Chapitre 2 Équations différentielles scalaires

Dans tout ce chapitre, n désigne un entier naturel non nul, $\mathbb{K}$ désigne le corps des nombres réels $\mathbb{R}$ ou celui des nombres complexes $\mathbb{C}$.

2.1 Équations différentielles linéaires scalaires

Dans cette partie, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

2.1.1 Résultats généraux

On s'intéresse à l'équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n

$$y^{(n)} = a_0(t)y + a_1(t)y' + \ldots + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + b(t), \tag{E}$$

où pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $a_i : I \longrightarrow \mathbb{K}$ et $b : I \longrightarrow \mathbb{K}$ sont des fonctions continues.

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions maximales de l'équation (E) et $\mathcal{S}_h$ l'ensemble des solutions maximales de l'équation homogène associée

$$y^{(n)} = a_0(t)y + a_1(t)y' + \ldots + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}. \tag{E_h}$$

D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire (voir chapitre 1), les solutions des équations (E) et (E_h) sont globales et définies sur I.

Proposition 1
L'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions de l'équation homogène (E_h) est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$.

Preuve — L'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions de (E_h) est le noyau de l'application linéaire

$$\begin{array}{rccl} \ell : & \mathcal{C}^n(I,\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{C}(I,\mathbb{K}) \\ & \varphi & \longmapsto & \varphi^{(n)} - a_0(t)\varphi - \ldots - a_{n-1}(t)\varphi^{(n-1)} \end{array}.$$

$\mathcal{S}_h$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$.

□

Proposition 2
L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation (E) est un espace affine dirigé par l'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions de l'équation homogène (E_h) :

$$\mathcal{S} = \varphi_p + \mathcal{S}_h,$$

où $\varphi_p \in \mathcal{S}$.

Preuve — D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, l'ensemble $\mathcal{S}$ est non vide. Il existe donc un élément φ_p de $\mathcal{S}$.

Soit $\varphi \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$. Alors $\varphi \in \mathcal{S}$ si et seulement si, pour tout $t \in I$,

$$\varphi^{(n)}(t) = a_0(t)\varphi(t) + \ldots + a_{n-1}(t)\varphi^{(n-1)}(t) + b(t),$$

soit encore, si et seulement si, pour tout $t \in I$,

$$\begin{aligned}(\varphi - \varphi_p)^{(n)}(t) &= \varphi^{(n)}(t) - \varphi_p^{(n)}(t) = a_0(t)\varphi(t) + \ldots + a_{n-1}(t)\varphi^{(n-1)}(t) + b(t) - \left(a_0(t)\varphi_p(t) + \ldots + a_{n-1}(t)\varphi_p^{(n-1)}(t) + b(t)\right) \\ &= a_0(t)\,(\varphi - \varphi_p)\,(t) + \ldots + a_{n-1}(t)\,(\varphi - \varphi_p)^{(n-1)}\,(t).\end{aligned}$$

Donc $\varphi \in \mathcal{S}$ si et seulement si $\varphi - \varphi_p \in \mathcal{S}_h$.

Donc $\mathcal{S} = \varphi_p + \mathcal{S}_h$. □

On redémontrera ce théorème dans certains cas sans utiliser le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, que nous n'avons pas démontré dans le premier chapitre.

En d'autres termes, si l'on connait une solution particulière φ_p de (E), alors l'ensemble des solutions de (E) est $\mathcal{S} = \varphi_p + \mathcal{S}_h$. Ainsi, pour trouver l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E), on cherche l'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions de l'équation homogène associée (E_h) et une solution particulière de (E).

MÉTHODE 3 — *Pour résoudre une équation différentielle linéaire scalaire non homogène (E), on procédera de la façon suivante :*

1. *On identifie le type de l'équation différentielle (E) étudiée.*
2. *On donne l'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions de l'équation homogène associée (E_h).*
3. *On cherche une solution particulière φ_p de l'équation (E)*
4. *On conclut en donnant l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation (E) : $\mathcal{S} = \varphi_p + \mathcal{S}_h$.*

Le principe de superposition des solutions énoncé ci-dessous est très utile en pratique car il permet de rechercher une solution particulière en décomposant le second membre en des membres plus simples.

PROPOSITION 4 (Principe de superposition)
Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ des éléments de $\mathbb{K}$ et $b_1, \ldots, b_N$ des applications continues de I dans $\mathbb{K}$. Supposons que pour tout $i \in [\![1, N]\!]$, φ_i est une solution particulière de l'équation

$$y^{(n)} = a_0(t)y + a_1(t)y' + \ldots + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + b_i(t).$$

Alors $\lambda_1\varphi_1 + \ldots \lambda_N\varphi_N$ est une solution particulière de l'équation

$$y^{(n)} = a_0(t)y + a_1(t)y' + \ldots + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \lambda_1 b_1(t) + \ldots + \lambda_N b_N(t).$$

Preuve — Considérons l'application linéaire

$$\begin{array}{rccl} \ell : & \mathcal{C}^n(I,\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{C}(I,\mathbb{K}) \\ & \varphi & \longmapsto & \varphi^{(n)} - a_0(t)\varphi - \ldots - a_{n-1}(t)\varphi^{(n-1)} \end{array}.$$

Par hypothèse, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $\ell(\varphi_i) = b_i$.

Par linéarité de ℓ, on a alors $\ell(\lambda_1\varphi_1 + \ldots + \lambda_N\varphi_N) = \lambda_1\ell(\varphi_1) + \ldots + \lambda_N\ell(\varphi_N) = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_N b_N$.

Donc $\lambda_1\varphi_1 + \ldots + \lambda_N\varphi_N$ est une solution particulière de

$$y^{(n)} = a_0(t)y + a_1(t)y' + \ldots + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \lambda_1 b_1(t) + \ldots + \lambda_N b_N(t).$$

□

EXEMPLE 5 — *Pour trouver une solution particulière sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle*

$$y' + y = \cos(x) + (x+1)\mathrm{e}^{-x},$$

on peut donc chercher une solution particulière φ_1 de l'équation différentielle $y' + y = \cos(x)$ puis une solution particulière φ_2 de l'équation différentielle $y' + y = (x+1)\mathrm{e}^{-x}$, et enfin les additionner. Ainsi, au lieu d'un calcul compliqué, on se ramène à deux calculs plus simples.

2.1.2 Équations différentielles linéaires scalaires du premier ordre

On s'intéresse aux équations différentielles linéaires scalaires du premier ordre de la forme

$$y' = a(t)y + b(t), \qquad (E_1)$$

où a et b sont des applications de I dans $\mathbb{K}$ continues.

2.1.2.a. Ensemble des solutions de l'équation homogène

PROPOSITION 6
Soient $a \in \mathcal{C}(I,\mathbb{K})$ et A une primitive de a sur I.

1. *L'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions de l'équation homogène $y' = a(t)y$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 1 engendré par l'application $I \longrightarrow \mathbb{K}\ ;\ t \longmapsto \exp(A(t))$:*

$$\mathcal{S}_h = \{I \longrightarrow \mathbb{K}\ ;\ t \longmapsto \lambda \exp(A(t)) \mid \lambda \in \mathbb{K}\}.$$

2. *Soient $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$. Le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} y' = a(t)y \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

possède une et une seule solution définie sur I, qui est l'application

$$I \longrightarrow \mathbb{K} \; ; \; t \longmapsto y_0 \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\mathrm{d}s\right).$$

Preuve —

1. $\triangleright$ Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Posons $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{K} \; ; \; t \longmapsto \lambda \mathrm{e}^{A(t)}$. Alors, φ est dérivable et pour tout $t \in I$, $\varphi'(t) = \lambda a(t)\mathrm{e}^{A(t)} = a(t)\varphi(t)$. Donc φ est solution de $y' = a(t)y$.
   $\triangleleft$ Réciproquement, soit φ une solution de l'équation $y' = a(t)y$. Posons, pour tout $t \in I$, $\psi(t) = \varphi(t)e^{-A(t)}$.
   Alors, φ étant dérivable, ψ l'est aussi et pour tout $t \in I$, $\psi'(t) = e^{-A(t)}\left(\varphi'(t) - a(t)\varphi(t)\right) = e^{-A(t)} \times 0 = 0$.
   Il existe donc $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que pour tout $t \in I$, $\psi(t) = \lambda$.
   Donc pour tout $t \in I$, $\varphi(t)e^{-A(t)} = \lambda$, soit $\varphi(t) = \lambda \mathrm{e}^{A(t)}$.
   D'où le résultat.
2. D'après le premier point, $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{K}$ est solution du problème de Cauchy si et seulement si pour tout $t \in I$, $\varphi(t) = \lambda \mathrm{e}^{A(t)}$ où $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\varphi(t_0) = y_0$, soit si et seulement si $\lambda = y_0\mathrm{e}^{-A(t_0)}$.
   Il existe donc une unique solution au problème de Cauchy, qui est l'application

$$I \longrightarrow \mathbb{K} \; ; \; t \longmapsto y_0\mathrm{e}^{A(t)-A(t_0)} = y_0\mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} a(s)\mathrm{d}s}.$$

□

Remarque 7 — *Dans le cas particulier où a est une constante, les solutions de l'équation homogène $y' = ay$ sont les fonctions $I \longrightarrow \mathbb{K} \; ; \; t \longmapsto \lambda e^{at}$, où $\lambda \in \mathbb{K}$.*

Exemples 8

- *Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle*

$$y' = \frac{1}{1+t^2}y., \tag{1}$$

  – Identification : *Il s'agit d'une équation différentielle linéaire homogène scalaire du premier ordre à coefficients continus sur $\mathbb{R}$.*

  –Solutions de l'équation homogène : *L'application $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ admet comme primitive sur $\mathbb{R}$ l'application*

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; t \longmapsto \arctan(t).$$

  L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de (1) est donc le $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 1 engendré par la fonction $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; t \longrightarrow \exp(\arctan(t))$:

$$\mathcal{S}_h = \{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; t \longmapsto \lambda \exp(\arctan(t)) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

- *Déterminons sur $\mathbb{R}$ la solution du problème de Cauchy* $\begin{cases} y' = \dfrac{1}{1+t^2}y, \\ y(0) = 1. \end{cases}$

  D'après le point précédent, on connaît l'ensemble des solutions de l'équation (1), elles sont de la forme $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; t \longmapsto \lambda \exp(\arctan(t))$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.
  La condition initiale $y(0) = 1$ donne alors $\lambda = 1$.
  Donc l'unique solution de ce problème de Cauchy sur $\mathbb{R}$ est l'application

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; t \longmapsto \exp(\arctan(t)).$$

2.1.2.b. Ensemble des solutions de l'équation avec second membre

Proposition 9
Soient a et b deux éléments de $\mathcal{C}(I, \mathbb{K})$.

1. *L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation $y' = a(t)y + b(t)$ (E_1) est un espace affine de dimension 1 dirigé par l'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions de l'équation homogène :*

$$\mathcal{S} = \{I \longrightarrow \mathbb{K}\ ;\ t \longmapsto \varphi_p(t) + \lambda \exp(A(t)) \mid \lambda \in \mathbb{K}\} = \varphi_p + \mathcal{S}_h,$$

   où φ_p est une solution particulière de (E_1).

2. *Soient $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$. Le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} y' = a(t)y + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

   possède une et une seule solution définie sur I, qui est l'application

$$I \longrightarrow \mathbb{K}\ ;\ t \longmapsto \int_{t_0}^{t} b(s)\mathrm{e}^{\int_s^t a(\sigma)\mathrm{d}\sigma}\mathrm{d}s + y_0\mathrm{e}^{\int_{t_0}^t a(s)\mathrm{d}s}.$$

Preuve — On démontre ainsi le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire dans le cas linéaire scalaire d'ordre 1.

