EQUA. DIFF

Chap 2. Equations différentielles scalaires

Cours 5 (1)

2.1. Equations différentielles linéaires scalaires

2.1.3. Ordre 2

2.1.3.a) Cas à coefficients constants

$$ay^{(2)}+by^{(1)}+cy^{(0)} \longrightarrow aX^2+bX+c.$$

Cas linéaire d'ordre 1 à coeff constant ($y'+ay=0$) : $t\mapsto \lambda e^{rt}$

Posons $\varphi(t)=e^{rt}$ où $r\in\mathbb{K}$. $\varphi'(t)=re^{rt}$, $\varphi''(t)=r^2e^{rt}$.

$$a\varphi''(t)+b\varphi'(t)+c\varphi(t)=0$$

$$ar^2e^{rt}+bre^{rt}+ce^{rt}=0$$

$$ar^2+br+c=0.$$

Donc φ est solution de (E_{2cR}) ssi r est racine de $P=aX^2+bX+c$.

Si $\Delta\neq 0$, P admet 2 racines distinctes r_1 et r_2 donc $t\mapsto e^{r_1t}$ et $t\mapsto e^{r_2t}$ sont solutions.

Si $\Delta=0$, P admet 1 racine double, $t\mapsto e^{rt}$ est solution.

Mais cette méthode ne permet pas d'obtenir $t\mapsto te^{rt}$.

On avait vu que $t\mapsto e^{r_1t}$ était solution.

φ est solution ssi $a\varphi'' + b\varphi' + c\varphi = 0$

$$\varphi(t) = \psi(t)e^{r_1 t}, \quad \varphi'(t) = (\psi'(t) + r_1\psi(t))\, e^{r_1 t},$$

$$\varphi''(t) = (\psi''(t) + 2r_1\psi'(t) + r_1^2\psi(t))e^{r_1}$$

$$aX^2 + bX + c = a(X - r_1)(X - r_2) = a(X^2 - (r_1 + r_2)X + r_1 r_2)$$

Donc $b = -a(r_1 + r_2)$, donc $r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}$.

$$\lambda_1 \cos(\beta t) + \lambda_2 \sin(\beta t) = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}\left(\underbrace{\frac{\lambda_1}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}}}_{x} \cos(\beta t) + \underbrace{\frac{\lambda_2}{\sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}}}_{y} \sin(\beta t)\right)$$

$x^2 + y^2 = 1$. Il existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} x = \cos\varphi \\ y = \sin\varphi \end{cases}$

$$\lambda_1 \cos(\beta t) + \lambda_2 \sin(\beta t) = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}\,(\cos(\varphi)\cos(\beta t) + \sin\varphi \sin(\beta t))$$
$$= \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}\,(\cos(\beta t - \varphi)).$$

2.1. Equations différentielles linéaires scalaires

Cours 5 (2)

2.1.3. Ordre 2

2.1.3. a) Cas à coefficients constants.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \varphi_1(t_0) & \varphi_2(t_0) \\ \varphi_1'(t_0) & \varphi_2'(t_0) \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 - \varphi_p(t_0) \\ y_1 - \varphi_p'(t_0) \end{pmatrix}$$

A inversible ? oui.

det A $\neq 0$?

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} y_0 - \varphi_p(t_0) \\ y_1 - \varphi_p'(t_0) \end{pmatrix}$$

$\varphi(t) = \frac{1}{2} + \lambda_1 \cos(2t) + \lambda_2 \sin(2t)$

$\varphi(0) = \frac{1}{2} + \lambda_1 = 1$ donc $\lambda_1 = \frac{1}{2}$

$\varphi'(t) = -2\lambda_1 \sin(2t) + 2\lambda_2 \cos(2t)$

$\varphi'(0) = 2\lambda_2 = 0$ donc $\lambda_2 = 0$.

$ay'' + by' + cy = \left| \begin{array}{l} P(t)e^{\gamma t} \cos(\omega t) \ (*) = P(t) e^{\gamma t} \operatorname{Re}(e^{i\omega t}) = \operatorname{Re}\left(P(t) e^{(\gamma + i\omega)t}\right) \\ P(t) e^{\gamma t} \sin(\omega t) \ (**) \end{array} \right.$

On résout " $ay'' + by' + cy = P(t)\, e^{(\gamma + i\omega)t}$ "

On cherche une solution particulière complexe $\varphi_{p,\mathbb{C}}$.

Alors $\operatorname{Re}(\varphi_{p,\mathbb{C}})$ est solution de $(*)$.

$\operatorname{Im}(\varphi_{p,\mathbb{C}})$ ——————— $(**)$.

$ay'' + by' + cy = \left| \begin{array}{ll} a e^{\alpha t} & \text{avec } P(t) = a \text{ de degré } 0 \\ P(t) e^{0t} & \text{avec } \alpha = 0 \quad (e^{0t} = 1) \\ \cos(\omega t) & \\ \sin(\omega t) & \end{array} \right.$

$\varphi_p(t) = t^m Q(t) e^{0t}$ $\qquad d^\circ Q = d^\circ P$ où $P(t) = 5t$

$= 1$

$= at + b$.

à déterminer.

$\alpha = 0$ n'est pas racine de $X^2 + 2X + 5$

donc $m = 0$

φ_p est solution ssi $\varphi_p''(t) + 2\varphi_p'(t) + 5\varphi_p(t) = 5t$

$0 + \underbrace{2a} + \underbrace{5a}t + 5\underbrace{b} = 5t \quad = \underbrace{5}t + \underbrace{0}$

Donc $5a = 5$ donc $a = 1$ et $\frac{2a}{2} + 5b = 0$ donc $b = -\frac{2}{5}$.

$t\sin t = t\,\mathrm{Im}(e^{it}) = \mathrm{Im}(te^{it})$.

On cherche une solution particulière $y''+y = te^{it}$.

$\varphi_p(t) = t^m Q(t)e^{it}$ $\quad$ $d^\circ Q = d^\circ P$ où $P(t) = t$

$= t(at+b)e^{it}$ $\quad$ $= 1$

$= \boxed{(at^2+bt)e^{it}}$ $\quad$ i est racine simple de $X^2+1 = (X-i)(X+i)$

donc $m=1$

φ_p est solution ssi $\varphi_p''(t) + \varphi_p(t) = te^{it}$.

$\varphi_p'(t) = (2at+b+iat^2+ibt)e^{it} = (iat^2+(2a+ib)t+b)e^{it}$

$\varphi_p''(t) = (2iat+2a+ib-at^2+i(2a+ib)t+ib)e^{it}$

$= \boxed{(-at^2+(4ia-b)t+2a+2ib)e^{it}}$

φ_p est solution ssi $(4iat+2a+2ib)\cancel{e^{it}} = t\cancel{e^{it}}$

ssi $4ia = 1$ et $2a+2ib = 0$

Donc $a = \frac{1}{4i} = -\frac{i}{4}$ et $b = -\frac{a}{i} = \frac{1}{4}$.