambda_1 b_1(t) + \ldots + \lambda_N b_N(t).$$

□

EXEMPLE 5 — *Pour trouver une solution particulière sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle*

$$y' + y = \cos(x) + (x+1)\mathrm{e}^{-x},$$

on peut donc chercher une solution particulière φ_1 de l'équation différentielle $y' + y = \cos(x)$ puis une solution particulière φ_2 de l'équation différentielle $y' + y = (x+1)\mathrm{e}^{-x}$, et enfin les additionner. Ainsi, au lieu d'un calcul compliqué, on se ramène à deux calculs plus simples.

2.1.2 Équations différentielles linéaires scalaires du premier ordre

On s'intéresse aux équations différentielles linéaires scalaires du premier ordre de la forme

$$y' = a(t)y + b(t), \tag{E_1}$$

où a et b sont des applications de I dans $\mathbb{K}$ continues.

2.1.2.a. Ensemble des solutions de l'équation homogène

PROPOSITION 6
Soient $a \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ et A une primitive de a sur I.

1. *L'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions de l'équation homogène $y' = a(t)y$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 1 engendré par l'application $I \longrightarrow \mathbb{K}$; $t \longmapsto \exp(A(t))$:*

$$\mathcal{S}_h = \{I \longrightarrow \mathbb{K} \,;\, t \longmapsto \lambda \exp(A(t)) \mid \lambda \in \mathbb{K}\}.$$

2. *Soient $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$. Le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} y' = a(t)y \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

possède une et une seule solution définie sur I, qui est l'application

$$I \longrightarrow \mathbb{K}\ ;\ t \longmapsto y_0 \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\mathrm{d}s\right).$$

Preuve —

1. $\triangleright$ Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Posons $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{K}\ ;\ t \longmapsto \lambda \mathrm{e}^{A(t)}$. Alors, φ est dérivable et pour tout $t \in I$, $\varphi'(t) = \lambda a(t)\mathrm{e}^{A(t)} = a(t)\varphi(t)$. Donc φ est solution de $y' = a(t)y$.
   $\triangleleft$ Réciproquement, soit φ une solution de l'équation $y' = a(t)y$. Posons, pour tout $t \in I$, $\psi(t) = \varphi(t)e^{-A(t)}$.
   Alors, φ étant dérivable, ψ l'est aussi et pour tout $t \in I$, $\psi'(t) = e^{-A(t)}\left(\varphi'(t) - a(t)\varphi(t)\right) = e^{-A(t)} \times 0 = 0$.
   Il existe donc $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que pour tout $t \in I$, $\psi(t) = \lambda$.
   Donc pour tout $t \in I$, $\varphi(t)e^{-A(t)} = \lambda$, soit $\varphi(t) = \lambda \mathrm{e}^{A(t)}$.
   D'où le résultat.
2. D'après le premier point, $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{K}$ est solution du problème de Cauchy si et seulement si pour tout $t \in I$, $\varphi(t) = \lambda \mathrm{e}^{A(t)}$ où $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\varphi(t_0) = y_0$, soit si et seulement si $\lambda = y_0\mathrm{e}^{-A(t_0)}$.
   Il existe donc une unique solution au problème de Cauchy, qui est l'application

$$I \longrightarrow \mathbb{K}\ ;\ t \longmapsto y_0\mathrm{e}^{A(t)-A(t_0)} = y_0\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} a(s)\mathrm{d}s}.$$

□

REMARQUE 7 — *Dans le cas particulier où a est une constante, les solutions de l'équation homogène $y' = ay$ sont les fonctions $I \longrightarrow \mathbb{K}\ ;\ t \longmapsto \lambda e^{at}$, où $\lambda \in \mathbb{K}$.*

EXEMPLES 8

- *Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle*

$$y' = \frac{1}{1+t^2}y., \tag{1}$$

  – Identification : *Il s'agit d'une équation différentielle linéaire homogène scalaire du premier ordre à coefficients continus sur $\mathbb{R}$.*

  –Solutions de l'équation homogène : *L'application $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ admet comme primitive sur $\mathbb{R}$ l'application*

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \arctan(t).$$

  L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de (1) est donc le $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 1 engendré par la fonction $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longrightarrow \exp(\arctan(t))$:

$$\mathcal{S}_h = \{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \lambda \exp(\arctan(t)) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

- *Déterminons sur $\mathbb{R}$ la solution du problème de Cauchy* $\begin{cases} y' = \dfrac{1}{1+t^2}y, \\ y(0) = 1. \end{cases}$

  D'après le point précédent, on connaît l'ensemble des solutions de l'équation (1), elles sont de la forme $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \lambda \exp(\arctan(t))$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.
  La condition initiale $y(0) = 1$ donne alors $\lambda = 1$.
  Donc l'unique solution de ce problème de Cauchy sur $\mathbb{R}$ est l'application

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \exp(\arctan(t)).$$

2.1.2.b. Ensemble des solutions de l'équation avec second membre

Proposition 9
Soient a et b deux éléments de $\mathcal{C}(I,\mathbb{K})$.

1. *L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation $y' = a(t)y + b(t)$ (E_1) est un espace affine de dimension 1 dirigé par l'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions de l'équation homogène :*

$$\mathcal{S} = \{I \longrightarrow \mathbb{K}\ ;\ t \longmapsto \varphi_p(t) + \lambda \exp(A(t)) \mid \lambda \in \mathbb{K}\} = \varphi_p + \mathcal{S}_h,$$

   où φ_p est une solution particulière de (E_1).

2. *Soient $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$. Le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} y' = a(t)y + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

   possède une et une seule solution définie sur I, qui est l'application

$$I \longrightarrow \mathbb{K}\ ;\ t \longmapsto \int_{t_0}^{t} b(s)\mathrm{e}^{\int_s^t a(\sigma)\mathrm{d}\sigma}\mathrm{d}s + y_0\mathrm{e}^{\int_{t_0}^t a(s)\mathrm{d}s}.$$

Preuve — On démontre ainsi le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire dans le cas linéaire scalaire d'ordre 1.

1. D'après le paragraphe précédent, les solutions de l'équation homogène $y' = a(t)y$ sont de la forme $t \longmapsto \lambda\mathrm{e}^{A(t)}$, où $\lambda \in \mathbb{K}$ et A est une primitive de a sur I.
   La *méthode de variation de la constante* consiste à chercher une solution de l'équation (E_1) sous la forme $\varphi(t) = \psi(t)\mathrm{e}^{A(t)}$, où ψ est une fonction de I dans $\mathbb{K}$. Ce principe de résolution est appelé *méthode de variation de la constante.*
   Soit $t_0 \in I$. Soit φ une fonction de I dans $\mathbb{K}$ dérivable. Posons, pour tout $t \in I$, $\psi(t) = \varphi(t)\mathrm{e}^{-A(t)}$, de sorte que $\varphi(t) = \psi(t)\mathrm{e}^{A(t)}$.
   φ étant dérivable, ψ l'est aussi et pour tout $t \in I$, $\varphi'(t) = a(t)\psi(t)\mathrm{e}^{A(t)} + \psi'(t)\mathrm{e}^{A(t)} = a(t)\varphi(t) + \psi'(t)\mathrm{e}^{A(t)}$.
   Donc $\varphi \in \mathcal{S}$ si et seulement si, pour tout $t \in I$, $\psi'(t)\mathrm{e}^{A(t)} = b(t)$, soit, si et seulement si, pour tout $t \in I$, $\psi'(t) = b(t)\mathrm{e}^{-A(t)}$.
   L'application $t \longmapsto b(t)\mathrm{e}^{-A(t)}$ étant continue sur I, $\varphi \in \mathcal{S}$ si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que pour tout $t \in I$, $\psi(t) = \int_{t_0}^t b(s)\mathrm{e}^{-A(s)}\mathrm{d}s + \lambda$, i.e. $\varphi(t) = \mathrm{e}^{A(t)}\int_{t_0}^t b(s)\mathrm{e}^{-A(s)}\mathrm{d}s + \lambda\mathrm{e}^{A(t)}$.
   Ainsi, $\mathcal{S}$ est l'ensemble des applications de la forme

$$\varphi_\lambda : I \longrightarrow \mathbb{K}\ ;\ t \longmapsto \underbrace{\mathrm{e}^{A(t)}\int_{t_0}^t b(s)\mathrm{e}^{-A(s)}\mathrm{d}s}_{\varphi_0 \text{ solution particulière de } (E_1)} + \underbrace{\lambda\mathrm{e}^{A(t)}}_{\in\mathcal{S}_h}.$$

