EQUA. DIFF

Chap 2 - Equations différentielles scalaires

Cours 6 (1)

2.1 - Equations différentielles linéaires scalaires

2.1.3 - Ordre 2

2.1.3. b) Résultats généraux

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Si $\Delta > 0$ $\quad S_h = \{ t \mapsto \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t},\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \}$

$= \mathrm{vect}(\varphi_1, \varphi_2)$ avec $\varphi_1(t) = e^{r_1 t}$
$\varphi_2(t) = e^{r_2 t}$.

Si $\Delta = 0$, $\quad \varphi_1(t) = e^{r_1 t}$, $\quad \varphi_2(t) = t e^{r_2 t}$

Si $\Delta < 0$, $\quad \varphi_1(t) = \cos(\beta t) e^{\alpha t}$ $\quad \varphi_2(t) = \sin(\beta t) e^{\alpha t}$.

Dans tous les cas (φ_1, φ_2) est une base de S_h.

$\varphi_1(t) = e^{r_1 t}$ et $\varphi_2(t) = e^{r_2 t}$ sont des solutions de $ay'' + by' + cy = 0$.

$\varphi_1'(t) = r_1 e^{r_1 t}$, $\quad \varphi_2'(t) = r_2 e^{r_2 t}$.

$$\omega(0) = \begin{vmatrix} \varphi_1(0) & \varphi_2(0) \\ \varphi_1'(0) & \varphi_2'(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ r_1 & r_2 \end{vmatrix} = r_2 - r_1 \neq 0.$$

Donc (φ_1, φ_2) est une base de solutions.

2.1 - Equations différentielles linéaires scalaires

Cours 6 (2)

2.1.3 - Ordre 2

2.1.3. c) Technique d'abaissement de l'ordre.

$(E_{2,r})$ $\quad y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$, $\quad a, b, c : I \to \mathbb{K}$ continues.

$\hookrightarrow$ $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$ $(E_{2,r}^h)$: on cherche une solution φ_1 qui ne s'annule pas sur I de l'équation homogène.

A l'aide de cette technique, on peut déterminer S_h et S.

$\underbrace{\varphi(t) = \psi(t)\varphi_1(t)}_{\text{solution de l'équation homogène}}$ $\quad$ (cf méthode de variation de la constante où on cherchait une solution particulière φ_p sous la forme $\varphi_p(t) = \psi(t)\varphi_1(t)$ où φ_1 solution de l'équation homogène).

φ est solution de $(E_{2,r})$ ssi $\psi' \in S_{1_2}$

ssi il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que pour tout $t \in I$

$\varphi'(t) = \lambda e^{-A(t)} + \varphi_p(t)$

φ sol de : ssi φ' sol de :

Ex 37. $t^2y'' - 2y = t^4$, $ty' + 4y = t \iff y' + \frac{4}{t}y = 1$.

• On cherche une solution φ_1 de l'équation $t^2y'' - 2y = 0$ $(*)$ qui s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$.

Commençons par chercher φ_1 sous la forme $\varphi_1(t) = t^n$.

$\varphi_1'(t) = nt^{n-1}$, $\varphi_1''(t) = n(n-1)t^{n-2}$.

φ_1 est solution de $(*)$ ssi $n(n-1)t^n - 2t^n = 0$

ssi $n(n-1) - 2 = 0$

ssi $n^2 - n - 2 = 0$

ssi $(n+1)(n-2) = 0$.

Prenons $n = 2$, alors $\varphi_1(t) = t^2$ est une solution de $(*)$.

(avec $n = -1$, on a $t \mapsto \frac{1}{t}$ solution de $(*)$).

$S_{\mathbb{R}} = \{t \mapsto \lambda_1 t^2 + \frac{\lambda_2}{t}, (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}$.

2.1. Equations différentielles linéaires scalaires — Cours 6 (3)

2.1.3. Ordre 2

2.1.3. d) Détermination pratique de solutions de l'équation homogène

i) Recherche de solutions polynomiales.

Ex 39. $\varphi(t) = t^n$ $\varphi'(t) = nt^{n-1}$, $\varphi''(t) = n(n-1)t^{n-2}$

$(t^2+2t+2)n(n-1)t^{n-2} - 2(t+1)nt^{n-1} + 2t^n = 0$

. $n(n-1) - 2n + 2 = 0$ $n^2 - 3n + 2 = 0$

$(n-1)(n-2) = 0 \to n = 1$ ou $n = 2$

. $2n(n-1) - 2n = 0$ $2n(n-2) = 0 \to n = 0$ ou $n = 2$

. $2n(n-1) = 0 \to n = 0$ ou $n = 1$.

φ sous la forme d'un polynôme de degré n.

$\varphi(t) = 1t^n + \underbrace{\dots}_{d^\circ < n}$. $\varphi'(t) = nt^{n-1} + \underbrace{\dots}_{d^\circ < n-1}$

$\varphi''(t) = n(n-1)t^{n-2} + \underbrace{\dots}_{d^\circ < n-2}$.

Coefficient dominant de $(t^2+2t+2)\varphi''(t) - 2(t+1)\varphi'(t) + 2\varphi(t)$

$n(n-1) - 2n + 2$

Si φ est solution alors $n(n-1) - 2n+2 = 0$,

soit $n^2 - 3n+2 = (n-1)(n-2)$.

donc $n = 1$ ou $n = 2$.

On cherche φ sous la forme $\varphi(t) = at^2+bt+c$

(t^2) $2a - 4a + 2a = 0$, (t) $4a - 4a - 2b + 2b = 0$

(1), $4a - 2b + 2c = 0$

2.1. Equations différentielles linéaires scalaires

Cours 6 (4)

2.1.3. Ordre 2

2.1.3.d) Détermination pratique de solutions de l'équation homogène

ii) Changement de fonction inconnue

$\varphi(t) = \psi(t)\underbrace{\varphi_1(t)}$

donnée par une expression explicite.

Ex 41 $(1+t^2)y'' + 4ty' + (1-t^2)y = 0$ (16)