TD 4. Equations différentielles

Exercice 2

Exercice 2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 2y' + y = (t-1)e^t$,
2. $y'' - 3y' - 4y = t + e^{-t}$,
3. $y'' - 4y' + 3y = (2t+1)\mathrm{sh}(t)$,
4. $y'' + y = \sin^3(t) + 1$.

→ Equa diff linéaires scalaires du 2ème ordre à coefficients constants

1. • Solutions de l'équation homogène : Le polynôme caractéristique est $P_c = X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$, et P_c admet une racine double réelle 1.

Donc $S_{E_{H_1}} = \{\mathbb{R} \to \mathbb{R} ; t \mapsto (\lambda_1 + \lambda_2 t)e^t, (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}$.

• Solution particulière : On cherche une solution particulière φ_p sous la forme $\varphi_p(t) = t^m \varphi(t) e^t$ et $m = 2$ ($\alpha = 1$ → racine double)

$= t^2(at+b)e^t$ $\quad d^\circ\varphi = d^\circ P$ où $P(t) = t-1$ $= 1$

avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Donc $\varphi_p(t) = (at^3 + bt^2)e^t$ $\quad \times 1$

$\varphi_p'(t) = (3at^2 + 2bt + at^3 + bt^2)e^t = (at^3 + (3a+b)t^2 + 2bt)e^t$ $\quad \times(-2)$

$\varphi_p''(t) = (3at^2 + 2(3a+b)t + 2b + at^3 + (3a+b)t^2 + 2bt)e^t$

$= (at^3 + (6a+b)t^2 + (6a+4b)t + 2b)e^t$. $\quad \times 1$

Donc φ_p est solution ssi

$(6at + 2b)e^t = (t-1)e^t$

ssi $6a = 1$ et $2b = -1$

ssi $a = \frac{1}{6}$ et $b = -\frac{1}{2}$.

Donc $\varphi_p(t) = \left(\frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{2}t^2\right)e^t$ est une solution particulière de (1).

• Donc l'ensemble des solutions de (1) est

$$\boxed{S_1 = \left\{\mathbb{R} \to \mathbb{R} ; t \mapsto (\lambda_1 + \lambda_2 t)e^t + \left(\frac{1}{6}t^3 - \frac{1}{2}t^2\right)e^t, (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}}.$$

2. $y'' - 3y' - 4y = t + e^{-t}$ (2)

- Solutions de l'équation homogène : Le polynôme caractéristique est $X^2 - 3X - 4 = (X+1)(X-4)$, qui admet 2 racines réelles distinctes -1 et 4.

Donc $S_{h_2} = \{ \mathbb{R} \to \mathbb{R} ;\ t \mapsto \lambda_1 e^{-t} + \lambda_2 e^{4t} ,\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \}$

- Solution particulière : on applique le principe de superposition des solutions.

1) $y'' - 3y' - 4y = \underbrace{t}_{P(t)} \underbrace{e^{0t}}_{1}$ (2 bis)

On cherche φ_{p_1} sous la forme $\varphi_{p_1}(t) = t^m \varphi(t) e^{0t}$ avec $m = 0$
$= at + b$ et $d^\circ \varphi = 1$

Donc $\varphi_{p_1}'(t) = a$ et $\varphi_{p_1}''(t) = 0$.

Donc φ_{p_1} est solution de (2 bis) ssi $-3a - 4at - 4b = t$

donc $-4a = 1$ et $-3a - 4b = 0$

donc $a = -\frac{1}{4}$ et $b = \frac{3a}{-4} = \frac{3}{16}$.

Donc $\varphi_{p_1}(t) = -\frac{1}{4}t + \frac{3}{16}$ est solution particulière de (2bis).

2) $y'' - 3y' - 4y = e^{-t}$ (2 ter)

On cherche φ_{p_2} sous la forme $\varphi_{p_2}(t) = at e^{-t}$ $m = 1$ $d^\circ \varphi = 0$

Donc $\varphi_{p_2}'(t) = (a - at) e^{-t}$

et $\varphi_{p_2}''(t) = (-a - a + at) e^{-t}$

Donc φ_{p_2} est solution de (2ter) ssi

$(-2a + \cancel{at} - 3a + \cancel{3at} - \cancel{4at}) e^{-t} = e^{-t}$

Donc $-5a = 1$, donc $a = -\frac{1}{5}$.

Donc $\varphi_{p_2}(t) = -\frac{1}{5} t e^{-t}$ est solution particulière de (2ter).

- Donc $\varphi_{p_1} + \varphi_{p_2}$ est une solution particulière de (2).