1. D'après le paragraphe précédent, les solutions de l'équation homogène $y' = a(t)y$ sont de la forme $t \longmapsto \lambda\mathrm{e}^{A(t)}$, où $\lambda \in \mathbb{K}$ et A est une primitive de a sur I.
   La *méthode de variation de la constante* consiste à chercher une solution de l'équation (E_1) sous la forme $\varphi(t) = \psi(t)\mathrm{e}^{A(t)}$, où ψ est une fonction de I dans $\mathbb{K}$. Ce principe de résolution est appelé *méthode de variation de la constante.*
   Soit $t_0 \in I$. Soit φ une fonction de I dans $\mathbb{K}$ dérivable. Posons, pour tout $t \in I$, $\psi(t) = \varphi(t)\mathrm{e}^{-A(t)}$, de sorte que $\varphi(t) = \psi(t)\mathrm{e}^{A(t)}$.
   φ étant dérivable, ψ l'est aussi et pour tout $t \in I$, $\varphi'(t) = a(t)\psi(t)\mathrm{e}^{A(t)} + \psi'(t)\mathrm{e}^{A(t)} = a(t)\varphi(t) + \psi'(t)\mathrm{e}^{A(t)}$.
   Donc $\varphi \in \mathcal{S}$ si et seulement si, pour tout $t \in I$, $\psi'(t)\mathrm{e}^{A(t)} = b(t)$, soit, si et seulement si, pour tout $t \in I$, $\psi'(t) = b(t)\mathrm{e}^{-A(t)}$.
   L'application $t \longmapsto b(t)\mathrm{e}^{-A(t)}$ étant continue sur I, $\varphi \in \mathcal{S}$ si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que pour tout $t \in I$, $\psi(t) = \int_{t_0}^t b(s)\mathrm{e}^{-A(s)}\mathrm{d}s + \lambda$, i.e. $\varphi(t) = \mathrm{e}^{A(t)}\int_{t_0}^t b(s)\mathrm{e}^{-A(s)}\mathrm{d}s + \lambda\mathrm{e}^{A(t)}$.
   Ainsi, $\mathcal{S}$ est l'ensemble des applications de la forme

$$\varphi_\lambda : I \longrightarrow \mathbb{K}\ ;\ t \longmapsto \underbrace{\mathrm{e}^{A(t)}\int_{t_0}^t b(s)\mathrm{e}^{-A(s)}\mathrm{d}s}_{\varphi_0 \text{ solution particulière de } (E_1)} + \underbrace{\lambda\mathrm{e}^{A(t)}}_{\in\mathcal{S}_h}.$$

   On en déduit donc le premier point.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. En reprenant les notations précédentes, φ_λ est solution du problème de Cauchy si et seulement si $\varphi_\lambda(t_0) = \lambda\mathrm{e}^{A(t_0)} = y_0$, soit encore, si et seulement si $\lambda = y_0\mathrm{e}^{-A(t_0)}$.
   Il existe donc une unique solution au problème de Cauchy, qui est l'application

$$I \longrightarrow \mathbb{K}\ ;\ t \longmapsto \int_{t_0}^t b(s)\mathrm{e}^{A(t)-A(s)}\mathrm{d}s + y_0\mathrm{e}^{A(t)-A(t_0)} = \int_{t_0}^t b(s)\mathrm{e}^{\int_s^t a(\sigma)\mathrm{d}\sigma}\mathrm{d}s + y_0\mathrm{e}^{\int_{t_0}^t a(s)\mathrm{d}s}.$$

□

En pratique, l'expression de la solution du problème de Cauchy donnée dans la proposition précédente ne sera pas utilisée telle quelle mais la démarche pour l'obtenir pourra être employée. On parle de *méthode de variation de la constante.*

2.1.2.c. Détermination pratique d'une solution particulière

Nous savons résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E_1), il reste maintenant à expliquer comment trouver une solution particulière. On rappelle que l'on peut utiliser le principe de superposition des solutions pour simplifier la recherche d'une solution particulière.

Parfois, on connaît une solution particulière, parce qu'elle apparaît de façon évidente ou qu'elle est suggérée dans un énoncé. Dans ce cas, il ne reste plus qu'à appliquer la proposition 9.

Exemple 10 — *Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle*

$$y' + t^2 y = t^2. \tag{2}$$

- Identification : *Il s'agit d'une équation différentielle linéaire scalaire du premier ordre à coefficients et second membre continus sur $\mathbb{R}$.*
- Solutions de l'équation homogène : *L'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à (2) est*
$$\mathcal{S}_h = \{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \lambda \exp\left(-\frac{t^3}{3}\right) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$
- Solution particulière de l'équation : *La fonction $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto 1$ est une solution particulière évidente de (2).*
- Conclusion : *L'ensemble des solutions de l'équation (2) est donc*
$$\mathcal{S} = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto 1 + \lambda \exp\left(-\frac{t^3}{3}\right) \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

Si aucune solution évidente n'apparaît, on peut utiliser la méthode de variation de la constante, qui reprend la démonstration du point 1. de la proposition 9.

Méthode 11 (Méthode de variation des constantes) — *Cette méthode permet d'obtenir l'expression d'une solution particulière de l'équation (E_1).*

1. *On sait que les solutions de l'équation homogène associée sont de la forme $t \longmapsto \lambda e^{A(t)}$ où $\lambda \in \mathbb{K}$ et A désigne une primitive de a. On cherche alors une solution particulière sous la forme $\varphi_p(t) = \psi(t)e^{A(t)}$ où ψ est une fonction dérivable de I dans $\mathbb{K}$.*
2. *En remplaçant dans l'équation (E_1) et après simplification, on obtient que φ_p est solution de (E_1) si et seulement si $\psi'(t)e^{A(t)} = b(t)$, soit finalement $\psi'(t) = b(t)e^{-A(t)}$.*
3. *On obtient alors ψ par primitivation, et donc l'expression de φ_p.*

Remarque 12 — *Notons que la méthode de variation de la constante donne en fait plus qu'une simple solution particulière de (E_1), elle donne exactement toutes les solutions.*

Exemple 13 — *Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle*

$$y' + \frac{t}{1+t^2} y = \frac{1}{1+t^2} \tag{3}$$

- Identification : *Il s'agit d'une équation différentielle linéaire scalaire du premier ordre à coefficients et second membre continus sur $\mathbb{R}$.*
- Solutions de l'équation homogène : *Pour tout $t \in \mathbb{R}$,*
$$\int_0^t \frac{-s}{1+s^2} \mathrm{d}s = -\frac{1}{2} \ln\left(1+t^2\right) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right).$$
L'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à (3) est donc
$$\mathcal{S}_h = \{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \frac{\lambda}{\sqrt{1+t^2}} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$
- Solution particulière : *Appliquons la méthode de variation de la constante.*
Cherchons une solution particulière φ_p de (3) sous la forme $\varphi_p(t) = \dfrac{\psi(t)}{\sqrt{1+t^2}}$, où ψ est une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Alors φ_p est solution de l'équation si et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\frac{\psi'(t)}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{1+t^2},$$

soit encore, si et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\psi'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.
Par exemple, choisissons pour ψ *la fonction* $\psi : t \longmapsto \operatorname{argsh}(t)$.
La fonction $\varphi_p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \dfrac{\operatorname{argsh}(t)}{\sqrt{1+t^2}}$ *est alors une solution particulière de (3).*

– Conclusion : *L'ensemble des solutions de (3) est donc*

$$\mathcal{S} = \{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \frac{\operatorname{argsh}(t) + \lambda}{\sqrt{1+t^2}} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Enfin, notons que dans le cas particulier où l'équation s'écrit sous la forme

$$y' + a_0 y = P(t)e^{\alpha t},$$

où a_0 et α sont des éléments de $\mathbb{K}$ et P est un polynôme, on peut se passer de la méthode de variation de la constante pour obtenir plus rapidement une solution particulière en utilisant le résultat suivant. Bien sûr, la méthode de variation de la constante peut toujours être utilisée !

Proposition 14
Soient a_0 *et* α *des éléments de* $\mathbb{K}$ *et* P *une application polynomiale. L'équation différentielle*

$$y' + a_0 y = P(t)\mathrm{e}^{\alpha t}$$

admet une solution particulière de la forme

$$I \longrightarrow \mathbb{K}\ ;\ t \longmapsto \begin{cases} Q(t)\mathrm{e}^{\alpha t} & \text{si } \alpha \text{ n'est pas racine de } X + a_0 \\ tQ(t)\mathrm{e}^{\alpha t} & \text{sinon,} \end{cases},$$

où Q *est une application polynomiale de même degré que* P.

Exemple 15 — *Résolvons sur* $\mathbb{R}$ *l'équation différentielle*

$$y' - 2y = t\mathrm{e}^t. \tag{4}$$

– Identification : *Il s'agit d'une équation différentielle linéaire scalaire du premier ordre à coefficients constants et second membre continu.*
– Solutions de l'équation homogène : *L'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à (4) est*

$$\mathcal{S}_h = \{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \lambda\mathrm{e}^{2t} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

– Solution particulière : *Les coefficients de l'équation (4) sont constants et le second membre est de la forme polynôme-exponentielle. On peut donc chercher une solution particulière de l'équation différentielle* $y' - 2y = t\mathrm{e}^t$ *sous la forme*

$$\varphi_p(t) = (at + b)\mathrm{e}^t$$

(car ici $\alpha = 1$ *n'est pas racine de* $X - 2$ *et* $P(t) = t$ *est de degré* 1*).*
Alors φ_p *est solution de l'équation si et seulement si, pour tout* $t \in \mathbb{R}$, $\varphi_p'(t) - 2\varphi_p(t) = t\mathrm{e}^t$. *Après calculs, on trouve* $a = b = -1$ *et donc* $\varphi_p(x) = (-t-1)\mathrm{e}^t$.
– Conclusion *L'ensemble des solutions de l'équation est donc*

$$\mathcal{S} = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \mapsto (-t-1)\mathrm{e}^t + \lambda\mathrm{e}^{2t} \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

Remarque 16 — *Soient* a_0, β *et* ω *des nombres réels et* P *une application polynomiale à coefficients réels. Si le second membre est de la forme* $t \longmapsto P(t)\mathrm{e}^{\beta t}\cos(\omega t)$ *(resp.* $\longmapsto P(t)\mathrm{e}^{\beta t}\sin(\omega t)$*), on peut chercher une solution particulière complexe de l'équation* $y' + a_0 y = P(t)\mathrm{e}^{(\beta + i\omega)t}$ *puis en prendre sa partie réelle (resp. imaginaire).*

Preuve — *Supposons que* $\varphi_{p,\mathbb{C}}$ *soit une solution particulière complexe de* $y' + a_0 y = P(t)\mathrm{e}^{(\beta+i\omega)t}$.

Alors $\operatorname{Re}(\varphi_{p,\mathbb{C}})' + a_0\operatorname{Re}(\varphi_{p,\mathbb{C}}) = \operatorname{Re}\left(\varphi_{p,\mathbb{C}}' + a_0\varphi_{p,\mathbb{C}}\right) = \operatorname{Re}\left(P(t)\mathrm{e}^{(\beta+i\omega)t}\right) = P(t)\mathrm{e}^{\beta t}\cos(\omega t)$.

Donc $\operatorname{Re}(\varphi_{p,\mathbb{C}})$ *est une solution particulière de* $y' + a_0 y = P(t)\mathrm{e}^{\beta t}\cos(\omega t)$. □

Exemple 17 — *Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle*

$$y' + y = 2\cos(t) + \sin(t). \tag{5}$$

- Identification ; *Il s'agit d'une équation différentielle linéaire scalaire du premier ordre à coefficients constants et second membre continu sur $\mathbb{R}$.*
- Solutions de l'équation homogène : *L'ensemble des solutions de l'équation homogène est*

$$\mathcal{S}_h = \{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; t \longmapsto \lambda e^{-t} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

- Solution particulière : *Nous allons utiliser le principe de superposition des solutions.*
  - *Commençons par chercher une solution particulière complexe de $y' + y = e^{it}$ sous la forme $\varphi_{p,\mathbb{C}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \; ; \; t \longmapsto c\, e^{it}$, où $c \in \mathbb{C}$ (car i n'est pas racine de $X+1$ et P est de degré 0). Après calculs, on trouve $c = \dfrac{1}{1+i} = \dfrac{1-i}{2}$ et donc $\varphi_{p,\mathbb{C}}(t) = \dfrac{1-i}{2} e^{it}$.*
  - *Une solution particulière de $y' + y = \cos(t)$ est donc $\varphi_{p,1} = \mathrm{Re}(\varphi_{p,\mathbb{C}})$, c'est-à-dire*

$$\varphi_{p,1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; t \longmapsto \frac{1}{2}\cos(t) + \frac{1}{2}\sin(t).$$

  - *Une solution particulière de $y' + y = \sin(t)$ est donc $\varphi_{p,2} = \mathrm{Im}(\varphi_{p,\mathbb{C}})$, c'est-à-dire*

$$\varphi_{p,2} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; t \longmapsto -\frac{1}{2}\cos(t) + \frac{1}{2}\sin(t).$$

  - *Par le principe de superposition des solutions, une solution particulière de (5) est donc*

$$\varphi_p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; t \longmapsto 2\varphi_{p,1}(t) + \varphi_{p,2}(t) = \frac{1}{2}\cos(t) + \frac{3}{2}\sin(t).$$

- Conclusion : *L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de (5) est donc*

$$\mathcal{S} = \{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; t \longmapsto \frac{1}{2}\cos(t) + \frac{3}{2}\sin(t) + \lambda e^{-t} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

2.1.2.d. Raccordements de solutions

Jusqu'ici, nous avons étudié les équations différentielles dites résolues. Voyons comment résoudre celles qui ne sont pas sous forme résolue.