   On en déduit donc le premier point.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. En reprenant les notations précédentes, φ_λ est solution du problème de Cauchy si et seulement si $\varphi_\lambda(t_0) = \lambda\mathrm{e}^{A(t_0)} = y_0$, soit encore, si et seulement si $\lambda = y_0\mathrm{e}^{-A(t_0)}$.
   Il existe donc une unique solution au problème de Cauchy, qui est l'application

$$I \longrightarrow \mathbb{K}\ ;\ t \longmapsto \int_{t_0}^t b(s)\mathrm{e}^{A(t)-A(s)}\mathrm{d}s + y_0\mathrm{e}^{A(t)-A(t_0)} = \int_{t_0}^t b(s)\mathrm{e}^{\int_s^t a(\sigma)\mathrm{d}\sigma}\mathrm{d}s + y_0\mathrm{e}^{\int_{t_0}^t a(s)\mathrm{d}s}.$$

□

En pratique, l'expression de la solution du problème de Cauchy donnée dans la proposition précédente ne sera pas utilisée telle quelle mais la démarche pour l'obtenir pourra être employée. On parle de *méthode de variation de la constante.*

2.1.2.c. Détermination pratique d'une solution particulière

Nous savons résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E_1), il reste maintenant à expliquer comment trouver une solution particulière. On rappelle que l'on peut utiliser le principe de superposition des solutions pour simplifier la recherche d'une solution particulière.

Parfois, on connaît une solution particulière, parce qu'elle apparaît de façon évidente ou qu'elle est suggérée dans un énoncé. Dans ce cas, il ne reste plus qu'à appliquer la proposition 9.

Exemple 10 — *Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle*

$$y' + t^2 y = t^2. \tag{2}$$

- Identification : *Il s'agit d'une équation différentielle linéaire scalaire du premier ordre à coefficients et second membre continus sur $\mathbb{R}$.*
- Solutions de l'équation homogène : *L'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à (2) est*

$$\mathcal{S}_h = \{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \lambda \exp\left(-\frac{t^3}{3}\right) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

- Solution particulière de l'équation : *La fonction $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $t \longmapsto 1$ est une solution particulière évidente de (2).*
- Conclusion : *L'ensemble des solutions de l'équation (2) est donc*

$$\mathcal{S} = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto 1 + \lambda \exp\left(-\frac{t^3}{3}\right) \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

Si aucune solution évidente n'apparaît, on peut utiliser la méthode de variation de la constante, qui reprend la démonstration du point 1. de la proposition 9.

Méthode 11 (Méthode de variation des constantes) — *Cette méthode permet d'obtenir l'expression d'une solution particulière de l'équation (E_1).*

1. *On sait que les solutions de l'équation homogène associée sont de la forme $t \longmapsto \lambda \mathrm{e}^{A(t)}$ où $\lambda \in \mathbb{K}$ et A désigne une primitive de a. On cherche alors une solution particulière sous la forme $\varphi_p(t) = \psi(t)\mathrm{e}^{A(t)}$ où ψ est une fonction dérivable de I dans $\mathbb{K}$.*
2. *En remplaçant dans l'équation (E_1) et après simplification, on obtient que φ_p est solution de (E_1) si et seulement si $\psi'(t)\mathrm{e}^{A(t)} = b(t)$, soit finalement $\psi'(t) = b(t)\mathrm{e}^{-A(t)}$.*
3. *On obtient alors ψ par primitivation, et donc l'expression de φ_p.*

Remarque 12 — *Notons que la méthode de variation de la constante donne en fait plus qu'une simple solution particulière de (E_1), elle donne exactement toutes les solutions.*

Exemple 13 — *Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle*

$$y' + \frac{t}{1+t^2} y = \frac{1}{1+t^2} \tag{3}$$

- Identification : *Il s'agit d'une équation différentielle linéaire scalaire du premier ordre à coefficients et second membre continus sur $\mathbb{R}$.*
- Solutions de l'équation homogène : *Pour tout $t \in \mathbb{R}$,*

$$\int_0^t \frac{-s}{1+s^2}\mathrm{d}s = -\frac{1}{2}\ln\left(1+t^2\right) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right).$$

L'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à (3) est donc

$$\mathcal{S}_h = \{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \frac{\lambda}{\sqrt{1+t^2}} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

- Solution particulière : *Appliquons la méthode de variation de la constante.*

  Cherchons une solution particulière φ_p de (3) sous la forme $\varphi_p(t) = \dfrac{\psi(t)}{\sqrt{1+t^2}}$, où ψ est une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

  Alors φ_p est solution de l'équation si et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\psi'(t)}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{1+t^2},$$

soit encore, si et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\psi'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.
Par exemple, choisissons pour ψ *la fonction* $\psi : t \longmapsto \operatorname{argsh}(t)$.
La fonction $\varphi_p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \dfrac{\operatorname{argsh}(t)}{\sqrt{1+t^2}}$ *est alors une solution particulière de (3).*

– Conclusion : *L'ensemble des solutions de (3) est donc*

$$\mathcal{S} = \{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \frac{\operatorname{argsh}(t) + \lambda}{\sqrt{1+t^2}} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Enfin, notons que dans le cas particulier où l'équation s'écrit sous la forme

$$y' + a_0 y = P(t)e^{\alpha t},$$

où a_0 et α sont des éléments de $\mathbb{K}$ et P est un polynôme, on peut se passer de la méthode de variation de la constante pour obtenir plus rapidement une solution particulière en utilisant le résultat suivant. Bien sûr, la méthode de variation de la constante peut toujours être utilisée !

Proposition 14
Soient a_0 *et* α *des éléments de* $\mathbb{K}$ *et* P *une application polynomiale. L'équation différentielle*

$$y' + a_0 y = P(t)\mathrm{e}^{\alpha t}$$

admet une solution particulière de la forme

$$I \longrightarrow \mathbb{K}\ ;\ t \longmapsto \begin{cases} Q(t)\mathrm{e}^{\alpha t} & \textit{si } \alpha \textit{ n'est pas racine de } X + a_0 \\ tQ(t)\mathrm{e}^{\alpha t} & \textit{sinon,} \end{cases},$$

où Q *est une application polynomiale de même degré que* P.

Exemple 15 — *Résolvons sur* $\mathbb{R}$ *l'équation différentielle*

$$y' - 2y = t\mathrm{e}^t. \tag{4}$$

– Identification : *Il s'agit d'une équation différentielle linéaire scalaire du premier ordre à coefficients constants et second membre continu.*
– Solutions de l'équation homogène : *L'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à (4) est*

$$\mathcal{S}_h = \{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \lambda\mathrm{e}^{2t} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

– Solution particulière : *Les coefficients de l'équation (4) sont constants et le second membre est de la forme polynôme-exponentielle. On peut donc chercher une solution particulière de l'équation différentielle* $y' - 2y = t\mathrm{e}^t$ *sous la forme*

$$\varphi_p(t) = (at + b)\mathrm{e}^t$$

(car ici $\alpha = 1$ *n'est pas racine de* $X - 2$ *et* $P(t) = t$ *est de degré 1).*
Alors φ_p *est solution de l'équation si et seulement si, pour tout* $t \in \mathbb{R}$, $\varphi_p'(t) - 2\varphi_p(t) = t\mathrm{e}^t$. *Après calculs, on trouve* $a = b = -1$ *et donc* $\varphi_p(x) = (-t-1)\mathrm{e}^t$.
– Conclusion *L'ensemble des solutions de l'équation est donc*

$$\mathcal{S} = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \mapsto (-t-1)\mathrm{e}^t + \lambda\mathrm{e}^{2t} \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

Remarque 16 — *Soient* a_0, β *et* ω *des nombres réels et* P *une application polynomiale à coefficients réels. Si le second membre est de la forme* $t \longmapsto P(t)\mathrm{e}^{\beta t}\cos(\omega t)$ *(resp.* $\longmapsto P(t)\mathrm{e}^{\beta t}\sin(\omega t)$*), on peut chercher une solution particulière complexe de l'équation* $y' + a_0 y = P(t)\mathrm{e}^{(\beta + i\omega)t}$ *puis en prendre sa partie réelle (resp. imaginaire).*

Preuve — *Supposons que* $\varphi_{p,\mathbb{C}}$ *soit une solution particulière complexe de* $y' + a_0 y = P(t)\mathrm{e}^{(\beta+i\omega)t}$.