Donc l'ensemble de solutions de (2) est

$$\boxed{S_2 = \left\{ \mathbb{R} \to \mathbb{R} ; t \mapsto \lambda_1 e^{-t} + \lambda_2 e^{4t} - \frac{1}{4} t + \frac{3}{16} - \frac{1}{5} t e^{-t} , (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}}.$$

3. $y'' - 4y' + 3y = (2t+1)\,\mathrm{sh}(t)$. (3)

- Solutions de l'équation homogène :

$$X^2 - 4X + 3 = (X-1)(X-3)$$

Donc $S_{h_3} = \left\{ t \mapsto \lambda_1 e^{t} + \lambda_2 e^{3t} , (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

- $y'' - 4y' + 3y = (2t+1) \dfrac{e^{t} - e^{-t}}{2} = \dfrac{1}{2}(2t+1)e^{t} - \dfrac{1}{2}(2t+1)e^{-t}$

- $y'' - 4y' + 3y = \dfrac{1}{2}(2t+1)e^{t}$

$\varphi_{p_1} = t(at+b)e^{t} = (at^2 + bt)e^{t}$ $(\times 3)$

$\varphi_{p_1}' = (2at + b + at^2 + bt)e^{t} = (at^2 + (2a+b)t + b)e^{t}$ $(\times -4)$

$\varphi_{p_1}'' = (2at + (2a+b) + at^2 + (2a+b)t + b)e^{t}$

$= (at^2 + (\cancel{3}4a + b)t + 2a + 2b)e^{t}$. $(\times 1)$

$-\cancel{3}4at + 2a - 2b = \dfrac{1}{2}(2t+1) = t + \dfrac{1}{2}$.

Donc $-\cancel{3}4a = 1$ et $2a - 2b = \dfrac{1}{2}$

Donc $a = -\dfrac{1}{\cancel{3}4}$ et $b = \dfrac{-1}{4} + a = -\dfrac{1}{2}$

Donc $\varphi_{p_1}(t) = \left(-\dfrac{1}{4}t^2 - \dfrac{1}{2}t\right)e^{t}$.

- $y'' - 4y' + 3y = -\dfrac{1}{2}(2t+1)e^{-t}$

$\varphi_{p_2}(t) = (at+b)e^{-t}$ $(\times 3)$

$\varphi_{p_2}'(t) = (-at + a - b)e^{-t}$ $(\times -4)$

$\varphi_{p_2}''(t) = (-a + at - a + b)e^{-t} = (at - 2a + b)e^{-t}$ $(\times 1)$

$(8at - 6a + 8b)e^{-t} = -\dfrac{1}{2}(2t+1)e^{-t}$

$8a = -1$ et $-6a + 8b = -\dfrac{1}{2}$

Donc $a = -\dfrac{1}{8}$ et $8b = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{4} = \dfrac{-5}{4}$, $b = \dfrac{-5}{32}$.

$\varphi_{p_2}(t) = \left(-\frac{1}{8}t - \frac{5}{32}\right)e^{-t}$.

$\varphi_1 + \varphi_2$ est solution particulière de (3).

Donc l'ensemble des solutions de (3) est

$$\boxed{S_3 = \left\{\mathbb{R}\to\mathbb{R};\ t\mapsto \lambda_1 e^{t} + \lambda_2 e^{3t} + \left(\frac{-1}{4}t^2 - \frac{1}{2}t\right)e^{t} + \left(-\frac{1}{8}t - \frac{5}{32}\right)e^{-t},\ (\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2\right\}}.$$

4. $y'' + y = \sin^3(t) + 1$.

- Solutions de l'équation homogène : $X^2+1 = (X-i)(X+i)$ $\quad \alpha = 0$, $\beta = 1$

$$S_{h_4} = \left\{\mathbb{R}\to\mathbb{R};\ t\mapsto \lambda_1\cos t + \lambda_2 \sin t,\ (\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$

- . $t\mapsto 1$ est solution évidente de $y''+y = 1$.
  - $y''+y = \sin^3(t)$.

$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^k b^{n-k}$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1

$\sin(t) = \frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}$, $\quad \sin^3(t) = \left(\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)^3$

$$= \frac{1}{(2i)^3}\left(e^{it}-e^{-it}\right)^3$$

$$\sin^3(t) = \frac{1}{(2i)^3}\left(e^{3it} - 3e^{it} + 3e^{-it} - e^{-3it}\right)$$

$$= \frac{1}{-4}\left(\frac{e^{3it}-e^{-3it}}{2i} - 3\,\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\left(\sin(3t) - 3\sin(t)\right)$$

$$= \frac{3}{4}\sin(t) - \frac{1}{4}\sin(3t).$$

. $y''+y = \sin t$ et $y''+y = \sin(3t)$

$\to y''+y = e^{it}$

$\varphi_{p_1,\mathbb{C}}(t) = a t e^{it}$ $\quad (\times 1)$

$\varphi_{1,\mathbb{C}}'(t) = (a + iat)e^{it}$

$\varphi_{1,\mathbb{C}}''(t) = (2ia - at)e^{it}$ $\quad (+1)$

$\varphi_{p_1,\mathbb{C}}(t) = -\frac{i}{2}te^{it} = -\frac{1}{2}t\,i(\cos t + i\sin t)$

$2ia\,e^{it} = e^{it}$

$2ia = 1$

$a = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2}$.

