Corrigé du TD n° 4

Équations différentielles

14 octobre 2020

Exercice 1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les problèmes de Cauchy suivants :

1. $\begin{cases} y'' - 2\sqrt{2}y' + 2y = 0, \\ y(0) = 2, \\ y'(0) = 3 \end{cases}$

2. $\begin{cases} y'' - 4y' + 5y = 0, \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$

Correction partielle. Détails dans la feuille EquadiffTD4NotesEx1à3

1. La solution sur $\mathbb{R}$ du problème de Cauchy est
$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \left(2 + (\sqrt{3} - 2\sqrt{2}t)\right) e^{\sqrt{2}t}.$$
2. La solution sur $\mathbb{R}$ du problème de Cauchy est
$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto (\cos(t) + \sin(t))e^{2t-\pi}.$$

Exercice 2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 2y' + y = (t-1)e^t$,
2. $y'' - 3y' - 4y = t + e^{-t}$,
3. $y'' - 4y' + 3y = (2t+1)\mathrm{sh}(t)$,
4. $y'' + y = \sin^3(t) + 1$.

Correction partielle. Détails dans la feuille EquadiffTD4NotesEx1à3

1. $\mathcal{S}_1 = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto (\lambda_1 + \lambda_2 t)e^t + \left(\frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{2}t^2\right) e^t \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}$
2. $\mathcal{S}_2 = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \lambda_1 e^{-t} + \lambda_2 e^{4t} - \frac{1}{4}t + \frac{3}{16} - \frac{1}{5}te^{-t} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}$
3. $\mathcal{S}_3 = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \lambda_1 e^t + \lambda_2 e^{3t} + \left(-\frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{2}t\right) e^t + \left(-\frac{1}{8}t - \frac{5}{32}\right) e^{-t} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}$
4. $\mathcal{S}_4 = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \lambda_1 \cos(t) + \lambda_2 \sin(t) + 1 - \frac{3}{8}t\cos(t) + \frac{1}{32}\sin(3t) \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}$

Exercice 3 (Des équations issues de la physique)**.**

1. Soient Q et ω_0 deux réels strictement positifs. Déterminer l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation suivante en discutant sur les paramètres ω_0 et Q :
$$y'' + \frac{\omega_0}{Q}y' + \omega_0^2 y = 0.$$
En physique, on appelle Q le facteur de qualité et ω_0 la pulsation propre.
2. Soient ω et ω_0 deux réels strictement positifs et distincts. Déterminer la solution définie sur $\mathbb{R}$ du problème de Cauchy
$$\begin{cases} y'' + \omega^2 y = h(t), \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$
avec $h(t) = A \in \mathbb{R}$ puis $h(t) = \cos(\omega_0 t)$.

Correction partielle. Détails dans la feuille EquadiffTD4NotesEx1à3

1. Le polynôme caractéristique associé à l'équation est $X^2 + \dfrac{\omega_0}{Q}X + \omega_0^2 = 0$, de discriminant $\Delta = (2\omega_0)^2\left(\dfrac{1}{(2Q)^2} - 1\right)$.

   • Si $Q > \dfrac{1}{2}$ alors $\Delta > 0$. Les deux racines réelles du polynôme caractéristique sont
$$r_1 = -\frac{\omega_0}{2Q} - \omega_0\sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}$$
   et
$$r_2 == -\frac{\omega_0}{2Q} + \omega_0\sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}.$$
   L'ensemble des solutions est donc
$$\mathcal{S} = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \lambda_1 \mathrm{e}^{r_1 t} + \lambda_2 \mathrm{e}^{r_2 t} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

   • Si $Q = \dfrac{1}{2}$ alors $\Delta = 0$.
   L'ensemble des solutions est
$$\mathcal{S} = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto (\lambda_1 + \lambda_2 t)\mathrm{e}^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

   • Si $Q < \dfrac{1}{2}$ alors $\Delta < 0$. Les deux racines complexes conjuguées du polynôme caractéristique sont
$$r_1 = -\frac{\omega_0}{2Q} - i\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$
   et
$$r_2 == -\frac{\omega_0}{2Q} + i\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}.$$
   L'ensemble des solutions est donc
$$\mathcal{S} = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \left(\lambda_1 \cos\left(\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}\right) + \lambda_2 \cos\left(\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}\right)\right)\mathrm{e}^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

2. L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y'' + \omega^2 y = 0$ est
$$\mathcal{S}_h = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \lambda_1 \cos(\omega t) + \lambda_2 \sin(\omega t) \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

   • Si $h(t) = A \in \mathbb{R}$ alors la fonction $t \longmapsto \dfrac{A}{\omega^2}$ est une solution particulière de l'équation.
   L'ensemble des solutions de l'équation est donc
$$\mathcal{S} = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \lambda_1 \cos(\omega t) + \lambda_2 \sin(\omega t) + \frac{A}{\omega^2} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$
   Après calculs, on trouve alors que la solution du problème de Cauchy est l'application
$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \left(1 - \frac{A}{\omega^2}\right)\cos(\omega t).$$

   • Si $h(t) = \cos(\omega_0 t)$, on trouve que $\varphi_p(t) = \dfrac{1}{\omega^2 - \omega_0^2}\cos(\omega_0 t)$ est une solution particulière.
   L'ensemble des solutions de l'équation est donc
$$\mathcal{S} = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \lambda_1 \cos(\omega t) + \lambda_2 \sin(\omega t) + \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2}\cos(\omega_0 t) \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$
   Après calculs, on trouve alors que la solution du problème de Cauchy est l'application
$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \cos(\omega t) + \frac{\cos(\omega_0 t) - \cos(\omega t)}{\omega^2 - \omega_0^2}.$$

Exercice 4. Déterminer l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telles que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f'(x) = -f(-x).$$

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -f(-x)$.

