EQUA. DIFF

Chap 2 . Equations différentielles scalaires

Cours 7 (1)

2.1. Equations différentielles linéaires scalaires

2.1.3. Ordre 2

2.1.3.d) Détermination pratique de solutions de l'équation homogène

iii. Changement de variables

$y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t) \quad (E)$ $\qquad S_E = S_h + \varphi_p$ (ev de dim 2 .)

$y'' + a(t)y' + b(t)y = 0 \quad (H)$.

- Si on veut résoudre (H), on cherche 2 solutions indépendantes φ_1 et φ_2.
  ↳ on regarde le wronskien . si $\omega(t_0) \neq 0$ ok .

  Alors $S_h = \text{vect}(\varphi_1, \varphi_2)$

  Si on trouve juste une solution,

  on applique la technique d'abaissement de l'ordre .

- Si on veut résoudre (E), on prend $\varphi_1 \in S_h$ puis on applique la technique d'abaissement de l'ordre .

→ On étudie les méthodes pour trouver φ_1 .

$\varphi = \psi \times \varphi_1$ (chgmt de fonction inconnue) Posons $\psi = \dfrac{\varphi}{\varphi_1}$ de sorte que $\varphi = \psi\varphi_1$

$\varphi = \psi \circ \chi$ $\quad \forall t \in I \quad \varphi(t) = \psi(\chi(t))$ $\quad \chi : \mathbb{R}_+^* \to \chi(\mathbb{R}_+^*)$

$\varphi' = \chi' \times \psi' \circ \chi$ et $\varphi'' = \chi'' \times \psi' \circ \chi + (\chi')^2 \times \psi'' \circ \chi$

χ doit être 2 fois dérivable, bijective, de bijection réciproque 2 fois dérivable .

Soit φ une application 2 fois dérivable .

Posons $\psi = \varphi \circ \chi^{-1}$ de sorte que $\varphi = \psi \circ \chi$. $\qquad x = \chi(t) \in \chi(\mathbb{R}_+^*)$, $t = \chi^{-1}(x)$

et ψ est 2 fois dérivable . $\qquad$ Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi(t) = \psi(\underbrace{\chi(t)}_{x})$

Pour tout $x \in \chi(\mathbb{R}_+^*)$, $\psi(x) = \varphi(\chi^{-1}(x))$

$t^2 y'' + 3ty' + y = 0 \quad (17)$

φ est solution de (17) ssi

$$\psi''(\chi(t))\left(t^2 \chi'(t)^2\right) + \psi'(\chi(t))\left(t^2\chi''(t) + 3t\chi'(t)\right) + \psi(\chi(t)) = 0 .$$

$t^2 \times (x'(t))^2 = 1$, $x'(t) = \frac{1}{t}$ $x = \ln : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$

$\ln$ est bijective de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$, de bijection réciproque exp

$\ln$ est de classe $\mathcal{C}^2$, et $\ln^{-1} = \exp$ est de classe $\mathcal{C}^2$,

$x(\mathbb{R}_+^*) =$

$\ln$ est un $\mathcal{C}^2$-difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$.

φ est solution de (17) sur $\mathbb{R}_+^*$ ssi pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$

$$\psi''(x(t)) + 2\psi'(x(t)) + \psi(x(t)) = 0 .$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. x étant bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, il existe $t_0 \in \mathbb{R}_+^*$

tel que $x = x(t_0)$.

Donc $\psi''(x) + 2\psi'(x) + \psi(x) = 0$.

Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\psi''(x) + 2\psi'(x) + \psi(x) = 0$.

$$y'' + 2y' + y = 0 .$$

Or $\varphi(t) = \psi(x(t))$ $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$.

Donc $\varphi(t) = (\lambda_1 x(t) + \lambda_2) e^{-x(t)}$ et $x = \ln$.

$$= (\lambda_1 \ln t + \lambda_2) \times \frac{1}{t} .$$

Résoudre une équation par le changement de variable $x = \ln(t)$.

$\ln : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ est une bijection, ...

$\ln$ $\mathcal{C}^2$ et exp $\mathcal{C}^2$.

Soit φ une application de $\mathbb{R}_+^*$ ds $\mathbb{R}$ 2 fois dérivable.

Posons pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\psi(x) = \varphi(\exp(x))$ de sorte que $\varphi(t) = \psi(\underbrace{\ln t}_{x})$

ψ $\mathcal{C}^2$

$x = \ln t$
$t = \exp(x)$

$\varphi(t) = t^\alpha$ $\varphi'(t) = \alpha t^{\alpha-1}$ $\varphi''(t) = \alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2}$.

φ est solution de $at^2y'' + bty' + cy = 0$

ssi $a\alpha(\alpha-1)t^\alpha + b\alpha t^\alpha + ct^\alpha = 0$

ssi $a\alpha^2 + \alpha(b-a) + c = 0$.

ssi α est racine de $aX^2 + (b-a)X + c$.

2.1. Equations différentielles linéaires scalaires
Cours 7 (2)

2.1.3. Ordre 2

2.1.3.e) Raccordements des solutions

$a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = d(t)$ sur I.