$\varphi_{p_1,\mathbb{R}}(t) = \mathrm{Im}(\varphi_{p_1,\mathbb{C}}(t)) = -\frac{1}{2}t\cos t$ solution particulière de $y''+y=\sin t$.

$\rightarrow y''+y=e^{3it}$

$\varphi_{p_2,\mathbb{C}}(t) = a e^{3it}$ $(\times 1)$

$\varphi_{p_2,\mathbb{C}}'(t) = 3ia e^{3it}$

$\varphi_{p_2,\mathbb{C}}''(t) = -9a e^{3it}$ $(\times 1)$

$-8a e^{3it} = e^{3it}$

$-8a = 1$

$a = -\frac{1}{8}$.

$\varphi_{p_2,\mathbb{C}}(t) = -\frac{1}{8}e^{3it}$

$\varphi_{p_2,\mathbb{R}}(t) = \mathrm{Im}(\varphi_{2,\mathbb{C}}(t)) = -\frac{1}{8}\sin(3t)$ solution particulière de $y''+y=\sin(3t)$.

Une solution particulière de (4) est $t \mapsto 1 + \frac{3}{4}\varphi_{p_1,\mathbb{R}} - \frac{1}{4}\varphi_{p_2,\mathbb{R}}$.

Donc l'ensemble des solutions de (4) est

$S_4 = \{\mathbb{R}\to\mathbb{R};\ t\mapsto \lambda_1\cos t+\lambda_2\sin t + 1 - \frac{3}{8}t\cos t + \frac{1}{32}\sin(3t),\ (\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2\}$.

Exercice 3

Exercice 3 (Des équations issues de la physique).

1. Soient Q et ω_0 deux réels strictement positifs. Déterminer l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation suivante en discutant sur les paramètres ω_0 et Q :

$$y'' + \frac{\omega_0}{Q}y' + \omega_0^2 y = 0.$$

En physique, on appelle Q le facteur de qualité et ω_0 la pulsation propre.

1. C'est une équa. diff. linéaire scalaire d'ordre 2 à coefficients constants $\underbrace{\ }_{\text{homogène}}$.

Le polynôme caractéristique associé est $P = X^2 + \frac{\omega_0}{Q}X + \omega_0^2$,

de discriminant $\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 = (2\omega_0)^2\left(\frac{1}{(2Q)^2} - 1\right)$

• $\Delta > 0$ ssi $\frac{1}{(2Q)^2} > 1$ ssi $Q < \frac{1}{2}$

Les racines de P sont $r_1 = \dfrac{-\frac{\omega_0}{Q} - 2\omega_0\sqrt{\frac{1}{(2Q)^2}-1}}{2}$

$= \frac{-\omega_0}{2Q} - \omega_0\sqrt{\frac{1}{(2Q)^2}-1}$ <0

$r_2 = \frac{-\omega_0}{2Q} + \omega_0\sqrt{\frac{1}{(2Q)^2}-1}$ <0

Donc $S = \{\mathbb{R}\to\mathbb{R};\ t\mapsto \lambda_1 e^{r_1 t} + \lambda_2 e^{r_2 t},\ (\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2\}$

(exponentielles décroissantes).

$0 < \frac{1}{(2\varphi)^2} - 1 < \frac{1}{(2\varphi)^2}$, $\sqrt{\frac{1}{(2\varphi)^2} - 1} < \frac{1}{2\varphi}$

- $\Delta = 0$ ssi $(2\varphi)^2 = 1$ ssi $\varphi = \frac{1}{2}$.

Alors la racine double de P est $-\frac{\omega_0}{2\varphi}$.

Donc $S = \left\{ \mathbb{R} \to \mathbb{R} ; t \mapsto (\lambda_1 + t\lambda_2) e^{-\frac{\omega_0}{2\varphi} t}, (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

- $\Delta < 0$ ssi $(2\varphi)^2 > 1$ ssi $\varphi > \frac{1}{2}$.