Alors $\mathrm{Re}(\varphi_{p,\mathbb{C}})' + a_0\mathrm{Re}(\varphi_{p,\mathbb{C}}) = \mathrm{Re}\left(\varphi'_{p,\mathbb{C}} + a_0\varphi_{p,\mathbb{C}}\right) = \mathrm{Re}\left(P(t)\mathrm{e}^{(\beta+i\omega)t}\right) = P(t)\mathrm{e}^{\beta t}\cos(\omega t)$.

Donc $\mathrm{Re}(\varphi_{p,\mathbb{C}})$ *est une solution particulière de* $y' + a_0 y = P(t)\mathrm{e}^{\beta t}\cos(\omega t)$. □

EXEMPLE 17 — *Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle*

$$y' + y = 2\cos(t) + \sin(t). \tag{5}$$

- Identification ; *Il s'agit d'une équation différentielle linéaire scalaire du premier ordre à coefficients constants et second membre continu sur $\mathbb{R}$.*
- Solutions de l'équation homogène : *L'ensemble des solutions de l'équation homogène est*

$$\mathcal{S}_h = \{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \lambda \mathrm{e}^{-t} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

- Solution particulière : *Nous allons utiliser le principe de superposition des solutions.*
  - *Commençons par chercher une solution particulière complexe de $y' + y = \mathrm{e}^{it}$ sous la forme $\varphi_{p,\mathbb{C}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}\ ;\ t \longmapsto c\,\mathrm{e}^{it}$, où $c \in \mathbb{C}$ (car i n'est pas racine de $X+1$ et P est de degré 0). Après calculs, on trouve $c = \dfrac{1}{1+i} = \dfrac{1-i}{2}$ et donc $\varphi_{p,\mathbb{C}}(t) = \dfrac{1-i}{2}\mathrm{e}^{it}$.*
  - *Une solution particulière de $y' + y = \cos(t)$ est donc $\varphi_{p,1} = \mathrm{Re}(\varphi_{p,\mathbb{C}})$, c'est-à-dire*

$$\varphi_{p,1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \frac{1}{2}\cos(t) + \frac{1}{2}\sin(t).$$

  - *Une solution particulière de $y' + y = \sin(t)$ est donc $\varphi_{p,2} = \mathrm{Im}(\varphi_{p,\mathbb{C}})$, c'est-à-dire*

$$\varphi_{p,2} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto -\frac{1}{2}\cos(t) + \frac{1}{2}\sin(t).$$

  - *Par le principe de superposition des solutions, une solution particulière de (5) est donc*

$$\varphi_p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto 2\varphi_{p,1}(t) + \varphi_{p,2}(t) = \frac{1}{2}\cos(t) + \frac{3}{2}\sin(t).$$

- Conclusion : *L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de (5) est donc*

$$\mathcal{S} = \{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \frac{1}{2}\cos(t) + \frac{3}{2}\sin(t) + \lambda \mathrm{e}^{-t} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

2.1.2.d. Raccordements de solutions

Jusqu'ici, nous avons étudié les équations différentielles dites résolues. Voyons comment résoudre celles qui ne sont pas sous forme résolue.

On s'intéresse donc à la résolution des équations différentielles linéaires scalaires du premier ordre de la forme

$$a(t)y' + b(t)y = c(t), \tag{$E_{1,nr}$}$$

où a, b et c sont des applications de I dans $\mathbb{K}$ continues, d'équation différentielle homogène associée

$$a(t)y' + b(t)y = 0. \tag{$E_{1h,nr}$}$$

Soit J un intervalle inclus dans I. On s'intéresse aux solutions de ces équations, définies sur l'intervalle J.

• PREMIER CAS : l'application a ne s'annule pas sur l'intervalle J.

Alors, en divisant par $a(t)$, les équations se ramènent aux équations résolues suivantes, que l'on sait résoudre :

$$y' = -\frac{b(t)}{a(t)}y + \frac{c(t)}{a(t)}$$

et

$$y' = -\frac{b(t)}{a(t)}y.$$

L'ensemble des solutions de ($E_{1h,nr}$) est donc un espace vectoriel de dimension 1 et l'ensemble des solutions de ($E_{1,nr}$) est un espace affine de dimension 1 dirigé par l'ensemble des solutions de l'équation homogène.

• SECOND CAS : l'application a s'annule sur l'intervalle J.

Alors, nous allons voir sur des exemples que les résultats précédents sur les équations résolues, comme le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, peuvent tomber en défaut.

L'ensemble des solutions de l'équation homogène ($E_{1h,nr}$) est un espace vectoriel. Cependant, sa dimension n'est pas nécessairement égale à 1. De plus, l'ensemble des solutions de l'équation ($E_{1,nr}$) est soit le vide, soit un espace affine dirigé par l'ensemble des solutions de l'équation homogène. Là encore, on ne peut rien dire sur sa dimension.

Supposons par exemple que a s'annule en un nombre fini de points t_0, t_1, ..., t_N de l'intervalle J. Posons, pour tout $i \in [\![0, N-1]\!]$, $J_i =]t_i, t_{i+1}[$. Alors $\displaystyle\bigcup_{i=0}^{N-1} J_i = J \setminus \{t_0, \ldots, t_N\}$ et l'application a ne s'annule pas sur J_i. Pour résoudre l'équation ($E_{1,nr}$) sur J, nous procéderons de la manière suivante.

MÉTHODE 18 —

1. Résolution de ($E_{1,nr}$) sur les intervalles de non annulation de a : *Pour tout $i \in [\![0, N-1]\!]$, on résout l'équation ($E_{1,nr}$) sur l'intervalle J_i en se ramenant à une équation résolue, puisque a ne s'annule pas sur J_i.*
2. Résolution de ($E_{1,nr}$) sur J : *On cherche ensuite l'ensemble des solutions de ($E_{1,nr}$) sur J.*
   (a) Raccordement des solutions aux points t_i.
   On considère φ une (éventuelle[1]) solution de ($E_{1,nr}$) sur J. Alors, pour tout $i \in [\![0, N-1]\!]$, φ est solution de ($E_{1,nr}$) sur l'intervalle J_i et on en connaît donc son expression explicite sur J_i d'après le premier point : $\varphi = \varphi_i$ où φ_i est solution de ($E_{1,nr}$) sur J_i.
   φ étant solution de ($E_{1,nr}$), elle est continue sur J et on va donc chercher à prolonger par continuité aux points t_0, ..., t_N la fonction
   $$J \setminus \{t_0, \ldots, t_N\} \longrightarrow \mathbb{K} \; ; \; t \longmapsto \varphi_i(t) \text{ si } t \in J_i,$$
   qui coïncide avec φ sur $J \setminus \{t_0, \ldots, t_N\}$. On détermine alors les valeurs possibles de φ aux points t_i. On obtient ainsi l'expression de φ sur J.
   (b) *Réciproquement, on vérifie que la fonction φ ainsi obtenue est dérivable sur J, en particulier aux points t_i, et qu'elle vérifie l'équation différentielle ($E_{1,nr}$), en particulier aux points t_i. On obtient ainsi l'ensemble des solutions sur J de l'équation différentielle ($E_{1,nr}$).*

EXEMPLE 19 — *Déterminons l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle*

$$ty' - ky = 0 \tag{6}$$

avec $k = 2$, $k = 1$ ou $k = \frac{1}{2}$.