On s'intéresse donc à la résolution des équations différentielles linéaires scalaires du premier ordre de la forme

$$a(t)y' + b(t)y = c(t), \tag{$E_{1,nr}$}$$

où a, b et c sont des applications de I dans $\mathbb{K}$ continues, d'équation différentielle homogène associée

$$a(t)y' + b(t)y = 0. \tag{$E_{1h,nr}$}$$

Soit J un intervalle inclus dans I. On s'intéresse aux solutions de ces équations, définies sur l'intervalle J.

• Premier cas : l'application a ne s'annule pas sur l'intervalle J.

Alors, en divisant par $a(t)$, les équations se ramènent aux équations résolues suivantes, que l'on sait résoudre :

$$y' = -\frac{b(t)}{a(t)}y + \frac{c(t)}{a(t)}$$

et

$$y' = -\frac{b(t)}{a(t)}y.$$

L'ensemble des solutions de ($E_{1h,nr}$) est donc un espace vectoriel de dimension 1 et l'ensemble des solutions de ($E_{1,nr}$) est un espace affine de dimension 1 dirigé par l'ensemble des solutions de l'équation homogène.

• Second cas : l'application a s'annule sur l'intervalle J.

Alors, nous allons voir sur des exemples que les résultats précédents sur les équations résolues, comme le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, peuvent tomber en défaut.

L'ensemble des solutions de l'équation homogène ($E_{1h,nr}$) est un espace vectoriel. Cependant, sa dimension n'est pas nécessairement égale à 1. De plus, l'ensemble des solutions de l'équation ($E_{1,nr}$) est soit le vide, soit un espace affine dirigé par l'ensemble des solutions de l'équation homogène. Là encore, on ne peut rien dire sur sa dimension.

Supposons par exemple que a s'annule en un nombre fini de points t_0, t_1, …, t_N de l'intervalle J. Posons, pour tout $i \in [\![0, N-1]\!]$, $J_i =]t_i, t_{i+1}[$. Alors $\displaystyle\bigcup_{i=0}^{N-1} J_i = J \setminus \{t_0, \dots, t_N\}$ et l'application a ne s'annule pas sur J_i. Pour résoudre l'équation ($E_{1,nr}$) sur J, nous procéderons de la manière suivante.

Méthode 18 —

1. Résolution de ($E_{1,nr}$) sur les intervalles de non annulation de a : *Pour tout $i \in [\![0, N-1]\!]$, on résout l'équation ($E_{1,nr}$) sur l'intervalle J_i en se ramenant à une équation résolue, puisque a ne s'annule pas sur J_i.*
2. Résolution de ($E_{1,nr}$) sur J : *On cherche ensuite l'ensemble des solutions de ($E_{1,nr}$) sur J.*
   (a) Raccordement des solutions aux points t_i.
   On considère φ une (éventuelle[1]) solution de ($E_{1,nr}$) sur J. Alors, pour tout $i \in [\![0, N-1]\!]$, φ est solution de ($E_{1,nr}$) sur l'intervalle J_i et on en connaît donc son expression explicite sur J_i d'après le premier point : $\varphi = \varphi_i$ où φ_i est solution de ($E_{1,nr}$) sur J_i.
   φ étant solution de ($E_{1,nr}$), elle est continue sur J et on va donc chercher à prolonger par continuité aux points t_0, …, t_N la fonction
   $$J \setminus \{t_0, \dots, t_N\} \longrightarrow \mathbb{K} \; ; \; t \longmapsto \varphi_i(t) \text{ si } t \in J_i,$$
   qui coïncide avec φ sur $J \setminus \{t_0, \dots, t_N\}$. On détermine alors les valeurs possibles de φ aux points t_i. On obtient ainsi l'expression de φ sur J.
   (b) *Réciproquement, on vérifie que la fonction φ ainsi obtenue est dérivable sur J, en particulier aux points t_i, et qu'elle vérifie l'équation différentielle ($E_{1,nr}$), en particulier aux points t_i. On obtient ainsi l'ensemble des solutions sur J de l'équation différentielle ($E_{1,nr}$).*

Exemple 19 — *Déterminons l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle*

$$ty' - ky = 0 \tag{6}$$

avec $k = 2$, $k = 1$ ou $k = \frac{1}{2}$.

- Identification : *Il s'agit d'une équation différentielle linéaire homogène scalaire du premier ordre à coefficients continus, sous forme non résolue dont le coefficient t de y' s'annule en 0.*
- Résolution sur les intervalles de non annulation de t : *Posons $J_1 = \mathbb{R}_+^*$ et $J_2 = \mathbb{R}_-^*$. Soit $i \in \{1, 2\}$.*
  - Identification : *La résolution de l'équation $ty' - ky = 0$ sur J_i se ramène à celle de l'équation $y' = \frac{k}{t} y$ sur J_i car t ne s'annule pas sur J_i. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire scalaire homogène du premier ordre à coefficients continus sur J_i.*
  - Résolution de l'équation (homogène) : *Une primitive de $t \longmapsto \frac{k}{t}$ est par exemple l'application $t \longmapsto k\ln(|t|) = \ln\left(|t|^k\right)$. Alors $\exp\left(\ln\left(|t|^k\right)\right) = |t|^k$.*
    L'ensemble des solutions sur J_i de l'équation homogène est donc
    $$\mathcal{S}_h = \left\{ J_i \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; t \longmapsto \lambda |t|^k \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

1. Dans le cas de l'équation homogène, on sait qu'il existe des solutions car l'ensemble des solutions de ($E_{1h,nr}$) est un espace vectoriel. Sinon, on n'est pas sûr qu'il en existe

– Résolution de l'équation sur $\mathbb{R}$:

  – Raccordement des solutions au point 0 :

    Soit φ une solution de (6) définie sur $\mathbb{R}$. D'après le point précédent, il existe $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ et $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\varphi(t) = \begin{cases} \lambda_1 |t|^k \text{ si } t > 0 \\ \lambda_2 |t|^k \text{ si } t < 0 \end{cases} .$$

    φ étant continue en 0, on a $\lim\limits_{t \to 0^+} \varphi(t) = \lim\limits_{t \to 0^-} \varphi(t) = \varphi(0)$.
    Or $\lim\limits_{t \to 0^+} \varphi(t) = \lim\limits_{t \to 0^+} \lambda_1 |t|^k = 0$ et $\lim\limits_{t \to 0^-} \varphi(t) = \lim\limits_{t \to 0^-} \lambda_2 |t|^k = 0$. On en déduit donc que $\varphi(0) = 0$.
    Donc nécessairement, φ est définie par

$$\varphi(t) = \begin{cases} \lambda_1 |t|^k \text{ si } t \geq 0 \\ \lambda_2 |t|^k \text{ si } t < 0 \end{cases} . \tag{7}$$

  – Étude réciproque : *Réciproquement, soient λ_1 et λ_2 des réels et soit $\varphi_{\lambda_1,\lambda_2}$ l'application donnée par (7). Étudions la dérivabilité de $\varphi_{\lambda_1,\lambda_2}$ et regardons si elle vérifie l'équation (6) sur $\mathbb{R}$.*
    La restriction de $\varphi_{\lambda_1,\lambda_2}$ aux intervalles ouverts J_1 et J_2 est dérivable, donc φ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et vérifie l'équation différentielle (6) en tout point de $\mathbb{R}^*$. Regardons au point 0.

    — 1^{er} *cas : $k = 2$.*
      On a

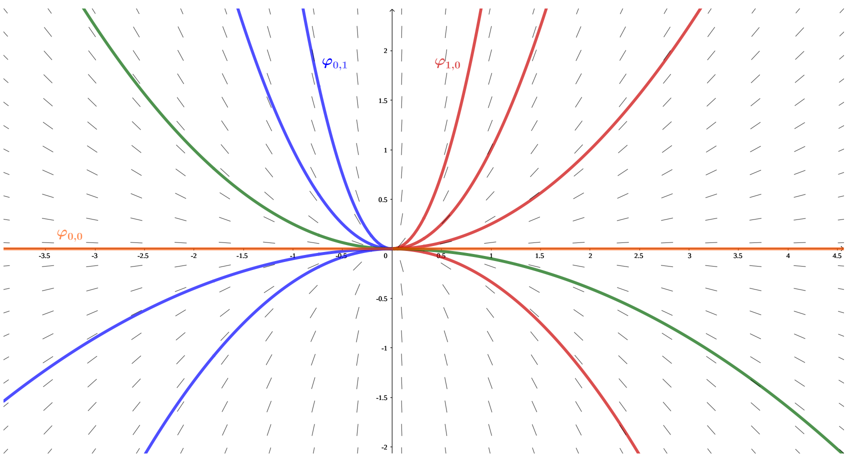
$$\frac{\varphi_{\lambda_1,\lambda_2}(t) - \varphi_{\lambda_1,\lambda_2}(0)}{t} = \begin{cases} \dfrac{\lambda_1 t^2 - 0}{t} = \lambda_1 t \quad \xrightarrow[t \to 0^+]{} 0 \\ \dfrac{\lambda_2 (-t)^2 - 0}{t} = \lambda_2 t \quad \xrightarrow[t \to 0^-]{} 0 \end{cases} .$$

      Donc $\varphi_{\lambda_1,\lambda_2}$ est dérivable en 0 de dérivée $\varphi'_{\lambda_1,\lambda_2}(0) = 0$.
      De plus, on a $0\varphi'_{\lambda_1,\lambda_2}(0) - 2\varphi_{\lambda_1,\lambda_2}(0) = 0$ donc $\varphi_{\lambda_1,\lambda_2}$ est solution de l'équation (6) en 0 et donc sur $\mathbb{R}$ d'après ce qui précède.
      Conclusion :*L'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de $ty' - 2y = 0$ est donc*

$$\mathcal{S} = \left\{ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; t \longmapsto \varphi_{\lambda_1,\lambda_2}(t) \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

      Notons que pour tout $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, on a $\varphi_{\lambda_1,\lambda_2} = \lambda_1 \varphi_{1,0} + \lambda_2 \varphi_{0,1}$, donc $\mathcal{S} = \mathrm{vect}(\varphi_{1,0}, \varphi_{0,1})$ et la famille $(\varphi_{1,0}, \varphi_{0,1})$ est libre. $\mathcal{S}$ est donc un espace vectoriel de dimension 2.

      Sur le champ de vecteurs ci-dessous, on a tracé des courbes intégrales de l'équation $ty' - 2y = 0$ définies sur $\mathbb{R}^*_-$ en bleu, sur $\mathbb{R}^*_+$ en rouge, et définies sur tout $\mathbb{R}$ en vert. La fonction nulle, solution sur $\mathbb{R}$, est tracée en orange. Les courbes intégrales définies sur tout $\mathbb{R}$ sont des combinaisons linéaires des fonctions $\varphi_{1,0}$ et $\varphi_{0,1}$.



— $2^{ème}$ *cas : $k = 1$.*

On a

$$\frac{\varphi_{\lambda_1,\lambda_2}(t) - \varphi_{\lambda_1,\lambda_2}(0)}{t} = \begin{cases} \dfrac{\lambda_1 t - 0}{t} = \lambda_1 & \xrightarrow[t \to 0^+]{} \lambda_1 \\ \dfrac{\lambda_2(-t) - 0}{t} = -\lambda_2 & \xrightarrow[t \to 0^-]{} -\lambda_2 \end{cases}.$$

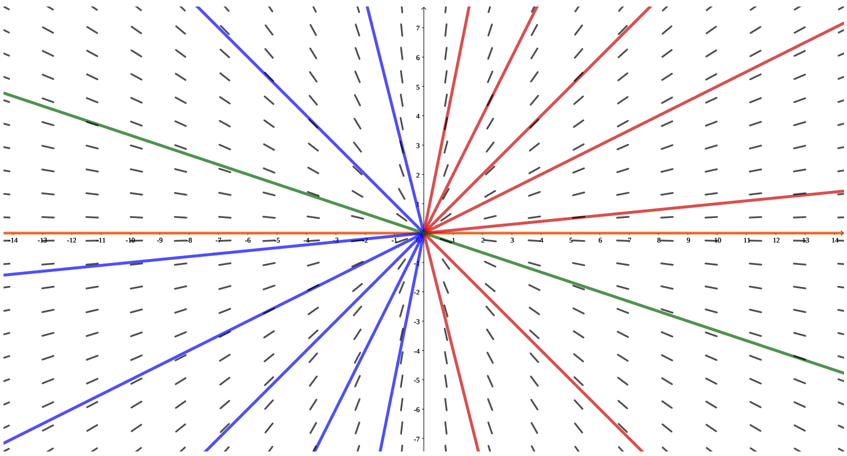
Donc $\varphi_{\lambda_1,\lambda_2}$ est dérivable en 0 si et seulement si $\lambda_1 = -\lambda_2$, et dans ce cas, $\varphi'_{\lambda_1,\lambda_2}(0) = \lambda_1$. On a alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi_{\lambda_1,-\lambda_1}(t) = \lambda_1 t$ et $0\varphi'_{\lambda_1,-\lambda_1}(0) - 2\varphi_{\lambda_1,-\lambda_1}(0) = 0$. Donc $\varphi_{\lambda_1,-\lambda_1}$ est solution de (6) en 0 et donc sur $\mathbb{R}$.