→ si a ne s'annule pas sur I,

alors $y'' + \frac{b(t)}{a(t)} y' + \frac{c(t)}{a(t)} y = \frac{d(t)}{a(t)}$

S_h est un ev de dim 2 et $S = S_h + \varphi_p$.

→ Si a s'annule sur I alors on ne peut rien dire sur la dimension de S_h et S peut être $\emptyset$ ou un espace affine dont la dimension est à déterminer.

<u>Méthode</u> : 1) Résoudre l'équation sur les intervalles où a ne s'annule pas.

2) Puis raccordements

3) Etude réciproque pour vérifier que les applications obtenues sont 2 fois dérivables sur I et sont solutions sur I

Ex 44.

(*) on ne peut pas appliquer les résultats du cours.

→ on résout sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$.

Sur $\mathbb{R}_+^*$ ✓.

Sur $\mathbb{R}_-^*$: 1) On refait le même raisonnement que sur $\mathbb{R}_-^*$.

Posons $\tilde{\varphi} : \mathbb{R}_-^* \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \varphi(-t)$. $\tilde{\varphi}$ est 2 fois dérivable ssi φ l'est.

$\tilde{\varphi}(t) = \varphi(-t)$, $\varphi(t) = \tilde{\varphi}(-t)$.

$\forall t \in \mathbb{R}_-^*$ $\tilde{\varphi}'(t) = -\varphi'(-t)$ et $\tilde{\varphi}''(t) = \varphi''(-t)$.

φ est solution de (13) sur $\mathbb{R}_+^*$ ssi $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$ $t^2 \varphi''(t) - 2\varphi(t) = t^4$

ssi $\forall t \in \mathbb{R}_-^*$ $(-t)^2 \varphi''(-t) - 2\varphi(-t) = (-t)^4$

$t \in \mathbb{R}_-^*$ $-t \in \mathbb{R}_+^*$

ssi $\forall t \in \mathbb{R}_-^*$ $t^2 \tilde{\varphi}''(t) - 2\tilde{\varphi}(t) = t^4$

ssi $\tilde{\varphi}$ est solution de (13) sur $\mathbb{R}_-^*$

Donc $\tilde{\varphi}$ est solution de (B) sur $\mathbb{R}_-^*$ ssi $\varphi : t \mapsto \tilde{\varphi}(-t)$ est solution sur $\mathbb{R}_+^*$

ssi il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\underset{= \tilde{\varphi}(-t)}{\varphi(t)} = \frac{\lambda_1}{t} + \lambda_2 t^2 + \frac{t^4}{10}$ $\forall t \in \mathbb{R}_+^*$

ssi ———————— tel que $\forall t \in \mathbb{R}_-^*$ $\tilde{\varphi}(t) = \frac{\lambda_1}{-t} + \lambda_2 t^2 + \frac{t^4}{10}$

$= \frac{\lambda_3}{t} + \lambda_2 t^2 + \frac{t^4}{10}$ (λ_3, λ_4)

Sur $\mathbb{R}_+^*$, $\varphi_{\lambda_2\lambda_4}$ est dérivable et $\varphi_{\lambda_2\lambda_4}'(t) = 2\lambda_2 t + \frac{4}{10}t^3 \xrightarrow[t>0]{t \to 0} 0$

Sur $\mathbb{R}_-^*$, ———————— $\varphi_{\lambda_2\lambda_4}'(t) = 2\lambda_4 t + \frac{4}{10}t^3 \xrightarrow[t<0]{t \to 0} 0$

Si $\varphi_d'(t_0) = \varphi_g'(t_0)$ alors φ est dérivable en t_0 et

$\varphi'(t_0) = \varphi_d'(t_0) = \varphi_g'(t_0)$.

Donc $\left| \begin{array}{l} \varphi_d'(0) \\ \varphi_g'(0) \end{array} \right.$ existe et vaut 0 donc $\varphi'(0)$ existe et vaut 0.

Sur $\mathbb{R}_+^*$, $\varphi_{\lambda_2\lambda_4}$ est 2 dérivable et $\varphi_{\lambda_2\lambda_4}''(t) = 2\lambda_2 + \frac{12}{10}t^2 \xrightarrow[t>0]{t \to 0} 2\lambda_2$

Sur $\mathbb{R}_-^*$, ———————— $\varphi_{\lambda_2\lambda_4}''(t) = 2\lambda_4 + \frac{12}{10}t^2 \xrightarrow[t<0]{t \to 0} 2\lambda_4$.

Si $\varphi_d'(t_0) = \varphi_g'(t_0)$ alors φ est dérivable en t_0 et

$\varphi'(t_0) = \varphi_d'(t_0) = \varphi_g'(t_0)$.

Donc $\left| \begin{array}{l} \varphi_d''(0) \\ \varphi_g''(0) \end{array} \right.$ existe et vaut $\begin{array}{l} 2\lambda_2 \\ 2\lambda_4 \end{array}$

Donc φ est 2 fois dérivable en 0 ssi $\lambda_2 = \lambda_4$ et $\varphi''(0) = 2\lambda_2 = 2\lambda_4$.