- Identification : *Il s'agit d'une équation différentielle linéaire homogène scalaire du premier ordre à coefficients continus, sous forme non résolue dont le coefficient t de y' s'annule en 0.*
- Résolution sur les intervalles de non annulation de t : *Posons $J_1 = \mathbb{R}_+^*$ et $J_2 = \mathbb{R}_-^*$. Soit $i \in \{1, 2\}$.*
  - Identification : *La résolution de l'équation $ty' - ky = 0$ sur J_i se ramène à celle de l'équation $y' = \frac{k}{t} y$ sur J_i car t ne s'annule pas sur J_i. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire scalaire homogène du premier ordre à coefficients continus sur J_i.*
  - Résolution de l'équation (homogène) : *Une primitive de $t \longmapsto \frac{k}{t}$ est par exemple l'application $t \longmapsto k\ln(|t|) = \ln\left(|t|^k\right)$. Alors $\exp\left(\ln\left(|t|^k\right)\right) = |t|^k$.*
  L'ensemble des solutions sur J_i de l'équation homogène est donc
  $$\mathcal{S}_h = \left\{ J_i \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; t \longmapsto \lambda |t|^k \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

1. Dans le cas de l'équation homogène, on sait qu'il existe des solutions car l'ensemble des solutions de ($E_{1h,nr}$) est un espace vectoriel. Sinon, on n'est pas sûr qu'il en existe

– Résolution de l'équation sur $\mathbb{R}$:

– Raccordement des solutions au point 0 :
Soit φ une solution de (6) définie sur $\mathbb{R}$. D'après le point précédent, il existe $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ et $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\varphi(t) = \begin{cases} \lambda_1 |t|^k & si\ t > 0 \\ \lambda_2 |t|^k & si\ t < 0 \end{cases} .$$

φ étant continue en 0, on a $\lim\limits_{t\to 0^+} \varphi(t) = \lim\limits_{t\to 0^-} \varphi(t) = \varphi(0)$.
Or $\lim\limits_{t\to 0^+} \varphi(t) = \lim\limits_{t\to 0^+} \lambda_1 |t|^k = 0$ et $\lim\limits_{t\to 0^-} \varphi(t) = \lim\limits_{t\to 0^-} \lambda_2 |t|^k = 0$. On en déduit donc que $\varphi(0) = 0$.
Donc nécessairement, φ est définie par

$$\varphi(t) = \begin{cases} \lambda_1 |t|^k & si\ t \geq 0 \\ \lambda_2 |t|^k & si\ t < 0 \end{cases} . \tag{7}$$

– Étude réciproque : *Réciproquement, soient λ_1 et λ_2 des réels et soit $\varphi_{\lambda_1,\lambda_2}$ l'application donnée par (7). Étudions la dérivabilité de $\varphi_{\lambda_1,\lambda_2}$ et regardons si elle vérifie l'équation (6) sur $\mathbb{R}$.*
La restriction de φ aux intervalles ouverts J_1 et J_2 est dérivable, donc φ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et vérifie l'équation différentielle (6) en tout point de $\mathbb{R}^*$. Regardons au point 0.

— 1^{er} *cas : $k = 2$.*
On a

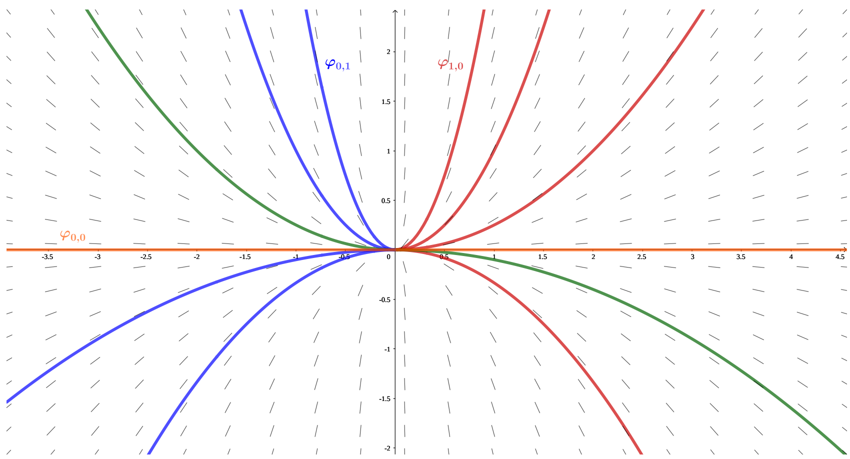
$$\frac{\varphi_{\lambda_1,\lambda_2}(t) - \varphi_{\lambda_1,\lambda_2}(0)}{t} = \begin{cases} \dfrac{\lambda_1 t^2 - 0}{t} = \lambda_1 t & \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0 \\ \dfrac{\lambda_2 (-t)^2 - 0}{t} = \lambda_2 t & \xrightarrow[t\to 0^-]{} 0 \end{cases} .$$

Donc $\varphi_{\lambda_1,\lambda_2}$ est dérivable en 0 de dérivée $\varphi'_{\lambda_1,\lambda_2}(0) = 0$.
De plus, on a $0\varphi'_{\lambda_1,\lambda_2}(0) - 2\varphi_{\lambda_1,\lambda_2}(0) = 0$ donc $\varphi_{\lambda_1,\lambda_2}$ est solution de l'équation (6) en 0 et donc sur $\mathbb{R}$ d'après ce qui précède.
Conclusion :*L'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de $ty' - 2y = 0$ est donc*

$$\mathcal{S} = \left\{ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \varphi_{\lambda_1,\lambda_2}(t) \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Notons que pour tout $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, on a $\varphi_{\lambda_1,\lambda_2} = \lambda_1 \varphi_{1,0} + \lambda_2 \varphi_{0,1}$, donc $\mathcal{S} = \mathrm{vect}(\varphi_{1,0}, \varphi_{0,1})$ et la famille $(\varphi_{1,0}, \varphi_{0,1})$ est libre. $\mathcal{S}$ est donc un espace vectoriel de dimension 2.

Sur le champ de vecteurs ci-dessous, on a tracé des courbes intégrales de l'équation $ty' - 2y = 0$ définies sur $\mathbb{R}^*_-$ en bleu, sur $\mathbb{R}^*_+$ en rouge, et définies sur tout $\mathbb{R}$ en vert. La fonction nulle, solution sur $\mathbb{R}$, est tracée en orange. Les courbes intégrales définies sur tout $\mathbb{R}$ sont des combinaisons linéaires des fonctions $\varphi_{1,0}$ et $\varphi_{0,1}$.



— $2^{\text{ème}}$ *cas :* $k = 1$.

On a

$$\frac{\varphi_{\lambda_1,\lambda_2}(t) - \varphi_{\lambda_1,\lambda_2}(0)}{t} = \begin{cases} \dfrac{\lambda_1 t - 0}{t} = \lambda_1 & \xrightarrow[t \to 0^+]{} \lambda_1 \\ \dfrac{\lambda_2(-t) - 0}{t} = -\lambda_2 & \xrightarrow[t \to 0^-]{} -\lambda_2 \end{cases}.$$

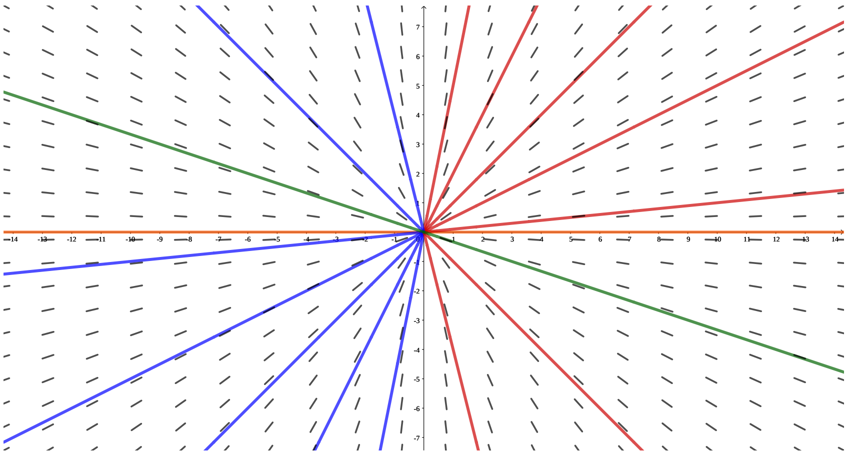
Donc $\varphi_{\lambda_1,\lambda_2}$ *est dérivable en* 0 *si et seulement si* $\lambda_1 = -\lambda_2$*, et dans ce cas,* $\varphi'_{\lambda_1,\lambda_2}(0) = \lambda_1$. *On a alors pour tout* $t \in \mathbb{R}$, $\varphi_{\lambda_1,-\lambda_1}(t) = \lambda_1 t$ *et* $0\varphi'_{\lambda_1,-\lambda_1}(0) - 2\varphi_{\lambda_1,-\lambda_1}(0) = 0$. *Donc* $\varphi_{\lambda_1,-\lambda_1}$ *est solution de (6) en* 0 *et donc sur* $\mathbb{R}$.