Conclusion : *L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de $ty' - y = 0$ est donc*

$$\mathcal{S} = \{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \lambda_1 t \mid \lambda_1 \in \mathbb{R}\}.$$

$\mathcal{S}$ est donc un espace vectoriel de dimension 1.

Sur le champ de vecteurs ci-dessous, on a tracé des courbes intégrales de l'équation $ty' - y = 0$ définies sur $\mathbb{R}_-^*$ en bleu, sur $\mathbb{R}_+^*$ en rouge, et définies sur tout $\mathbb{R}$ en vert. La fonction nulle, solution sur $\mathbb{R}$, est tracée en orange. Les courbes intégrales définies sur $\mathbb{R}$ sont des droites.



— $3^{ème}$ *cas : $k = \frac{1}{2}$.*

On a

$$\frac{\varphi_{\lambda_1,\lambda_2}(t) - \varphi_{\lambda_1,\lambda_2}(0)}{t} = \begin{cases} \dfrac{\lambda_1\sqrt{t} - 0}{t} = \dfrac{\lambda_1}{\sqrt{t}} & \xrightarrow[t \to 0^+]{} \begin{cases} +\infty \text{ si } \lambda_1 > 0 \\ 0 \text{ si } \lambda_1 = 0 \\ -\infty \text{ si } \lambda_1 < 0 \end{cases} \\ \dfrac{\lambda_2\sqrt{-t} - 0}{t} = -\dfrac{\lambda_2}{\sqrt{-t}} & \xrightarrow[t \to 0^-]{} \begin{cases} -\infty \text{ si } \lambda_2 > 0 \\ 0 \text{ si } \lambda_2 = 0 \\ +\infty \text{ si } \lambda_2 < 0 \end{cases} \end{cases}.$$

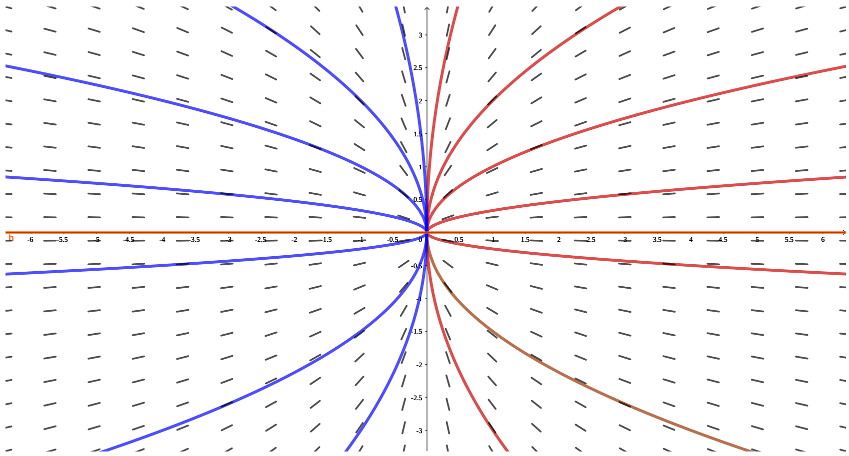
Donc $\varphi_{\lambda_1,\lambda_2}$ est dérivable en 0 si et seulement si $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, soit encore, si et seulement si $\varphi_{\lambda_1,\lambda_2} = 0$. Donc $\varphi_{\lambda_1,\lambda_2}$ est l'application nulle qui est bien solution sur $\mathbb{R}$ de (6).

Conclusion : *L'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de $ty' - \frac{1}{2}y = 0$ est donc*

$$\mathcal{S} = \{0_{\mathbb{R}}\}.$$

$\mathcal{S}$ est donc un espace vectoriel de dimension 0.

Sur le champ de vecteurs ci-dessous, on a tracé des courbes intégrales de l'équation $ty' - \frac{1}{2}y = 0$ définies sur $\mathbb{R}_-^*$ en bleu et sur $\mathbb{R}_+^*$ en rouge. Seule la fonction nulle (tracée en orange) est solution sur $\mathbb{R}$. Il n'y a pas de raccordement dérivable possible en 0 entre les courbes bleues et rouges, et donc pas de courbes intégrales sur $\mathbb{R}$.



Remarque 20 — *De cette étude, on en déduit que le problème de Cauchy* $\left\{\begin{array}{l} ty' - 2y = 0 \\ y(0) = 0 \end{array}\right.$ *admet une infinité de solutions alors que le problème de Cauchy* $\left\{\begin{array}{l} ty' - 2y = 0 \\ y(0) = 1 \end{array}\right.$ *n'en admet aucune.*

Le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire tombe donc en défaut en $t = 0$*, point en lequel le coefficient de* y' *s'annule.*

Exemple 21 — *Déterminons l'ensemble des solutions définies sur* $\mathbb{R}$ *de l'équation*

$$t^2 y' - ty = 1. \tag{8}$$

- Identification : *Il s'agit d'une équation différentielle linéaire scalaire du premier ordre à coefficients continus, sous forme non résolue dont le coefficient* t^2 *de* y' *s'annule en* 0.
- Résolution de l'équation sur les intervalles de non annulation de t^2 : *Posons* $J_1 = \mathbb{R}_+^*$ *et* $J_2 = \mathbb{R}_-^*$. *Soit* $i \in \{1, 2\}$.
  - Identification : *La résolution de l'équation* $t^2 y' - ty = 1$ *sur* J_i *se ramène à celle de l'équation* $y' = \dfrac{1}{t} y + \dfrac{1}{t^2}$ *car* t^2 *ne s'annule pas. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire scalaire du premier ordre à coefficients continus sur* J_i.
  - Solutions de l'équation homogène : *L'ensemble des solutions de l'équation homogène sur* J_i *est*
  $$\mathcal{S}_h = \left\{J_i \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; t \longmapsto \tilde{\lambda}|t| \mid \tilde{\lambda} \in \mathbb{R}\right\} = \{J_i \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; t \longmapsto \lambda t \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$
  - Solution particulière : *Appliquons la méthode de variation de la constante.*
  Cherchons une solution particulière φ_p *de (8) définie sur* J_i *sous la forme* $\varphi_p(t) = \psi(t)t$ *où* ψ *est une fonction dérivable de* J_i *dans* $\mathbb{R}$.
  Alors φ_p *est solution de (8) si et seulement si, pour tout* $t \in J_i$,
  $$t^3 \psi'(t) = 1,$$
  soit encore, si et seulement si, pour tout $t \in J_i$, $\psi'(t) = \dfrac{1}{t^3}$.
  Par exemple, choisissons pour ψ *la fonction* $\psi : t \longmapsto -\dfrac{1}{2t^2}$.
  La fonction $\varphi_p : J_i \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; t \longmapsto -\dfrac{1}{2t}$ *est alors une solution particulière de (8).*
  - Conclusion : *L'ensemble des solutions de (8) sur* J_i *est donc*
  $$\mathcal{S} = \left\{J_i \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; t \longmapsto \lambda t - \frac{1}{2t} \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$
- Résolution de l'équation sur $\mathbb{R}$: *Soit* φ *une éventuelle solution de (8) sur* $\mathbb{R}$. *D'après le point précédent, il existe* $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ *et* $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ *tels que*
$$\varphi(t) = \left\{\begin{array}{ll} \lambda_1 t - \dfrac{1}{2t} & \text{si } t > 0 \\ \lambda_2 t - \dfrac{1}{2t} & \text{si } t < 0 \end{array}\right.$$

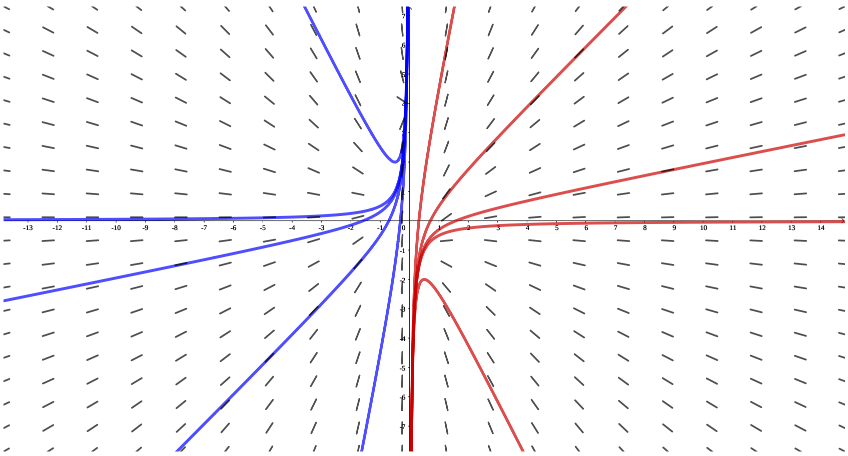
φ étant continue en 0, on doit avoir $\lim\limits_{t\to 0^+} \varphi(t) = \lim\limits_{t\to 0^+} \varphi(t) = \varphi(0)$.

Or $\lim\limits_{t\to 0^+} \varphi(t) = \lim\limits_{t\to 0^+} \lambda_1 t - \dfrac{1}{2t} = -\infty$. Cela contredit alors la continuité de φ en 0.
L'équation (8) n'admet donc pas de solutions sur $\mathbb{R}$.

– Conclusion : *L'ensemble des solutions de (8) sur $\mathbb{R}$ est donc l'ensemble vide :*

$$\mathcal{S} = \emptyset.$$

Sur le champ de vecteurs ci-dessous, on a tracé des courbes intégrales de l'équation $t^2y' - ty = 1$ définies sur $\mathbb{R}_-^*$ en bleu et sur $\mathbb{R}_+^*$ en rouge. Il n'y a pas de raccordement continu possible en 0, et donc pas de courbes intégrales sur $\mathbb{R}$.



2.1.3 Équations différentielles linéaires scalaires du deuxième ordre

On s'intéresse aux équations différentielles linéaires scalaire du deuxième ordre de la forme

$$a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = d(t), \tag{E_2}$$

où a, b, c et d sont des applications de I dans $\mathbb{K}$ continues.

L'étude complète de ces équations sera faite dans le chapitre 3, puisque, rappelons-le, ces équations se ramènent à des équations différentielles vectorielles du premier ordre. Néanmoins, lorsque les coefficients de l'équation sont constants, les résultats peuvent s'obtenir directement, sans utiliser l'outil matriciel.

2.1.3.a. Cas à coefficients constants

On s'intéresse aux équations différentielles linéaires scalaires du deuxième ordre à coefficients constants, de la forme

$$ay'' + by' + cy = d(t), \tag{E_{2c}}$$

où a, b et c sont des éléments de $\mathbb{K}$, avec a non nul et d est une application continue de I dans $\mathbb{K}$, d'équation homogène associée

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{E_{2ch}}$$

On appelle **polynôme caractéristique** associé à (E_{2c}) le polynôme du second degré

$$aX^2 + bX + c.$$

i) Ensemble des solutions de l'équation homogène

Proposition 22
On se place avec $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Notons Δ le discriminant du polynôme caractéristique $P = aX^2 + bX + c$.

- *Si $\Delta \neq 0$ alors, en notant r_1 et r_2 les deux racines complexes distinctes de P, l'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions de (E_{2ch}) est*
$$\mathcal{S}_h = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}\ ;\ t \longmapsto \lambda_1 \mathrm{e}^{r_1 t} + \lambda_2 \mathrm{e}^{r_2 t} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2\right\}.$$
- *Si $\Delta = 0$ alors, en notant r la racine double complexe de P, l'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions de (E_{2ch}) est*
$$\mathcal{S}_h = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}\ ;\ t \longmapsto (\lambda_1 + \lambda_2 t)\mathrm{e}^{rt} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2\right\}.$$

L'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions complexes de l'équation homogène (E_{2ch}) est donc un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 2.

Preuve — Notons r_1 et r_2 les deux racines complexes du polynôme caractéristique $aX^2 + bX + c$, éventuellement confondues.

Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une application deux fois dérivable. Posons, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\psi(t) = \varphi(t)\mathrm{e}^{-r_1 t}$, de sorte que $\varphi(t) = \psi(t)\mathrm{e}^{r_1 t}$. Alors ψ est deux fois dérivable.

φ est solution de (E_{2ch}) si et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\mathrm{e}^{r_1 t}\left(a\psi''(t) + (2ar_1 + b)\psi'(t) + (ar_1^2 + br_1 + c)\psi(t)\right) = 0,$$
soit encore, si et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\psi''(t) + \left(2r_1 + \frac{b}{a}\right)\psi'(t) = 0.$$

Or $2r_1 + \dfrac{b}{a} = r_1 + \left(r_1 + \dfrac{b}{a}\right) = r_1 - r_2$ car $r_1 + r_2 = -\dfrac{b}{a}$.