Alors f étant de classe $\mathcal{C}^1$, l'application $x \longmapsto -f(-x)$ l'est aussi et donc f' l'est également. On en déduit que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. En dérivant la relation vérifiée par f, on obtient alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f''(x) = f'(-x),$$

soit en utilisant que $f'(-x) = -f(x)$,

$$f''(x) = -f(x),$$

f est donc solution de l'équation différentielle linéaire scalaire homogène du deuxième ordre à coefficients constants

$$y'' + y = 0.$$

L'ensemble des solutions de cette équation est

$$\mathcal{S}_h = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ x \longmapsto \lambda_1 \cos(x) + \lambda_2 \sin(x) \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Il existe donc $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) = \lambda_1 \cos(x) + \lambda_2 \sin(x).$$

Dans ce cas, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = -\lambda_1 \sin(x) + \lambda_2 \cos(x).$$

Or, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -f(-x)$.

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$-\lambda_1 \sin(x) + \lambda_2 \cos(x) = -\lambda_1 \cos(x) + \lambda_2 \sin(x).$$

En particulier, pour $x = 0$, on obtient $\lambda_2 = -\lambda_1$.

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \lambda_1(\cos(x) - \sin(x))$.

Réciproquement, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $f : x \longmapsto \lambda(\cos(x) - \sin(x))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \lambda(-\sin(x) - \cos(x)) = -\lambda(\cos(-x) - \sin(-x)) = -f(-x).$$

L'ensemble des fonctions vérifiant l'énoncé est donc l'ensemble des fonctions $x \longmapsto \lambda(\cos(x) - \sin(x))$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 5. Déterminer l'ensemble des couples $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que toute solution de $y'' + ay' + by = 0$ soit bornée.

Le polynôme caractéristique associé à l'équation est $X^2 + aX + b$, de discriminant $\Delta = a^2 - 4b$.

On distingue alors les trois cas :

• 1^{er} cas : $\Delta > 0$. Notons r_1 et r_2 les racines réelles distinctes du polynôme caractéristique. Alors l'ensemble des solutions de l'équation est

$$\mathcal{S} = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ x \longmapsto \lambda_1 \mathrm{e}^{r_1 x} + \lambda_2 \mathrm{e}^{r_2 x} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Si r_1 ou r_2 est non nul, disons r_1, alors la solution $x \longmapsto \mathrm{e}^{r_1 x}$ n'est pas bornée puisqu'elle tend vers $+\infty$ en $\pm\infty$ selon le signe de r_1.

• $2^{\text{ème}}$ cas : $\Delta = 0$. Notons r la racine double du polynôme caractéristique. Alors l'ensemble des solutions de l'équation est

$$\mathcal{S} = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ x \longmapsto (\lambda_1 x + \lambda_2)\mathrm{e}^{rx} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Alors la solution $x \mapsto x\mathrm{e}^{rx}$ n'est pas bornée.

• $3^{\text{ème}}$ cas : $\Delta < 0$. Notons $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ les racines complexes conjuguées du polynôme caractéristique, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.

Alors l'ensemble des solutions de l'équation est

$$\mathcal{S} = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ x \longmapsto (\lambda_1 \cos(\beta x) + \lambda_2 \sin(\beta x))\mathrm{e}^{\alpha x} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

D'après l'expression du polynôme, on a $\alpha = -\dfrac{a}{2}$.

Or les solutions $x \longmapsto \sin(\beta x)\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}x}$ et $x \mapsto \cos(\beta x)\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}x}$ sont bornées si et seulement si $a = 0$.

En effet, si $a \neq 0$, alors, par exemple, en posant pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$, $x_n = \dfrac{\pi}{2\beta} + \dfrac{2\pi n}{\beta}$, la quantité suivante tend vers $+\infty$ en $\pm\infty$ selon le signe de a :

$$\sin(\beta x_n)\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}x_n} = \mathrm{e}^{-\frac{a\pi}{4\beta}}\mathrm{e}^{-\frac{a\pi}{2\beta}\times n}.$$

Si $a = 0$ alors tous les éléments de $\mathcal{S}$ sont des fonctions bornées comme combinaisons linéaires de $x \longmapsto \cos(\beta x)$ et $x \longmapsto \sin(\beta x)$.

• **Conclusion :** Ainsi, toutes les solutions de $y'' + ay' + by = 0$ sont bornées si et seulement si $\Delta < 0$ et $a = 0$.

Comme $\Delta = a^2 - 4b = -4b$, toutes les solutions sont bornées si et seulement si $a = 0$ et $b > 0$.

L'ensemble des couples $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que toute solution de $y'' + ay' + by = 0$ soit borné est l'ensemble $\left\{(0, b) \mid b \in \mathbb{R}_+^*\right\}$.