Conclusion : *L'ensemble des solutions sur* $\mathbb{R}$ *de* $ty' - y = 0$ *est donc*

$$\mathcal{S} = \{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \,;\, t \longmapsto \lambda_1 t \mid \lambda_1 \in \mathbb{R}\}.$$

$\mathcal{S}$ *est donc un espace vectoriel de dimension* 1.

Sur le champ de vecteurs ci-dessous, on a tracé des courbes intégrales de l'équation $ty' - y = 0$ *définies sur* $\mathbb{R}_-^*$ *en bleu, sur* $\mathbb{R}_+^*$ *en rouge, et définies sur tout* $\mathbb{R}$ *en vert. La fonction nulle, solution sur* $\mathbb{R}$*, est tracée en orange. Les courbes intégrales définies sur* $\mathbb{R}$ *sont des droites.*



— $3^{\text{ème}}$ *cas :* $k = \dfrac{1}{2}$.

On a

$$\frac{\varphi_{\lambda_1,\lambda_2}(t) - \varphi_{\lambda_1,\lambda_2}(0)}{t} = \begin{cases} \dfrac{\lambda_1\sqrt{t} - 0}{t} = \dfrac{\lambda_1}{\sqrt{t}} & \xrightarrow[t \to 0^+]{} \begin{cases} +\infty \text{ si } \lambda_1 > 0 \\ 0 \text{ si } \lambda_1 = 0 \\ -\infty \text{ si } \lambda_1 < 0 \end{cases} \\ \dfrac{\lambda_2\sqrt{-t} - 0}{t} = -\dfrac{\lambda_2}{\sqrt{-t}} & \xrightarrow[t \to 0^-]{} \begin{cases} -\infty \text{ si } \lambda_2 > 0 \\ 0 \text{ si } \lambda_2 = 0 \\ +\infty \text{ si } \lambda_2 < 0 \end{cases} \end{cases}.$$

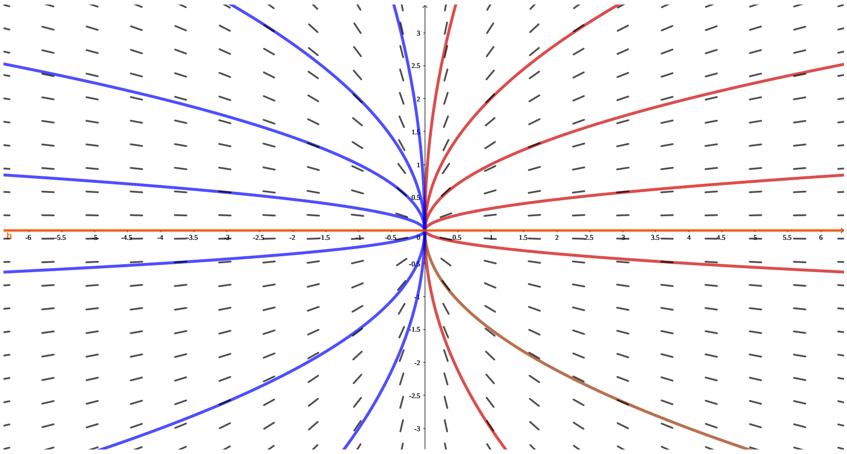
Donc $\varphi_{\lambda_1,\lambda_2}$ *est dérivable en* 0 *si et seulement si* $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$*, soit encore, si et seulement si* $\varphi_{\lambda_1,\lambda_2} = 0$*. Donc* $\varphi_{\lambda_1,\lambda_2}$ *est l'application nulle qui est bien solution sur* $\mathbb{R}$ *de (6).*

Conclusion : *L'ensemble des solutions définies sur* $\mathbb{R}$ *de* $ty' - \frac{1}{2}y = 0$ *est donc*

$$\mathcal{S} = \{0_{\mathbb{R}}\}.$$

$\mathcal{S}$ *est donc un espace vectoriel de dimension* 0.

Sur le champ de vecteurs ci-dessous, on a tracé des courbes intégrales de l'équation $ty' - \frac{1}{2}y = 0$ *définies sur* $\mathbb{R}_-^*$ *en bleu et sur* $\mathbb{R}_+^*$ *en rouge. Seule la fonction nulle (tracée en orange) est solution sur* $\mathbb{R}$*. Il n'y a pas de raccordement dérivable possible en* 0 *entre les courbes bleues et rouges, et donc pas de courbes intégrales sur* $\mathbb{R}$.



Remarque 20 — *De cette étude, on en déduit que le problème de Cauchy* $\begin{cases} ty' - 2y = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ *admet une infinité de solutions alors que le problème de Cauchy* $\begin{cases} ty' - 2y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ *n'en admet aucune.*

Le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire tombe donc en défaut en $t = 0$, point en lequel le coefficient de y' s'annule.

Exemple 21 — *Déterminons l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation*

$$t^2y' - ty = 1. \tag{8}$$

- Identification : *Il s'agit d'une équation différentielle linéaire scalaire du premier ordre à coefficients continus, sous forme non résolue dont le coefficient t^2 de y' s'annule en 0.*
- Résolution de l'équation sur les intervalles de non annulation de t^2 : *Posons $J_1 = \mathbb{R}_+^*$ et $J_2 = \mathbb{R}_-^*$. Soit $i \in \{1, 2\}$.*
  - Identification : *La résolution de l'équation $t^2y' - ty = 1$ sur J_i se ramène à celle de l'équation $y' = \dfrac{1}{t}y + \dfrac{1}{t^2}$ car t^2 ne s'annule pas. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire scalaire du premier ordre à coefficients continus sur J_i.*
  - Solutions de l'équation homogène : *L'ensemble des solutions de l'équation homogène sur J_i est*
  $$\mathcal{S}_h = \left\{J_i \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \tilde{\lambda}|t| \mid \tilde{\lambda} \in \mathbb{R}\right\} = \{J_i \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \lambda t \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$
  - Solution particulière : *Appliquons la méthode de variation de la constante.*
  Cherchons une solution particulière φ_p de (8) définie sur J_i sous la forme $\varphi_p(t) = \psi(t)t$ où ψ est une fonction dérivable de J_i dans $\mathbb{R}$.
  Alors φ_p est solution de (8) si et seulement si, pour tout $t \in J_i$,
  $$t^3\psi'(t) = 1,$$
  soit encore, si et seulement si, pour tout $t \in J_i$, $\psi'(t) = \dfrac{1}{t^3}$.
  Par exemple, choisissons pour ψ la fonction $\psi : t \longmapsto -\dfrac{1}{2t^2}$.
  La fonction $\varphi_p : J_i \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto -\dfrac{1}{2t}$ est alors une solution particulière de (8).
  - Conclusion : *L'ensemble des solutions de (8) sur J_i est donc*
  $$\mathcal{S} = \left\{J_i \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \lambda t - \frac{1}{2t} \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$
- Résolution de l'équation sur $\mathbb{R}$: *Soit φ une éventuelle solution de (8) sur $\mathbb{R}$. D'après le point précédent, il existe $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ et $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que*

$$\varphi(t) = \begin{cases} \lambda_1 t - \dfrac{1}{2t} & si\ t > 0 \\[2ex] \lambda_2 t - \dfrac{1}{2t} & si\ t < 0 \end{cases}$$