Donc φ est solution de (E_{2ch}) si et seulement si ψ' est solution de l'équation différentielle linéaire du premier ordre
$$y' = -\left(r_1 - r_2\right) y. \tag{9}$$

• 1^{er} cas : $\Delta \neq 0$. Alors $r_1 \neq r_2$ et l'ensemble des solutions de l'équation (9) est
$$\mathcal{S}_1 = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}\ ;\ t \longmapsto \lambda \mathrm{e}^{-(r_1 - r_2)t} \mid \lambda \in \mathbb{C}\right\}.$$

Donc φ est solution de (E_{2ch}) si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\psi'(t) = \lambda \mathrm{e}^{-(r_1 - r_2)t},$$
soit encore si et seulement s'il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\psi(t) = \lambda_1 \mathrm{e}^{-(r_1 - r_2)t} + \lambda_2,$$
soit
$$\varphi(t) = \lambda_1 \mathrm{e}^{r_2 t} + \lambda_2 \mathrm{e}^{r_1 t}.$$

• 2^{nd} cas : $\Delta = 0$. Alors $r_1 = r_2$ et l'ensemble des solutions de l'équation (9) est l'ensemble des fonctions constantes.

Donc φ est solution de (E_{2ch}) si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\psi'(t) = \lambda,$$
soit encore, si et seulement s'il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\psi(t) = \lambda_1 t + \lambda_2,$$
soit
$$\varphi(t) = \left(\lambda_1 t + \lambda_2\right)\mathrm{e}^{r_1 t}.$$

D'où le résultat. □

Exemples 23

- *Résolvons sur $\mathbb{C}$ l'équation*
$$y'' - (2 + 2\mathrm{i})y' + 2\mathrm{i}y = 0.$$
Le polynôme caractéristique associé est $P = X^2 - (2 + 2\mathrm{i})X + 2\mathrm{i}$, de discriminant $\Delta = (2 + 2\mathrm{i})^2 - 4 \times 1 \times 2\mathrm{i} = 0$. P admet une racine double $r = 1 + \mathrm{i}$.
L'ensemble des solutions complexes de l'équation est donc
$$\mathcal{S}_h = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}\ ;\ t \mapsto (\lambda_1 + \lambda_2 t)\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2\right\}.$$

- *Résolvons sur $\mathbb{C}$ l'équation*
$$y'' - 2y' + 2y = 0.$$
Le polynôme caractéristique associé est $P = X^2 - 2X + 2$, de discriminant $\Delta = 2^2 - 4\times 1\times 2 = -4 \neq 0$. P admet donc deux racines complexes conjuguées, $r_1 = 1 + \mathrm{i}$ et $r_2 = 1 - \mathrm{i}$.
L'ensemble des solutions complexes de l'équation est donc
$$\mathcal{S}_h = \left\{ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}\ ;\ t \mapsto \lambda_1 \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t} + \lambda_2 \mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})t} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2 \right\}.$$

Proposition 24
On se place avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Notons Δ le discriminant du polynôme caractéristique $P = aX^2 + bX + c$.

- *Si $\Delta > 0$ alors, en notant r_1 et r_2 les deux racines réelles distinctes de P, l'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions de (E_{2ch}) est*
$$\mathcal{S}_h = \left\{ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \lambda_1 \mathrm{e}^{r_1 t} + \lambda_2 \mathrm{e}^{r_2 t} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$
- *Si $\Delta = 0$ alors, en notant r la racine double réelle de P, l'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions de (E_{2ch}) est*
$$\mathcal{S}_h = \left\{ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto (\lambda_1 + \lambda_2 t)\mathrm{e}^{rt} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$
- *Si $\Delta < 0$ alors, en notant $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ les deux racines complexes conjuguées distinctes de P avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, l'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions de (E_{2ch}) est*
$$\mathcal{S}_h = \left\{ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \mathrm{e}^{\alpha t}\big(\lambda_1 \cos(\beta t) + \lambda_2 \sin(\beta t)\big) \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

L'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions réelles de l'équation homogène (E_{2ch}) est donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2.

Preuve — • Si $\Delta > 0$ ou $\Delta = 0$, alors le résultat s'obtient de la même façon que dans le cas complexe.

• Traitons le cas où $\Delta < 0$. Le polynôme caractéristique $P = aX^2 + bX + c$ possède alors deux racines complexes conjuguées $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.

Soit φ une solution réelle de (E_{2ch}). En particulier, φ est une solution complexe de (E_{2ch}). Il existe donc $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) = \lambda_1 \mathrm{e}^{(\alpha + i\beta)t} + \lambda_2 \mathrm{e}^{(\alpha - i\beta)t}$.

Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\varphi(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}\left(\lambda_1 \mathrm{e}^{i\beta t} + \lambda_2 \mathrm{e}^{-i\beta t}\right) = \mathrm{e}^{\alpha t}\left((\lambda_1 + \lambda_2)\cos(\beta t) + i(\lambda_1 - \lambda_2)\sin(\beta t)\right).$$

Or φ étant à valeurs réelles, $\varphi(0) \in \mathbb{R}$ et $\varphi\left(\dfrac{\pi}{2\beta}\right) \in \mathbb{R}$.

Donc $\lambda_1 + \lambda_2 \in \mathbb{R}$ et $\lambda_1 - \lambda_2 \in i\mathbb{R}$. On en déduit que $\mathrm{Im}(\lambda_1) + \mathrm{Im}(\lambda_2) = 0$ et $\mathrm{Re}(\lambda_1) - \mathrm{Re}(\lambda_2) = 0$. Donc $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$.

Posons $\gamma = \lambda_1 + \lambda_2$ et $\delta = i(\lambda_1 - \lambda_2)$. Alors $\gamma = 2\mathrm{Re}(\lambda_1) \in \mathbb{R}$ et $\delta = -2\mathrm{Im}(\lambda_1) \in \mathbb{R}$.

On a donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}(\gamma\cos(\beta t) + \delta\sin(\beta t))$ avec $(\gamma, \delta) \in \mathbb{R}^2$.

Réciproquement, une telle fonction est bien une solution réelle de (E_{2ch}).

□

Remarque 25 — *Dans le cas où $\Delta < 0$, on peut également donner l'ensemble des solutions sous les formes suivantes :*
$$\mathcal{S}_h = \left\{ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto A\mathrm{e}^{\alpha t}\cos(\beta t - \varphi) \mid (A, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \right\},$$
ou
$$\mathcal{S}_h = \left\{ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto A\mathrm{e}^{\alpha t}\sin(\beta t - \varphi) \mid (A, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Exemples 26
- *Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle linéaire homogène $y'' - 5y' + 6y = 0$.*
Le polynôme caractéristique associé est $P = X^2 - 5X + 6$, de discriminant $\Delta = 5^2 - 4\times 1\times 6 = 1 > 0$. P admet donc deux racines réelles, $r_1 = 2$ et $r_2 = 3$.
L'ensemble des solutions réelles de l'équation est donc
$$\mathcal{S}_h = \left\{ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \lambda_1 \mathrm{e}^{2t} + \lambda_2 \mathrm{e}^{3t} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

- *Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation*
$$y'' - 2y' + y = 0.$$
Le polynôme caractéristique associé est $P = X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$, de racine double réelle $r = 1$. L'ensemble des solutions réelles de l'équation est donc
$$\mathcal{S}_h = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto (\lambda_1 + \lambda_2 t)\mathrm{e}^t \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

- *Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation*
$$y'' + 2y' + 2y = 0.$$
Le polynôme caractéristique associé est $P = X^2 + 2X + 2$, de discriminant $\Delta = 4 - 8 = -4 < 0$. P admet donc deux racines complexes conjuguées $r_1 = -1 + i$ et $r_2 = -1 - i$.
L'ensemble des solutions réelles de l'équation est donc
$$\mathcal{S}_h = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \mathrm{e}^{-t}\left(\lambda_1 \cos(t) + \lambda_2 \sin(t)\right) \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

ii) Ensemble des solutions de l'équation avec second membre

PROPOSITION 27
Soient a, b et c des éléments de $\mathbb{K}$ et $d \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$.

1. *L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation $ay'' + by' + cy = d(t)$ (E_{2c}) est un espace affine de dimension 2 dirigé par l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée :*
$$\mathcal{S} = \varphi_p + \mathcal{S}_h,$$
où φ_p est une solution particulière de (E_{2c}).
2. *Soient $t_0 \in I$ et $(y_0, y_1) \in \mathbb{K}^2$. Le problème de Cauchy*
$$\begin{cases} ay'' + by' + cy = d(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \end{cases}$$
admet une et une seule solution sur I.

Preuve —

1. On admet l'existence d'une solution particulière φ_p de (E_{2c}). Nous avons vu que l'ensemble des solutions de l'équation homogène est un espace vectoriel de dimension 2. D'après la proposition 2, on a donc le résultat.
2. L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation est
$$\mathcal{S} = \left\{I \longrightarrow \mathbb{K}\ ;\ t \longmapsto \varphi_p(t) + \lambda_1\varphi_1(t) + \lambda_2\varphi_2(t) \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2\right\},$$
où (φ_1, φ_2) forme une base de solutions de l'équation homogène.
Les conditions initiales donnent alors
$$\begin{cases} \lambda_1\varphi_1(t_0) + \lambda_2\varphi_2(t_0) = y_0 - \varphi_p(t_0) \\ \lambda_1\varphi_1'(t_0) + \lambda_2\varphi_2'(t_0) = y_1 - \varphi_p'(t_0) \end{cases}.$$
Le déterminant de ce système d'inconnues λ_1, λ_2 vaut
$$D = \begin{vmatrix} \varphi_1(t_0) & \varphi_2(t_0) \\ \varphi_1'(t_0) & \varphi_2'(t_0) \end{vmatrix} = \varphi_1(t_0)\varphi_2'(t_0) - \varphi_2(t_0)\varphi_1'(t_0).$$
En considérant les bases de solutions obtenues dans la partie précédente, on obtient alors les résultats suivants.
• Si le polynôme caractéristique de l'équation admet deux racines distinctes r_1 et r_2 éléments de $\mathbb{K}$ alors le déterminant du système vaut
$$D = (r_2 - r_1)\mathrm{e}^{(r_1 + r_2)t_0} \neq 0.$$
• Si le polynôme caractéristique de l'équation admet une racine double r alors le déterminant du système vaut
$$D = \mathrm{e}^{2rt_0} \neq 0.$$
• Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et si le polynôme caractéristique de l'équation admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ alors le déterminant du système vaut
$$D = \beta\mathrm{e}^{\alpha t_0} \neq 0.$$
Dans tous les cas, le déterminant du système est non nul. Le système admet donc une unique solution $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$.

□

Exemple 28 — *Déterminons la solution définie sur $\mathbb{R}$ du problème de Cauchy*

$$\begin{cases} y'' + 4y = 2, \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

- *Résolution de l'équation $y'' + 4y = 2$.*
  - Identification : *Il s'agit d'une équation différentielle linéaire scalaire du deuxième ordre à coefficients constants et second membre continu.*
  - Solutions de l'équation homogène : *Le polynôme caractéristique associé à l'équation $y'' + 4y = 0$ est $P = X^2 + 4 = (X - 2i)(X + 2i)$, de racines complexes conjuguées $r_1 = 2i$ et $r_2 = -2i$.*
    L'ensemble des solutions réelles de l'équation homogène $y'' + 4y = 0$ est donc
    $$\mathcal{S}_h = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; t \longmapsto \lambda_1 \cos(2t) + \lambda_2 \sin(2t) \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$
  - Solution particulière : *La fonction $\varphi_p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; t \longmapsto \dfrac{1}{2}$ est une solution particulière évidente de $y'' + 4y = 2$.*
  - Conclusion : *L'ensemble des solutions de l'équation $y'' + 4y = 2$ est donc*
    $$\mathcal{S} = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; t \longmapsto \frac{1}{2} + \lambda_1 \cos(2t) + \lambda_2 \sin(2t) \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$
- *Une application $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est donc solution du problème de Cauchy si et seulement s'il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) = \dfrac{1}{2} + \lambda_1 \cos(2t) + \lambda_2 \sin(2t)$ avec les conditions initiales $\varphi(0) = 1$ et $\varphi'(0) = 0$.*

On obtient alors $\lambda_1 = \dfrac{1}{2}$ et $\lambda_2 = 0$.

