Feuille de TD n° 4

Équations différentielles

10 octobre 2020

Exercice 1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les problèmes de Cauchy suivants :

1. $\begin{cases} y'' - 2\sqrt{2}y' + 2y = 0, \\ y(0) = 2, \\ y'(0) = 3 \end{cases}$

2. $\begin{cases} y'' - 4y' + 5y = 0, \\ y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1, \\ y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$

Exercice 2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 2y' + y = (t-1)\mathrm{e}^t$,
2. $y'' - 3y' - 4y = t + e^{-t}$,
3. $y'' - 4y' + 3y = (2t+1)\mathrm{sh}(t)$,
4. $y'' + y = \sin^3(t) + 1$.

Exercice 3 (Des équations issues de la physique)**.**

1. Soient Q et ω_0 deux réels strictement positifs. Déterminer l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation suivante en discutant sur les paramètres ω_0 et Q :

$$y'' + \frac{\omega_0}{Q}y' + \omega_0^2 y = 0.$$

En physique, on appelle Q le facteur de qualité et ω_0 la pulsation propre.

2. Soient ω et ω_0 deux réels strictement positifs et distincts. Déterminer la solution définie sur $\mathbb{R}$ du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'' + \omega^2 y = h(t), \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

avec $h(t) = A \in \mathbb{R}$ puis $h(t) = \cos(\omega_0 t)$.

Exercice 4. Déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = -f(-x).$$

Exercice 5. Déterminer l'ensemble des couples $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que toute solution de $y'' + ay' + by = 0$ soit bornée.