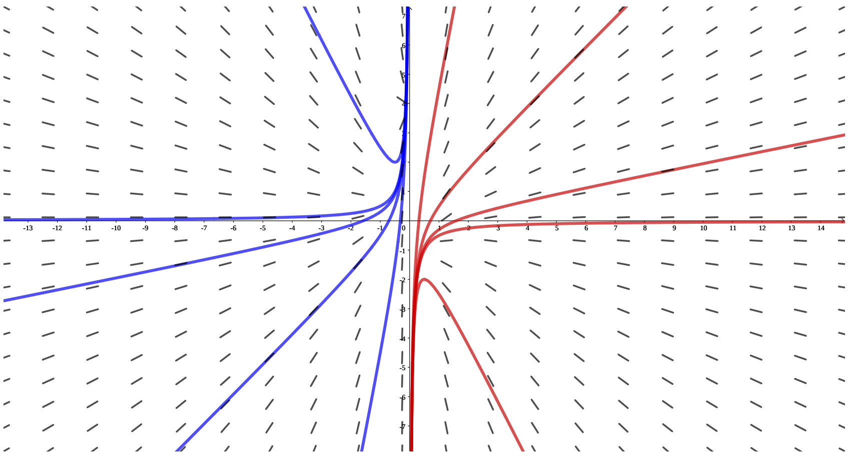
φ étant continue en 0, on doit avoir $\lim_{t\to 0^+} \varphi(t) = \lim_{t\to 0^+} \varphi(t) = \varphi(0)$.

Or $\lim_{t\to 0^+} \varphi(t) = \lim_{t\to 0^+} \lambda_1 t - \dfrac{1}{2t} = -\infty$. Cela contredit alors la continuité de φ en 0.
L'équation (8) n'admet donc pas de solutions sur $\mathbb{R}$.

– Conclusion : *L'ensemble des solutions de (8) sur $\mathbb{R}$ est donc l'ensemble vide :*

$$\mathcal{S} = \emptyset.$$

Sur le champ de vecteurs ci-dessous, on a tracé des courbes intégrales de l'équation $t^2y' - ty = 1$ définies sur $\mathbb{R}_-^*$ en bleu et sur $\mathbb{R}_+^*$ en rouge. Il n'y a pas de raccordement continu possible en 0, et donc pas de courbes intégrales sur $\mathbb{R}$.



2.1.3 Équations différentielles linéaires scalaires du deuxième ordre

On s'intéresse aux équations différentielles linéaires scalaire du deuxième ordre de la forme

$$a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = d(t), \tag{E_2}$$

où a, b, c et d sont des applications de I dans $\mathbb{K}$ continues.

L'étude générale et complète de ces équations sera faite dans le chapitre 3, puisque, rappelons-le, ces équations se ramènent à des équations différentielles vectorielles du premier ordre. Néanmoins, lorsque les coefficients de l'équation sont constants, les résultats peuvent s'obtenir directement, sans utiliser l'outil matriciel.

2.1.3.a. Cas à coefficients constants

On s'intéresse aux équations différentielles linéaires scalaires du deuxième ordre à coefficients constants, de la forme

$$ay'' + by' + cy = d(t), \tag{E_{2c}}$$

où a, b et c sont des éléments de $\mathbb{K}$, avec a non nul et d est une application continue de I dans $\mathbb{K}$, d'équation homogène associée

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{E_{2ch}}$$

On appelle **polynôme caractéristique** associé à (E_{2c}) le polynôme du second degré

$$aX^2 + bX + c.$$

i) Ensemble des solutions de l'équation homogène

Proposition 22
On se place avec $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Notons Δ le discriminant du polynôme caractéristique $P = aX^2 + bX + c$.

- *Si $\Delta \neq 0$ alors, en notant r_1 et r_2 les deux racines complexes distinctes de P, l'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions de (E_{2ch}) est*
$$\mathcal{S}_h = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}\ ;\ t \longmapsto \lambda_1 \mathrm{e}^{r_1 t} + \lambda_2 \mathrm{e}^{r_2 t} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2\right\}.$$
- *Si $\Delta = 0$ alors, en notant r la racine double complexe de P, l'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions de (E_{2ch}) est*
$$\mathcal{S}_h = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}\ ;\ t \longmapsto (\lambda_1 + \lambda_2 t)\mathrm{e}^{rt} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2\right\}.$$

L'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions complexes de l'équation homogène (E_{2ch}) est donc un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 2.

Preuve — Notons r_1 et r_2 les deux racines complexes du polynôme caractéristique $aX^2 + bX + c$, éventuellement confondues.

Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une application deux fois dérivable. Posons, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\psi(t) = \varphi(t)\mathrm{e}^{-r_1 t}$, de sorte que $\varphi(t) = \psi(t)\mathrm{e}^{r_1 t}$. Alors ψ est deux fois dérivable.

φ est solution de (E_{2ch}) si et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\mathrm{e}^{r_1 t}\left(a\psi''(t) + (2ar_1 + b)\psi'(t) + (ar_1^2 + br_1 + c)\psi(t)\right) = 0,$$
soit encore, si et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\psi''(t) + \left(2r_1 + \frac{b}{a}\right)\psi'(t) = 0.$$

Or $2r_1 + \dfrac{b}{a} = r_1 + \left(r_1 + \dfrac{b}{a}\right) = r_1 - r_2$ car $r_1 + r_2 = -\dfrac{b}{a}$.

Donc φ est solution de (E_{2ch}) si et seulement si ψ' est solution de l'équation différentielle linéaire du premier ordre
$$y' = -(r_1 - r_2)\, y. \tag{9}$$

- 1er cas : $\Delta \neq 0$. Alors $r_1 \neq r_2$ et l'ensemble des solutions de l'équation (9) est
$$\mathcal{S}_1 = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}\ ;\ t \longmapsto \lambda \mathrm{e}^{-(r_1 - r_2)t} \mid \lambda \in \mathbb{C}\right\}.$$

Donc φ est solution de (E_{2ch}) si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\psi'(t) = \lambda \mathrm{e}^{-(r_1 - r_2)t},$$
soit encore si et seulement s'il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\psi(t) = \lambda_1 \mathrm{e}^{-(r_1 - r_2)t} + \lambda_2,$$
soit
$$\varphi(t) = \lambda_1 \mathrm{e}^{r_2 t} + \lambda_2 \mathrm{e}^{r_1 t}.$$

- 2nd cas : $\Delta = 0$. Alors $r_1 = r_2$ et l'ensemble des solutions de l'équation (9) est l'ensemble des fonctions constantes.

Donc φ est solution de (E_{2ch}) si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\psi'(t) = \lambda,$$
soit encore, si et seulement s'il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\psi(t) = \lambda_1 t + \lambda_2,$$
soit
$$\varphi(t) = (\lambda_1 t + \lambda_2)\, \mathrm{e}^{r_1 t}.$$

D'où le résultat. □

Exemples 23

- *Résolvons sur $\mathbb{C}$ l'équation*
$$y'' - (2 + 2\mathrm{i})y' + 2\mathrm{i}y = 0.$$
Le polynôme caractéristique associé est $P = X^2 - (2 + 2\mathrm{i})X + 2\mathrm{i}$, de discriminant $\Delta = (2 + 2\mathrm{i})^2 - 4 \times 1 \times 2\mathrm{i} = 0$. P admet une racine double $r = 1 + \mathrm{i}$.
L'ensemble des solutions complexes de l'équation est donc
$$\mathcal{S}_h = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}\ ;\ t \mapsto (\lambda_1 + \lambda_2 t)\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2\right\}.$$

- *Résolvons sur $\mathbb{C}$ l'équation*
$$y'' - 2y' + 2y = 0.$$
Le polynôme caractéristique associé est $P = X^2 - 2X + 2$, de discriminant $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 2 = -4 \neq 0$. P admet donc deux racines complexes conjuguées, $r_1 = 1 + \mathrm{i}$ et $r_2 = 1 - \mathrm{i}$.
L'ensemble des solutions complexes de l'équation est donc
$$\mathcal{S}_h = \left\{ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \ ; \ t \mapsto \lambda_1 \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t} + \lambda_2 \mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})t} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2 \right\}.$$

Proposition 24
On se place avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Notons Δ le discriminant du polynôme caractéristique $P = aX^2 + bX + c$.