Donc la solution du problème de Cauchy définie sur $\mathbb{R}$ est l'application

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; t \longmapsto \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2t).$$

iii) Détermination pratique d'une solution particulière

On rappelle que, parfois, une solution particulière apparaît de façon évidente. On peut également utiliser le principe de superposition des solutions pour en trouver une. Comme dans le cas des équations du premier ordre, il existe une méthode de variation des constantes pour trouver une solution particulière. Nous l'étudierons dans le chapitre 3, mais celle-ci est souvent longue et calculatoire. Voyons ici comment trouver, simplement, une solution particulière lorsque le second membre est de la forme polynôme-exponentielle.

On se place donc dans le cas particulier où l'équation s'écrit sous la forme

$$ay'' + by' + cy = P(t)\mathrm{e}^{\alpha t}, \qquad (E_{2c,pol-exp})$$

où a, b, c et α sont des éléments de $\mathbb{K}$ avec a non nul et P est un polynôme.

Le résultat suivant nous indique sous quelle forme chercher une solution particulière.

Proposition 29
L'équation différentielle ($E_{2c,pol-exp}$) admet une solution particulière de la forme

$$I \longrightarrow \mathbb{K} \; ; \; t \longmapsto t^m Q(t)\mathrm{e}^{\alpha t},$$

où Q est une application polynomiale de même degré que P et m est l'ordre de multiplicité de α comme racine du polynôme caractéristique ($m = 0$ si α n'est pas racine de $aX^2 + bX + c$, $m = 1$ si α est racine simple et $m = 2$ si α est racine double).

Remarque 30 — *Soient a, b, c, γ et ω des nombres réels et P une application polynomiale à coefficients réels. Comme dans le cas des équations du premier ordre, si le second membre est de la forme $t \longmapsto P(t)\mathrm{e}^{\gamma t}\cos(\omega t)$ (resp. $\longmapsto P(t)\mathrm{e}^{\gamma t}\sin(\omega t)$), on peut chercher une solution particulière complexe de l'équation $ay'' + by' + cy = P(t)\mathrm{e}^{(\gamma+i\omega)t}$ puis en prendre sa partie réelle (resp. imaginaire).*

Exemple 31 — *Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle*

$$y'' + 2y' + 5y = 5t. \tag{10}$$

- Identification *Il s'agit d'une équation différentielle linéaire scalaire du deuxième ordre à coefficients constants et second membre continu.*
- Solutions de l'équation homogène : *Le polynôme caractéristique associé est $X^2 + 2X + 5$, de discriminant $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 5 = -16 < 0$. Ce polynôme admet donc deux racines complexes conjuguées $r_1 = -1 - 2\mathrm{i}$ et $r_2 = -1 + 2\mathrm{i}$.*
  L'ensemble des solutions de l'équation homogène associée est donc
  $$\mathcal{S}_0 = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \mapsto \mathrm{e}^{-t}(\lambda_1\cos(2t) + \lambda_2\sin(2t)) \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$
- Solution particulière : *Les coefficients de l'équation (10) sont constants et le second membre est de la forme polynôme-exponentielle ($5t = 5t\mathrm{e}^{0t}$). On peut donc chercher une solution particulière de (10) sous la forme*
  $$\varphi_p(t) = at + b, \ \text{ avec } (a, b) \in \mathbb{R}^2$$
  (ici $P(t) = 5t$ est de degré 1 et $m = 0$ car $\alpha = 0$ n'est pas racine du polynôme caractéristique).
  Alors φ_p est solution de (10) si et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi_p''(t) + 2\varphi_p'(t) + 5\varphi_p(t) = 5t$. Après calculs, on trouve $a = 1$ et $b = -\dfrac{2}{5}$ et donc une solution particulière est $\varphi_p(t) = t - \dfrac{2}{5}$.
- Conclusion : *L'ensemble des solutions de l'équation (10) est donc*
  $$\mathcal{S} = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \mapsto t - \frac{2}{5} + \mathrm{e}^{-t}(\lambda_1\cos(2t) + \lambda_2\sin(2t)) \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Exemple 32 — *Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle*

$$y'' + y = t\sin t. \tag{11}$$

- Identification : *Il s'agit d'une équation différentielle linéaire scalaire du deuxième ordre à coefficients constants et second membre continu.*
- Solutions de l'équation homogène : *Le polynôme caractéristique associé est $X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$. Ce polynôme admet donc deux racines complexes conjuguées $r_1 = \mathrm{i}$ et $r_2 = -\mathrm{i}$.*
  L'ensemble des solutions de l'équation homogène associée est donc
  $$\mathcal{S}_h = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \mapsto \lambda_1\cos(t) + \lambda_2\sin(t) \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$
- Solution particulière :
  - *Commençons par chercher une solution particulière complexe de $y'' + y = t\mathrm{e}^{it}$ sous la forme $\varphi_{p,\mathbb{C}}(t) = t(at + b)\mathrm{e}^{it}$, où $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ (ici $P(t) = t$ est de degré 1 et $m = 1$ car i est racine de $X^2 + 1$).*
    Après calculs, $\varphi_{p,\mathbb{C}}$ est solution de (11) si et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
    $$e^{it}(4iat + 2(ib + a)) = te^{it},$$
    soit encore, si et seulement si $a = \dfrac{1}{4i} = -\dfrac{i}{4}$ et $b = \dfrac{1}{4}$.
    Une solution particulière de l'équation $y'' + y = t\mathrm{e}^{it}$ est donc $\varphi_{p,\mathbb{C}}(t) = \dfrac{1}{4}\left(-it^2 + t\right)e^{it}$.
  - *Une solution particulière de $y'' + y = t\sin(t)$ est donc $\varphi_{p,\mathbb{R}} = \mathrm{Im}(\varphi_{p,\mathbb{C}})$, c'est-à-dire*
    $$\varphi_{p,\mathbb{R}}(t) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \frac{1}{4}\left(-t^2\cos t + t\sin t\right)$$
- Conclusion : *L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de (11) est donc*
  $$\mathcal{S} = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \frac{1}{4}\left(-t^2\cos t + t\sin t\right) + \lambda_1\cos(t) + \lambda_2\sin(t) \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

2.1.3.b. Résultats généraux

On revient à l'étude de l'équation différentielle linéaire scalaire du deuxième ordre sous forme résolue

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t), \tag{$E_{2,r}$}$$

où a, b et c sont des applications de I dans $\mathbb{K}$ continues, d'équation homogène associée

$$y'' + a(t)y' + b(t) = 0 \tag{$E_{2,rh}$}$$

On rappelle le théorème (admis) de Cauchy-Lipschitz linéaire 29 dans le cas de l'ordre 2.

PROPOSITION 33
Soient $t_0 \in I$ et $(y_0, y_1) \in \mathbb{K}^2$. Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \end{cases}$$

admet une et une seule solution sur I.

On en déduit le théorème suivant.

PROPOSITION 34
1. *L'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions définies sur I de l'équation homogène ($E_{2,rh}$) est un espace vectoriel de dimension 2.*
2. *L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions définies sur I de l'équation ($E_{2,r}$) est un espace affine de dimension 2 dirigé par l'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions de l'équation homogène associée :*

$$\mathcal{S} = \varphi_p + \mathcal{S}_h,$$

où φ_p est une solution particulière de ($E_{2,r}$).

Preuve —
1. $\mathcal{S}_h$ est un espace vectoriel d'après la proposition 1.
   Soit $t_0 \in I$. Considérons l'application linéaire $\Phi_{t_0} : \mathcal{S}_h \longrightarrow \mathbb{K}^2 \; ; \; \varphi \longmapsto \begin{pmatrix} \varphi(t_0) \\ \varphi'(t_0) \end{pmatrix}$.
   Soit $(y_0, y_1) \in \mathbb{K}^2$. Les applications a et b étant continues, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, il existe une unique solution φ au problème de Cauchy
   $$\begin{cases} y'' + a(t)y' + b(t)y = 0 \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \end{cases},$$
   c'est-à-dire telle que $\varphi \in \mathcal{S}_h$ et $\Phi_{t_0}(\varphi) = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}$. Ainsi, Φ_{t_0} est bijective.
   Donc $\mathcal{S}_h$, isomorphe à $\mathbb{K}^2$, est de dimension 2.
2. Le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire donne l'existence d'une solution particulière φ_p de ($E_{2,r}$). D'après ce qui précède, $\mathcal{S}_h$ est de dimension 2 et de la proposition 2, on en déduit le résultat.

□

Puisque l'espace vectoriel $\mathcal{S}_h$ est de dimension 2, si l'on dispose de deux solutions φ_1 et φ_2 de l'équation homogène ($E_{2,rh}$), il reste donc à savoir si elles sont indépendantes. Si c'est le cas, on sait alors que

$$\mathcal{S}_h = \mathrm{vect}(\varphi_1, \varphi_2) = \left\{ I \longrightarrow \mathbb{K} \; ; \; t \longmapsto \lambda_1\varphi_1(t) + \lambda_2\varphi_2(t) \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2 \right\}.$$

L'outil suivant permet de déterminer si deux solutions forment une base de l'ensemble des solutions de l'équation homogène, que l'on appelle également un système fondamental de solutions.

DÉFINITION 35
*Soient φ_1 et φ_2 deux solutions de ($E_{2,rh}$). On appelle **wronskien** de (φ_1, φ_2) l'application*

$$w : I \longrightarrow \mathbb{K} \; ; \; t \longmapsto \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) \end{vmatrix}.$$

Proposition 36
Soient φ_1 et φ_2 deux solutions de ($E_{2,rh}$). Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. *(φ_1, φ_2) forme une base de l'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions de l'équation homogène,*
2. *pour tout $t \in I$, $w(t) \neq 0$,*
3. *il existe $t_0 \in I$ tel que $w(t_0) \neq 0$.*

Preuve — Soit $t_0 \in I$. L'application $\Phi_{t_0} : \mathcal{S}_h \longrightarrow \mathbb{K}^2$; $\varphi \longmapsto \begin{pmatrix} \varphi(t_0) \\ \varphi'(t_0) \end{pmatrix}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Ainsi, (φ_1, φ_2) est une base de $\mathcal{S}_h$ si et seulement si $(\Phi_{t_0}(\varphi_1), \Phi_{t_0}(\varphi_2)) = \left(\begin{pmatrix} \varphi_1(t_0) \\ \varphi_1'(t_0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varphi_2(t_0) \\ \varphi_2'(t_0) \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathbb{K}^2$, soit si et seulement si $w(t_0) \neq 0$.

□

Récapitulons. Pour connaître l'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions de l'équation homogène, il faut connaître deux solutions indépendantes φ_1 et φ_2 de l'équation homogène. D'après la partie précédente, nous savons les déterminer lorsque les coefficients de l'équation sont constants. Dans les autres cas, on ne peut plus introduire de polynôme caractéristique et il n'y a aucune méthode systématique. Toutefois, si l'on dispose d'une solution de l'équation homogène ($E_{2,rh}$) qui ne s'annule pas, la technique d'abaissement de l'ordre permet d'obtenir l'ensemble des solutions de l'équation ($E_{2,r}$). Nous présentons donc dans ce qui suit cette technique, puis quelques méthodes permettant parfois, mais pas toujours, d'obtenir au moins une solution de l'équation homogène. La méthode de variation des constantes permettant de déterminer une solution particulière de l'équation ($E_{2,r}$), connaissant deux solutions indépendantes de l'équation homogène, sera présentée dans le chapitre 3.

2.1.3.c. Technique d'abaissement de l'ordre

Expliquons comment déterminer l'ensemble des solutions de l'équation ($E_{2,r}$) connaissant une solution de l'équation homogène ($E_{2,rh}$) qui ne s'annule pas sur I. C'est une technique qui permet de se ramener à une équation différentielle scalaire linéaire du premier ordre et donc de trouver toutes les autres solutions.

Supposons donc disposer d'une solution φ_1 de l'équation homogène ($E_{2,rh}$) qui ne s'annule pas sur I.

Soit $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une application deux fois dérivable. Posons, pour tout $t \in I$, $\psi(t) = \dfrac{\varphi(t)}{\varphi_1(t)}$ de sorte que $\varphi(t) = \psi(t)\varphi_1(t)$. ψ est bien définie car φ_1 ne s'annule pas sur I et ψ est deux fois dérivable comme quotient de fonctions deux fois dérivables.