- *Si $\Delta > 0$ alors, en notant r_1 et r_2 les deux racines réelles distinctes de P, l'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions de (E_{2ch}) est*
$$\mathcal{S}_h = \left\{ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ ; \ t \longmapsto \lambda_1 \mathrm{e}^{r_1 t} + \lambda_2 \mathrm{e}^{r_2 t} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$
- *Si $\Delta = 0$ alors, en notant r la racine double réelle de P, l'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions de (E_{2ch}) est*
$$\mathcal{S}_h = \left\{ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ ; \ t \longmapsto (\lambda_1 + \lambda_2 t) \mathrm{e}^{rt} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$
- *Si $\Delta < 0$ alors, en notant $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ les deux racines complexes conjuguées distinctes de P avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, l'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions de (E_{2ch}) est*
$$\mathcal{S}_h = \left\{ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ ; \ t \longmapsto \mathrm{e}^{\alpha t} \big(\lambda_1 \cos(\beta t) + \lambda_2 \sin(\beta t) \big) \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

L'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions réelles de l'équation homogène (E_{2ch}) est donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2.

Preuve — • Si $\Delta > 0$ ou $\Delta = 0$, alors le résultat s'obtient de la même façon que dans le cas complexe.

• Traitons le cas où $\Delta < 0$. Le polynôme caractéristique $P = aX^2 + bX + c$ possède alors deux racines complexes conjuguées $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.

Soit φ une solution réelle de (E_{2ch}). En particulier, φ est une solution complexe de (E_{2ch}). Il existe donc $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) = \lambda_1 \mathrm{e}^{(\alpha + i\beta)t} + \lambda_2 \mathrm{e}^{(\alpha - i\beta)t}$.

Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\varphi(t) = \mathrm{e}^{\alpha t} \left(\lambda_1 \mathrm{e}^{i\beta t} + \lambda_2 \mathrm{e}^{-i\beta t} \right) = \mathrm{e}^{\alpha t} \left((\lambda_1 + \lambda_2) \cos(\beta t) + i(\lambda_1 - \lambda_2) \sin(\beta t) \right).$$

Or φ étant à valeurs réelles, $\varphi(0) \in \mathbb{R}$ et $\varphi\left(\dfrac{\pi}{2\beta}\right) \in \mathbb{R}$.

Donc $\lambda_1 + \lambda_2 \in \mathbb{R}$ et $\lambda_1 - \lambda_2 \in i\mathbb{R}$. On en déduit que $\mathrm{Im}(\lambda_1) + \mathrm{Im}(\lambda_2) = 0$ et $\mathrm{Re}(\lambda_1) - \mathrm{Re}(\lambda_2) = 0$. Donc $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$.

Posons $\gamma = \lambda_1 + \lambda_2$ et $\delta = i(\lambda_1 - \lambda_2)$. Alors $\gamma = 2\mathrm{Re}(\lambda_1) \in \mathbb{R}$ et $\delta = -2\mathrm{Im}(\lambda_1) \in \mathbb{R}$.

On a donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) = \mathrm{e}^{\alpha t} (\gamma \cos(\beta t) + \delta \sin(\beta t))$ avec $(\gamma, \delta) \in \mathbb{R}^2$.

Réciproquement, une telle fonction est bien une solution réelle de (E_{2ch}).

□

Remarque 25 — *Dans le cas où $\Delta < 0$, on peut également donner l'ensemble des solutions sous les formes suivantes :*
$$\mathcal{S}_h = \left\{ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ ; \ t \longmapsto A\mathrm{e}^{\alpha t} \cos(\beta t - \varphi) \mid (A, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \right\},$$
ou
$$\mathcal{S}_h = \left\{ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ ; \ t \longmapsto A\mathrm{e}^{\alpha t} \sin(\beta t - \varphi) \mid (A, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Exemples 26

- *Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle linéaire homogène $y'' - 5y' + 6y = 0$.*
Le polynôme caractéristique associé est $P = X^2 - 5X + 6$, de discriminant $\Delta = 5^2 - 4 \times 1 \times 6 = 1 > 0$. P admet donc deux racines réelles, $r_1 = 2$ et $r_2 = 3$.
L'ensemble des solutions réelles de l'équation est donc
$$\mathcal{S}_h = \left\{ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ ; \ t \longmapsto \lambda_1 \mathrm{e}^{2t} + \lambda_2 \mathrm{e}^{3t} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

- *Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation*
$$y'' - 2y' + y = 0.$$
Le polynôme caractéristique associé est $P = X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$, de racine double réelle $r = 1$. L'ensemble des solutions réelles de l'équation est donc
$$\mathcal{S}_h = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto (\lambda_1 + \lambda_2 t)\mathrm{e}^t \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$
- *Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation*
$$y'' + 2y' + 2y = 0.$$
Le polynôme caractéristique associé est $P = X^2 + 2X + 2$, de discriminant $\Delta = 4 - 8 = -4 < 0$. P admet donc deux racines complexes conjuguées $r_1 = -1 + i$ et $r_2 = -1 - i$.
L'ensemble des solutions réelles de l'équation est donc
$$\mathcal{S}_h = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \mathrm{e}^{-t}\left(\lambda_1 \cos(t) + \lambda_2 \sin(t)\right) \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

ii) Ensemble des solutions de l'équation avec second membre

Proposition 27
Soient a, b et c des éléments de $\mathbb{K}$ et $d \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$.
1. *L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation $ay'' + by' + cy = d(t)$ (E_{2c}) est un espace affine de dimension 2 dirigé par l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée :*
$$\mathcal{S} = \varphi_p + \mathcal{S}_h,$$
où φ_p est une solution particulière de (E_{2c}).
2. *Soient $t_0 \in I$ et $(y_0, y_1) \in \mathbb{K}^2$. Le problème de Cauchy*
$$\begin{cases} ay'' + by' + cy = d(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \end{cases}$$
admet une et une seule solution sur I.

Preuve —
1. On admet l'existence d'une solution particulière φ_p de (E_{2c}). Nous avons vu que l'ensemble des solutions de l'équation homogène est un espace vectoriel de dimension 2. D'après la proposition 2, on a donc le résultat.
2. L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation est
$$\mathcal{S} = \left\{I \longrightarrow \mathbb{K}\ ;\ t \longmapsto \varphi_p(t) + \lambda_1\varphi_1(t) + \lambda_2\varphi_2(t) \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2\right\},$$
où (φ_1, φ_2) forme une base de solutions de l'équation homogène.
Les conditions initiales donnent alors
$$\begin{cases} \lambda_1\varphi_1(t_0) + \lambda_2\varphi_2(t_0) = y_0 - \varphi_p(t_0) \\ \lambda_1\varphi_1'(t_0) + \lambda_2\varphi_2'(t_0) = y_1 - \varphi_p'(t_0) \end{cases}.$$
Le déterminant de ce système d'inconnues λ_1, λ_2 vaut
$$D = \begin{vmatrix} \varphi_1(t_0) & \varphi_2(t_0) \\ \varphi_1'(t_0) & \varphi_2'(t_0) \end{vmatrix} = \varphi_1(t_0)\varphi_2'(t_0) - \varphi_2(t_0)\varphi_1'(t_0).$$
En considérant les bases de solutions obtenues dans la partie précédente, on obtient alors les résultats suivants.
• Si le polynôme caractéristique de l'équation admet deux racines distinctes r_1 et r_2 éléments de $\mathbb{K}$ alors le déterminant du système vaut
$$D = (r_2 - r_1)\mathrm{e}^{(r_1+r_2)t_0} \neq 0.$$
• Si le polynôme caractéristique de l'équation admet une racine double r alors le déterminant du système vaut
$$D = \mathrm{e}^{2rt_0} \neq 0.$$
• Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et si le polynôme caractéristique de l'équation admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ alors le déterminant du système vaut
$$D = \beta\mathrm{e}^{\alpha t_0} \neq 0.$$
Dans tous les cas, le déterminant du système est non nul. Le système admet donc une unique solution $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$.