On a donc, pour tout $t \in I$,

$$\varphi'(t) = \psi'(t)\varphi_1(t) + \psi(t)\varphi_1'(t)$$

et

$$\varphi''(t) = \psi''(t)\varphi_1(t) + 2\psi'(t)\varphi_1'(t) + \psi(t)\varphi_1''(t).$$

Donc φ est solution de ($E_{2,r}$) si et seulement si, pour tout $t \in I$,

$$\varphi_1(t)\psi''(t) + (2\varphi_1'(t) + a(t)\varphi_1(t))\,\psi'(t) + (\varphi_1''(t) + a(t)\varphi_1'(t) + b(t)\varphi_1(t))\,\psi(t) = c(t).$$

Comme φ_1 est solution de ($E_{2,rh}$), on en déduit que φ est solution de ($E_{2,r}$) si et seulement si, pour tout $t \in I$,

$$\varphi_1(t)\psi''(t) + (2\varphi_1'(t) + a(t)\varphi_1(t))\,\psi'(t) = c(t).$$

Ainsi, φ est solution sur I de ($E_{2,r}$) si et seulement si ψ' est solution sur I de l'équation différentielle scalaire linéaire du premier ordre

$$\varphi_1(t)y' + (2\varphi_1'(t) + a(t)\varphi_1(t))\,y = c(t),$$

équation équivalente, puisque φ_1 ne s'annule pas sur I par hypothèse, à l'équation sous forme résolue

$$y' + \frac{2\varphi_1'(t) + a(t)\varphi_1(t)}{\varphi_1(t)}y = \frac{c(t)}{\varphi_1(t)}. \tag{12}$$

L'ensemble des solutions de (12) est

$$\mathcal{S}_{12} = \left\{ I \longrightarrow \mathbb{K} \; ; \; t \longmapsto \lambda \mathrm{e}^{-A(t)} + \varphi_p(t) \mid \lambda \in \mathbb{K} \right\},$$

où A désigne une primitive de $t \longmapsto \dfrac{2\varphi_1'(t) + a(t)\varphi_1(t)}{\varphi_1(t)}$ et φ_p une solution particulière de (12).

Notons P_1 une primitive de $t \longmapsto \mathrm{e}^{-A(t)}$ et P_2 une primitive de φ_p.

Alors φ est solution de ($E_{2,r}$) si et seulement si $\psi' \in \mathcal{S}_{12}$, soit encore si et seulement s'il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$ tel que pour tout $t \in I$,

$$\psi(t) = \lambda_1 P_1(t) + P_2(t) + \lambda_2.$$

L'ensemble des solutions est donc

$$\mathcal{S} = \left\{ I \longrightarrow \mathbb{K} \; ; \; t \longmapsto \underbrace{\lambda_2\varphi_1(t) + \lambda_1 P_1(t)\varphi_1(t)}_{\in \mathcal{S}_h} + \underbrace{P_2(t)\varphi_1(t)}_{\text{solution particulière}} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2 \right\}.$$

Pour appliquer cette méthode, on doit connaître une solution de l'équation homogène. Disposer d'une solution de l'équation avec second membre ne permet pas d'obtenir l'ensemble des solutions de l'équation avec second membre.

Exemple 37 — *Résolvons sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle*

$$t^2 y'' - 2y = t^4. \tag{13}$$

- Identification : *Il s'agit d'une équation différentielle linéaire scalaire du deuxième ordre à coefficients et second membre continus sur $\mathbb{R}_+^*$, le coefficient de y'' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$.*
  On va chercher une solution particulière φ_1 de l'équation homogène puis appliquer la technique d'abaissement de l'ordre.
- Solution particulière de l'équation homogène : *Les coefficients de l'équation étant polynômiaux, on peut commencer par chercher une solution sous forme d'un monôme. Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $\varphi_1(t) = t^n$. Alors φ_1 est solution de l'équation homogène si et seulement $n(n-1)t^2 - 2t^2 = 0$ soit encore, si et seulement si $n(n-1) - 2 = n^2 - n - 1 = 0$. En prenant $n = 2$ [2], on obtient donc une solution particulière $\varphi_1(t) = t^2$ de l'équation homogène associée à (13).*
- Ensemble des solutions de l'équation avec second membre (13) : *Appliquons la méthode d'abaissement de l'ordre.*
  Soit $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une application deux fois dérivable. Posons, pour tout $t \in I$, $\psi(t) = \dfrac{\varphi(t)}{\varphi_1(t)}$, de sorte que $\varphi(t) = \psi(t)\varphi_1(t) = \psi(t)t^2$. ψ est bien définie car φ_1 ne s'annule pas sur I et est deux fois dérivable.
  On a donc, pour tout $t \in I$,

  $$\varphi'(t) = \psi'(t)t^2 + 2t\psi(t)$$

  et

  $$\varphi''(t) = \psi''(t)t^2 + 4\psi'(t)t + 2\psi(t).$$

  Donc φ est solution de (12) si et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,

  $$\psi''(t)t^4 + 4\psi'(t)t^3 = t^4,$$

  soit encore, si et seulement si ψ' est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation

  $$ty' + 4y = t. \tag{14}$$

  Déterminons l'ensemble des solutions de l'équation (14) linéaire scalaire du premier ordre à coefficients et second membre continus sur $\mathbb{R}_+^*$, le coefficient de y' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Remarquons que $n = -1$ fournit également une autre solution de l'équation homogène indépendante de la première.

– Solutions de l'équation homogène associée à (14) : *Une primitive sur* $\mathbb{R}_+^*$ *de* $t \longmapsto -\frac{4}{t}$ *est* $t \longmapsto -4\ln(t) = \ln\left(\frac{1}{t^4}\right)$.
L'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à (14) est donc

$$\mathcal{S}_{h,14} = \left\{\mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \lambda\frac{1}{t^4} \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

– Solution particulière de (14) : *Cherchons une solution particulière sous la forme* $f_p(t) = \frac{f(t)}{t^4}$ *où* $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ *est une fonction deux fois dérivable.*
Alors f_p *est solution de (14) si et seulement si, pour tout* $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$t\frac{f'(t)}{t^4} = t,$$

soit encore, si et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(t) = t^4$.
Par exemple, choisissons pour f *la fonction* $f : t \longmapsto \frac{t^5}{5}$.
La fonction $f_p : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \frac{t}{5}$ *est alors une solution particulière de (14).*

– Conclusion : *L'ensemble des solutions de (14) est donc*

$$\mathcal{S}_{14} = \left\{\mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \lambda\frac{1}{t^4} + \frac{t}{5} \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

On déduit de cette étude que φ *est solution de (13) si et seulement si* $\psi' \in \mathcal{S}_{14}$, *soit encore, après primitivation, si et seulement s'il existe* $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ *tel que, pour tout* $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\psi(t) = \lambda_1\frac{1}{t^3} + \frac{t^2}{10} + \lambda_2,$$

soit

$$\varphi(t) = \lambda_1\frac{1}{t} + \frac{t^4}{10} + \lambda_2 t^2.$$

– Conclusion : *L'ensemble des solutions de (13) est donc*

$$\mathcal{S}_{13} = \left\{\mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \lambda_1\frac{1}{t} + \lambda_2 t^2 + \frac{t^4}{10} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

On retrouve la base de solutions de l'équation homogène obtenue avec $n = 2$ *et* $n = -1$.

Remarques 38

- *Cette technique se généralise à l'ordre* n *et permet d'obtenir une équation d'ordre* $n-1$ *sur* ψ'.
- *Lorsque l'on dispose d'une base de solutions de l'équation homogène, on privilégie plutôt la méthode de variation des constantes (vue ultérieurement) pour trouver une solution particulière et donc l'ensemble des solutions de l'équation avec second membre, plutôt que d'appliquer la technique d'abaissement de l'ordre à une des deux solutions. En effet, cette dernière technique demande de calculer deux primitives successives et est donc davantage source d'erreurs que la première, qui demande de calculer deux primitives indépendantes.*

2.1.3.d. Détermination pratique de solutions de l'équation homogène

Pour résoudre l'équation ($E_{2,r}$), il est donc nécessaire de connaître au moins une solution de l'équation homogène ($E_{2,rh}$), en vue d'appliquer soit la méthode de variation des constantes si l'on a deux solutions indépendantes, soit la technique d'abaissement de l'ordre si l'on en a qu'une. Comme dit précédemment, contrairement au cas des équations à coefficients constants, il n'y a pas de méthode systématique pour trouver des solutions de l'équation homogène et c'est ce qui rend difficile la résolution de ces équations à coefficients non constants. Nous présentons quelques méthodes qui peuvent être tentées pour espérer obtenir une solution.

i) Recherche de solutions polynomiales

Si les coefficients de l'équation homogène sont polynômiaux, on peut essayer de trouver une solution sous la forme d'un monôme ou d'un polynôme. On peut commencer par essayer de déterminer le degré du polynôme par un argument sur le coefficient dominant, puis remplacer dans l'équation différentielle pour trouver les valeurs des coefficients qui conviendraient.

Exemple 39 — *Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle*

$$(t^2+2t+2)y''-2(t+1)y'+2y=0. \tag{15}$$

- Identification : *Il s'agit d'une équation différentielle linéaire scalaire homogène d'ordre 2 à coefficients continus sur $\mathbb{R}$, le coefficient de y' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.*
- Recherche de solutions particulières : *Les coefficients étant polynomiaux, cherchons une solution particulière sous forme polynomiale (ici la forme monomiale échoue).*
  Soit φ une fonction polynomiale unitaire de degré n. Alors le coefficient dominant de
  $$(t^2+2t+2)\varphi_1''(t)-2(t+1)\varphi_1'(t)+2\varphi_1(t)$$
  est égal à $n(n-1)-2n+2=n^2-3n+2=(n-1)(n-2)$.
  Donc si φ est solution de (15) alors nécessairement $n=1$ ou $n=2$.
  On cherche donc φ sous la forme $\varphi(t)=at^2+bt+c$ où $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.
  Alors φ est solution de (15) si et seulement si, pour tout $t\in\mathbb{R}$,
  $$2a(t^2+2t+2)-2(t+1)(2at+b)+2(at^2+bt+c)=0,$$
  soit encore si et seulement si $c=b-2a$.
  Ainsi, en prenant par exemple $(a,b)=(1,0)$ et $(a,b)=(0,1)$, on obtient deux solutions particulières $\varphi_{1,0}(t)=t^2-2$ et $\varphi_{0,1}(t)=t+1$, indépendantes puisque $\begin{vmatrix}\varphi_{1,0}(0) & \varphi_{0,1}(0)\\ \varphi_{1,0}'(0) & \varphi_{0,1}'(0)\end{vmatrix}=-2\neq 0$.
- Conclusion : *Donc, d'après la proposition 34, l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (15) est*
  $$\mathcal{S}=\left\{\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\ ;\ t\longmapsto\lambda_1(t^2-2)+\lambda_2(t+1)\mid(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$

Remarque 40 — *Dans cet exemple, nous avons trouvé deux solutions indépendantes de l'équation homogène et nous avons donc pu conclure directement. Mais ce n'est pas toujours le cas.*

ii) Changement de fonction inconnue

Résoudre une équation différentielle par changement de fonction inconnue consiste à choisir une fonction φ_1 qui ne s'annule pas sur I puis montrer que toute application φ est solution de l'équation initiale si et seulement si l'application $\psi=\dfrac{\varphi}{\varphi_1}$ est solution d'une nouvelle équation, plus simple à résoudre.

La technique d'abaissement de l'ordre est un cas particulier de changement de fonction inconnue, où l'on choisit pour φ_1 une solution de l'équation homogène.

Exemple 41 — *Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation*

$$(1+t^2)y''+4ty'+(1-t^2)y=0. \tag{16}$$

- Identification : *Il s'agit d'une équation différentielle scalaire linéaire homogène du deuxième ordre à coefficients continus sur $\mathbb{R}$, le coefficient de y' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$.*
- Changement de fonction inconnue : *Cherchons un changement de fonction inconnue qui conduit à une équation à coefficients constants.*
  Soit $\varphi_1:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ une application deux fois dérivable qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Soit $\varphi:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ une application deux fois dérivable.