□

EXEMPLE 28 — *Déterminons la solution définie sur* $\mathbb{R}$ *du problème de Cauchy*

$$\begin{cases} y'' + 4y = 2, \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

– *Résolution de l'équation* $y'' + 4y = 2$.
  – Identification : *Il s'agit d'une équation différentielle linéaire scalaire du deuxième ordre à coefficients constants et second membre continu.*
  – Solutions de l'équation homogène : *Le polynôme caractéristique associé à l'équation* $y'' + 4y = 0$ *est* $P = X^2 + 4 = (X - 2i)(X + 2i)$, *de racines complexes conjuguées* $r_1 = 2i$ *et* $r_2 = -2i$.
  L'ensemble des solutions réelles de l'équation homogène $y'' + 4y = 0$ *est donc*

$$\mathcal{S}_h = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \lambda_1 \cos(2t) + \lambda_2 \sin(2t) \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

  – Solution particulière : *La fonction* $\varphi_p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \dfrac{1}{2}$ *est une solution particulière évidente de* $y'' + 4y = 2$.
  – Conclusion : *L'ensemble des solutions de l'équation* $y'' + 4y = 2$ *est donc*

$$\mathcal{S} = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \frac{1}{2} + \lambda_1 \cos(2t) + \lambda_2 \sin(2t) \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

– *Une application* $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *est donc solution du problème de Cauchy si et seulement s'il existe* $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ *tel que pour tout* $t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) = \dfrac{1}{2} + \lambda_1 \cos(2t) + \lambda_2 \sin(2t)$ *avec les conditions initiales* $\varphi(0) = 1$ *et* $\varphi'(0) = 0$.

On obtient alors $\lambda_1 = \dfrac{1}{2}$ *et* $\lambda_2 = 0$.

Donc la solution du problème de Cauchy définie sur $\mathbb{R}$ *est l'application*

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2t).$$

iii) Détermination pratique d'une solution particulière

On rappelle que, parfois, une solution particulière apparaît de façon évidente. On peut également utiliser le principe de superposition des solutions pour en trouver une. Comme dans le cas des équations du premier ordre, il existe une méthode de variation des constantes pour trouver une solution particulière. Nous l'étudierons dans le chapitre 3, mais celle-ci est souvent longue et calculatoire. Voyons ici comment trouver, simplement, une solution particulière lorsque le second membre est de la forme polynôme-exponentielle.

On se place donc dans le cas particulier où l'équation s'écrit sous la forme

$$ay'' + by' + cy = P(t)\mathrm{e}^{\alpha t}, \tag{$E_{2c,pol-exp}$}$$

où a, b, c et α sont des éléments de $\mathbb{K}$ avec a non nul et P est un polynôme.

Le résultat suivant nous indique sous quelle forme chercher une solution particulière.

PROPOSITION 29
L'équation différentielle ($E_{2c,pol-exp}$) *admet une solution particulière de la forme*

$$I \longrightarrow \mathbb{K}\ ;\ t \longmapsto t^m Q(t)\mathrm{e}^{\alpha t},$$

où Q *est une application polynomiale de même degré que* P *et* m *est l'ordre de multiplicité de* α *comme racine du polynôme caractéristique (*$m = 0$ *si* α *n'est pas racine de* $aX^2 + bX + c$, $m = 1$ *si* α *est racine simple et* $m = 2$ *si* α *est racine double).*

Remarque 30 — *Soient a, b, c, γ et ω des nombres réels et P une application polynomiale à coefficients réels. Comme dans le cas des équations du premier ordre, si le second membre est de la forme $t \longmapsto P(t)\mathrm{e}^{\gamma t}\cos(\omega t)$ (resp. $\longmapsto P(t)\mathrm{e}^{\gamma t}\sin(\omega t)$), on peut chercher une solution particulière complexe de l'équation $ay'' + by' + cy = P(t)\mathrm{e}^{(\gamma+i\omega)t}$ puis en prendre sa partie réelle (resp. imaginaire).*

Exemple 31 — *Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle*

$$y'' + 2y' + 5y = 5t. \tag{10}$$

- Identification *Il s'agit d'une équation différentielle linéaire scalaire du deuxième ordre à coefficients constants et second membre continu.*
- Solutions de l'équation homogène : *Le polynôme caractéristique associé est $X^2 + 2X + 5$, de discriminant $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 5 = -16 < 0$. Ce polynôme admet donc deux racines complexes conjuguées $r_1 = -1 - 2\mathrm{i}$ et $r_2 = -1 + 2\mathrm{i}$.*
  L'ensemble des solutions de l'équation homogène associée est donc
  $$\mathcal{S}_0 = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \mapsto \mathrm{e}^{-t}(\lambda_1\cos(2t) + \lambda_2\sin(2t)) \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$
- Solution particulière : *Les coefficients de l'équation (10) sont constants et le second membre est de la forme polynôme-exponentielle ($5t = 5t\mathrm{e}^{0t}$). On peut donc chercher une solution particulière de (10) sous la forme*
  $$\varphi_p(t) = at + b, \ \text{avec } (a, b) \in \mathbb{R}^2$$
  (ici $P(t) = 5t$ est de degré 1 et $m = 0$ car $\alpha = 0$ n'est pas racine du polynôme caractéristique).
  Alors φ_p est solution de (10) si et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi_p''(t) + 2\varphi_p'(t) + 5\varphi_p(t) = 5t$. Après calculs, on trouve $a = 1$ et $b = -\dfrac{2}{5}$ et donc une solution particulière est $\varphi_p(t) = t - \dfrac{2}{5}$.
- Conclusion : *L'ensemble des solutions de l'équation (10) est donc*
  $$\mathcal{S} = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \mapsto t - \frac{2}{5} + \mathrm{e}^{-t}(\lambda_1\cos(2t) + \lambda_2\sin(2t)) \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Exemple 32 — *Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle*

$$y'' + y = t\sin t. \tag{11}$$

- Identification : *Il s'agit d'une équation différentielle linéaire scalaire du deuxième ordre à coefficients constants et second membre continu.*
- Solutions de l'équation homogène : *Le polynôme caractéristique associé est $X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$. Ce polynôme admet donc deux racines complexes conjuguées $r_1 = \mathrm{i}$ et $r_2 = -\mathrm{i}$.*
  L'ensemble des solutions de l'équation homogène associée est donc
  $$\mathcal{S}_h = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \mapsto \lambda_1\cos(t) + \lambda_2\sin(t) \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$
- Solution particulière :
  - *Commençons par chercher une solution particulière complexe de $y'' + y = t\mathrm{e}^{it}$ sous la forme $\varphi_{p,\mathbb{C}}(t) = t(at + b)\mathrm{e}^{it}$, où $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ (ici $P(t) = t$ est de degré 1 et $m = 1$ car i est racine de $X^2 + 1$).*
    Après calculs, $\varphi_{p,\mathbb{C}}$ est solution de (11) si et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
    $$e^{it}(4iat + 2(ib + a)) = te^{it},$$
    soit encore, si et seulement si $a = \dfrac{1}{4i} = -\dfrac{i}{4}$ et $b = \dfrac{1}{4}$.
    Une solution particulière de l'équation $y'' + y = t\mathrm{e}^{it}$ est donc $\varphi_{p,\mathbb{C}}(t) = \dfrac{1}{4}\left(-it^2 + t\right)e^{it}$.
  - *Une solution particulière de $y'' + y = t\sin(t)$ est donc $\varphi_{p,\mathbb{R}} = \mathrm{Im}(\varphi_{p,\mathbb{C}})$, c'est-à-dire*
    $$\varphi_{p,\mathbb{R}}(t) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \frac{1}{4}\left(-t^2\cos t + t\sin t\right)$$
- Conclusion : *L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de (11) est donc*
  $$\mathcal{S} = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \frac{1}{4}\left(-t^2\cos t + t\sin t\right) + \lambda_1\cos(t) + \lambda_2\sin(t) \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$