Posons, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\psi(t) = \dfrac{\varphi(t)}{\varphi_1(t)}$ *de sorte que* $\varphi(t) = \psi(t)\varphi_1(t)$. ψ *est bien définie et est deux fois dérivable comme quotient de deux fonctions deux fois dérivables.*
Alors

$$\varphi'(t) = \psi'(t)\varphi_1(t) + \psi(t)\varphi_1'(t)$$

et

$$\varphi''(t) = \psi''(t)\varphi_1(t) + 2\psi'(t)\varphi_1'(t) + \psi(t)\varphi_1''(t).$$

Donc φ *est solution de (16) si et seulement si, pour tout* $t \in \mathbb{R}$,

$$(1+t^2)\varphi_1(t)\psi''(t)+\left(2(1+t^2)\varphi_1'(t) + 4t\varphi_1(t)\right)\psi'(t)+\left((1+t^2)\varphi_1''(t) + 4t\varphi_1'(t) + (1-t^2)\varphi_1(t)\right)\psi(t) = 0.$$

Choisissons alors pour φ_1 *la fonction* $\varphi_1(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$, *fonction qui ne s'annule pas sur* $\mathbb{R}$.
Alors

$$(1+t^2)\varphi_1(t) = 1,$$
$$2(1+t^2)\varphi_1'(t) + 4t\varphi_1(t) = 0,$$

et

$$(1+t^2)\varphi_1''(t) + 4t\varphi_1'(t) + (1-t^2)\varphi_1(t) = -1.$$

Donc φ *est solution de (16) si et seulement si* ψ *est solution de l'équation différentielle linéaire scalaire homogène du deuxième ordre à coefficients constants*

$$y'' - y = 0.$$

L'ensemble des solutions de l'équation $y'' - y = 0$ *est*

$$\mathcal{S}_h = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \lambda_1 \mathrm{e}^{-t} + \lambda_2 \mathrm{e}^{t} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Ainsi, φ *est solution de (16) si et seulement s'il existe* $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ *tel que, pour tout* $t \in \mathbb{R}$,

$$\psi(t) = \lambda_1 \mathrm{e}^{-t} + \lambda_2 \mathrm{e}^{t},$$

soit

$$\varphi(t) = \lambda_1 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+t^2} + \lambda_2 \frac{\mathrm{e}^{t}}{1+t^2}.$$

– Conclusion : *L'ensemble des solutions de (16) est donc*

$$\mathcal{S}_{16} = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \lambda_1 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+t^2} + \lambda_2 \frac{\mathrm{e}^{t}}{1+t^2} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

iii) Changement de variables

Résoudre une équation différentielle par changement de variables consiste à choisir une fonction χ bijective sur I de classe $\mathcal{C}^2$ et de bijection réciproque de classe $\mathcal{C}^2$ (on parle de $\mathcal{C}^2$-difféomorphisme), puis montrer que toute application φ est solution de l'équation initiale si et seulement si l'application $\psi = \varphi \circ \chi^{-1}$ est solution d'une nouvelle équation, plus simple à résoudre. Cela revient à faire le changement de variables « $x = \chi(t)$ ».

Exemple 42 — *Résolvons sur* $\mathbb{R}_+^*$ *l'équation différentielle*

$$t^2 y'' + 3ty' + y = 0. \tag{17}$$

– Identification : *Il s'agit d'une équation différentielle linéaire scalaire homogène du deuxième ordre à coefficients continus sur* $\mathbb{R}_+^*$, *le coefficient de* y'' *ne s'annule pas sur* $\mathbb{R}_+^*$.

– Changement de variables : *Soit* χ *un* $\mathcal{C}^2$ *difféomorphisme de* $\mathbb{R}_+^*$ *sur* $\chi(\mathbb{R}_+^*)$*. Soit* $\varphi : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ *une application deux fois dérivable. Posons, pour tout* $x \in \chi(\mathbb{R}_+^*)$, $\psi(x) = \varphi\left(\chi^{-1}(x)\right)$ *de sorte que, pour tout* $t \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi(t) = \psi(\chi(t))$. ψ *est bien définie et est deux fois dérivables comme* φ *et* χ^{-1} *le sont. (On fait le changement de variables « $x = \chi(t)$ ».)*
Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,
$$\varphi'(t) = \chi'(t)\psi'(\chi(t))$$
et
$$\varphi''(t) = \chi''(t)\psi'(\chi(t)) + \chi'(t)^2\psi''(\chi(t)).$$
Donc φ *est solution sur* $\mathbb{R}_+^*$ *de (17) si et seulement si, pour tout* $t \in \mathbb{R}_+^*$,
$$t^2\left(\chi'(t)\right)^2\psi''(\chi(t)) + \left(t^2\chi''(t) + 3t\chi'(t)\right)\psi'(\chi(t)) + \psi(\chi(t)) = 0.$$
Choisissons par exemple pour χ *la fonction* $\chi : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$; $t \longrightarrow \ln(t)$*. Alors* χ *définit un* $\mathcal{C}^2$*-difféomorphisme de* $\mathbb{R}_+^*$ *sur* $\chi(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$ *(sa bijection réciproque est l'application* $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$*).*
On a alors, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,
$$t^2\left(\chi'(t)\right)^2 = 1,$$
$$t^2\chi''(t) + 3t\chi'(t) = 2.$$
Donc φ *est solution sur* $\mathbb{R}_+^*$ *de (17) si et seulement si* ψ *est solution sur* $\mathbb{R}$ *de l'équation différentielle scalaire linéaire du deuxième ordre à coefficients constants*
$$y'' + 2y' + y = 0,$$
soit encore, si et seulement s'il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ *tel que, pour tout* $x \in \mathbb{R}$,
$$\psi(x) = (\lambda_1 x + \lambda_2)\mathrm{e}^{-x},$$
soit, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,
$$\varphi(t) = (\lambda_1 \ln(t) + \lambda_2)\frac{1}{t}.$$

– Conclusion : *L'ensemble des solutions de (17) est donc*
$$\mathcal{S} = \left\{\mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; t \longmapsto \lambda_1\frac{\ln(t)}{t} + \lambda_2\frac{1}{t} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Remarque 43 — *Les équations du type* $at^2y'' + bty' + cy = 0$*, et plus généralement*
$$t^n y^{(n)} + a_{n-1}t^{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 t y' + a_0 y = 0,$$
où a_0, …, a_{n-1} *sont des constantes, s'appellent les* ***équations d'Euler****. On peut les résoudre soit par le changement de variables « $x = \ln(|t|)$ », soit en étudiant les solutions sous la forme* $t \longmapsto t^\alpha$ *où* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Par exemple, dans le cas de l'ordre 2, on obtient que $t \longmapsto t^\alpha$ *est solution si et seulement si* α *est racine d'un polynôme de degré 2. Si ce polynôme admet deux racines distinctes, on obtient alors rapidement deux solutions indépendantes de l'équation homogène, qui forment donc une base de solutions. Cela se généralise à l'ordre* n.

Ainsi, dans l'exemple 37, l'équation homogène associée $t^2y'' - 2y = 0$ *est une équation d'Euler et la recherche de solutions sous la forme* $t \longmapsto t^\alpha$ *donne directement deux solutions,* $\varphi_1(t) = t^2$ *et* $\varphi_2(t) = \dfrac{1}{t}$.
Comme $\omega(1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$*, les solutions* φ_1 *et* φ_2 *sont indépendantes et forment donc une base de solutions de l'équation homogène :* $\mathcal{S}_h = \mathrm{vect}(\varphi_1, \varphi_2)$.

Cependant, dans l'exemple précédent, l'application $t \longmapsto t^\alpha$ *est solution de* $t^2y'' + 3ty' + y = 0$ *si et seulement si* $\alpha(\alpha - 1) + 3\alpha + 1 = (\alpha + 1)^2 = 0$*. Donc seul* $\alpha = -1$ *convient. Cela ne permet donc pas d'obtenir directement deux solutions indépendantes. On utilise donc plutôt le changement de variables pour obtenir l'ensemble des solutions. On pourrait aussi utiliser la technique d'abaissement de l'ordre avec la solution* $t \longmapsto \dfrac{1}{t}$.

iv) Recherche de solutions développables en séries entières

On peut également essayer de chercher des solutions développables en séries entières (voir les cours d'Analyse 4 pour les séries entières). Nous y reviendrons ultérieurement.

2.1.3.e. Raccordements des solutions

Terminons par un dernier mot sur les raccordements des solutions lorsque l'équation n'est pas sous forme résolue et que le coefficient de y'' s'annule. La méthode est la même que pour le cas de l'ordre 1, simplement il faut vérifier que l'application obtenue est, cette fois-ci deux fois dérivable puisqu'on est dans le cas de l'ordre 2.

Exemple 44 — *Reprenons l'exemple 37 et résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle*

$$t^2y'' - 2y = t^4. \tag{13}$$

- Identification : *Il s'agit d'une équation différentielle linéaire salaire du deuxième ordre à coefficients et second membre continus, sous forme non résolue dont le coefficient t^2 de y'' s'annule en 0.*
- Résolution de l'équation sur les intervalles de non annulation de t^2 : *Nous avons vu à l'exemple 37 que l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de (13) est*

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}_+^*} = \left\{\mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \frac{\lambda_1}{t} + \lambda_2 t^2 + \frac{t^4}{10} \mid (\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

  Par parité de $t \longmapsto t^2$ et $t \longmapsto t^4$, une application $\varphi : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de (13) si et seulement si l'application $\tilde{\varphi} : \mathbb{R}_-^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $t \in \mathbb{R}_-^*$ par $\tilde{\varphi}(t) = \varphi(-t)$ est solution sur $\mathbb{R}_-^*$ de (13). On en déduit que l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}_-^*$ de (13) est

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}_-^*} = \left\{\mathbb{R}_-^* \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \frac{\lambda_3}{t} + \lambda_4 t^2 + \frac{t^4}{10} \mid (\lambda_3,\lambda_4) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

- Résolution de l'équation sur $\mathbb{R}$:
  - Raccordement au point 0 : *Soit φ une éventuelle solution de (13) sur $\mathbb{R}$. D'après le point précédent, il existe donc $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ tel que*

$$\varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{\lambda_1}{t} + \lambda_2 t^2 + \dfrac{t^4}{10} & \textit{si } t > 0,\\ \dfrac{\lambda_3}{t} + \lambda_4 t^2 + \dfrac{t^4}{10} & \textit{si } t < 0.\end{cases}$$

    φ étant continue en 0, on a $\lim\limits_{t\to 0^+} \varphi(t) = \lim\limits_{t\to 0^-} \varphi(t) = \varphi(0)$.
    Or

$$\varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{\lambda_1}{t} + \lambda_2 t^2 + \dfrac{t^4}{10} & \xrightarrow[t\to 0^+]{} \begin{cases} +\infty \textit{ si } \lambda_1 > 0\\ 0 \textit{ si } \lambda_1 = 0\\ -\infty \textit{ si } \lambda_1 < 0\end{cases}\\ \dfrac{\lambda_3}{t} + \lambda_4 t^2 + \dfrac{t^4}{10} & \xrightarrow[t\to 0^-]{} \begin{cases} -\infty \textit{ si } \lambda_3 > 0\\ 0 \textit{ si } \lambda_3 = 0\\ +\infty \textit{ si } \lambda_3 < 0\end{cases}\end{cases}.$$

    Donc φ est continue en 0 si et seulement si $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$, et dans ce cas, $\varphi(0) = 0$.
    Donc nécessairement, φ est définie par

$$\varphi(t) = \begin{cases} \lambda_2 t^2 + \dfrac{t^4}{10} & \textit{si } t \geq 0,\\ \lambda_4 t^2 + \dfrac{t^4}{10} & \textit{si } t < 0.\end{cases} \tag{18}$$

  - Étude réciproque : *Réciproquement, soient λ_2 et λ_4 des réels et soit $\varphi_{\lambda_2,\lambda_4}$ l'application donnée par (18). Étudions la dérivabilité à l'ordre 1 et 2 de $\varphi_{\lambda_2,\lambda_4}$ et regardons si elle vérifie l'équation (13) sur $\mathbb{R}$. La restriction de $\varphi_{\lambda_2,\lambda_4}$ aux intervalles ouverts $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ est dérivable à l'ordre 2, donc $\varphi_{\lambda_2,\lambda_4}$ est dérivable à l'ordre 2 sur $\mathbb{R}^*$ et vérifie l'équation différentielle (13) en tout point de $\mathbb{R}^*$.*
    On a

$$\varphi'_{\lambda_2,\lambda_4}(t) = \begin{cases} 2\lambda_2 t + \dfrac{4}{10}t^3 & \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0\\ 2\lambda_4 t + \dfrac{4}{10}t^3 & \xrightarrow[t\to 0^-]{} 0\end{cases}.$$

Donc, les deux limites étant égales, $\varphi_{\lambda_2,\lambda_4}$ *est dérivable en* 0*, de dérivée* $\varphi'_{\lambda_2,\lambda_4}(0) = 0$.
On a également

$$\varphi''_{\lambda_2,\lambda_4}(t) = \begin{cases} 2\lambda_2 + \dfrac{6}{5}t^2 & \xrightarrow[t\to 0^+]{} 2\lambda_2 \\ 2\lambda_4 + \dfrac{6}{5}t^2 & \xrightarrow[t\to 0^-]{} 2\lambda_4 \end{cases}.$$

Donc $\varphi_{\lambda_2,\lambda_4}$ *est deux fois dérivable en* 0 *si et seulement si* $\lambda_2 = \lambda_4$*, et dans ce cas,* $\varphi''_{\lambda_2,\lambda_4}(0) = \lambda_2$.

On a alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi_{\lambda_2,\lambda_2}(t) = \lambda_2 t^2 + \dfrac{t^4}{10}$ *et* $0^4\varphi''_{\lambda_2,\lambda_2}(0) - 2\varphi_{\lambda_2,\lambda_4}(0) = 0^4$*. Donc* $\varphi_{\lambda_2,\lambda_2}$ *est solution en* 0 *et donc sur* $\mathbb{R}$.

– Conclusion : *L'ensemble des solutions sur* $\mathbb{R}$ *de* $t^2y'' - 2y = t^4$ *est donc*

$$\mathcal{S} = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \lambda t^2 + \frac{t^4}{10} \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$