Alors les racines conjuguées complexes de P sont

$$r_1 = \frac{-\frac{\omega_0}{\varphi} - 2i\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{(2\varphi)^2}}}{2} \quad \text{et} \quad r_2 = -\frac{\omega_0}{2\varphi} + i\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{(2\varphi)^2}}$$

$$= -\frac{\omega_0}{2\varphi} - i\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{(2\varphi)^2}}$$

Donc $S = \left\{ \mathbb{R} \to \mathbb{R} ; t \mapsto e^{-\frac{\omega_0}{2\varphi} t} \left(\lambda_1 \cos\left(\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{(2\varphi)^2}}\, t\right) + \lambda_2 \sin\left(\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{(2\varphi)^2}}\, t\right)\right), (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$

2. Soient ω et ω_0 deux réels strictement positifs et distincts. Déterminer la solution définie sur $\mathbb{R}$ du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'' + \omega^2 y = h(t), \\ y(0) = 1, \\ y'(0) = 0. \end{cases}$$

avec $h(t) = A \in \mathbb{R}$ puis $h(t) = \cos(\omega_0 t)$.

2. - Solutions de l'équation homogène : $X^2 + \omega^2 = (X - i\omega)(X + i\omega)$

$S_h = \left\{ \mathbb{R} \to \mathbb{R} ; t \mapsto \lambda_1 \cos(\omega t) + \lambda_2 \sin(\omega t), (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

- Si $h(t) = A \in \mathbb{R}$, $y'' + \omega^2 y = A$ (1)

Une solution particulière est $t \mapsto \frac{A}{\omega^2}$.

Donc l'ensemble des solutions de (1) est

$$S_1 = \left\{ \mathbb{R} \to \mathbb{R} ; t \mapsto \lambda_1 \cos(\omega t) + \lambda_2 \sin(\omega t) + \frac{A}{\omega^2}, (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application 2 fois dérivable.

φ vérifie le problème de Cauchy$^{(e)}$ ssi il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\varphi(t) = \lambda_1 \cos(\omega t) + \lambda_2 \sin(\omega t) + \frac{A}{\omega^2}$

et $\varphi(0) = 1$ et $\varphi'(0) = 0$.

Or $\varphi(0) = \lambda_1 + \frac{A}{\omega^2}$, $\varphi'(t) = -\lambda_1^{\omega}\sin(\omega t) + \lambda_2 \omega \cos(\omega t)$

$\varphi'(0) = \lambda_2 \omega$. $(\omega \neq 0)$.

Donc φ vérifie $(\mathcal{C})$ ssi $\lambda_1 = 1 - \frac{A}{\omega^2}$ et $\lambda_2 = 0$

Donc la solution sur $\mathbb{R}$ du problème de Cauchy est

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R};\ t \mapsto \left(1 - \frac{A}{\omega^2}\right)\cos(\omega t) + \frac{A}{\omega^2}.$$

- Si $R(t) = \cos(\omega_0 t)$.

On cherche une solution particulière de $y'' + \omega^2 y = e^{i\omega_0 t}$ $(*)$, $(\omega_0 \neq \omega)$

sous la forme $\varphi_{p,\mathbb{C}}(t) = a e^{i\omega_0 t}$ où $a \in \mathbb{C}$.

Alors $\varphi_{p,\mathbb{C}}'(t) = a i\omega_0 e^{i\omega_0 t}$

et $\varphi_{p,\mathbb{C}}''(t) = -a\omega_0^2 e^{i\omega_0 t}$.

Donc $\varphi_{p,\mathbb{C}}$ est solution de $(*)$ ssi

$$(-a\omega_0^2 + a\omega^2) e^{i\omega_0 t} = e^{i\omega_0 t}$$

ssi $(\omega^2 - \omega_0^2)\, a = 1$, ssi $a = \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} \in \mathbb{R}$.

Donc $\varphi_{p,\mathbb{C}}(t) = \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} e^{i\omega_0 t}$ est solution particulière de $(*)$.

Donc $\mathrm{Re}(\varphi_{p,\mathbb{C}}(t)) = \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2}\cos(\omega_0 t)$ est solution particulière

de $y'' + \omega^2 y = \cos(\omega_0 t)$.

Donc l'ensemble des solutions de $y'' + \omega^2 y = \cos(\omega_0 t)$

est $S = \left\{\mathbb{R} \to \mathbb{R};\ t \mapsto \lambda_1 \cos(\omega t) + \lambda_2 \sin(\omega t) + \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2}\cos(\omega_0 t), (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}$

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable.

φ est solution du problème de Cauchy $(\mathcal{C}_2)$ ssi il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$

tel que $\varphi(t) = \lambda_1 \cos(\omega t) + \lambda_2 \sin(\omega t) + \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2}\cos(\omega_0 t)$

et $\varphi(0) = 1$ et $\varphi'(0) = 0$.

Or $\varphi(0) = \lambda_1 + \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2}$,

$\varphi'(t) = -\lambda \omega \sin(\omega t) + \lambda_2 \omega \cos(\omega t) - \frac{\omega_0}{\omega^2 - \omega_0^2}\sin(\omega_0 t)$

$\varphi'(0) = \lambda_2 \omega$.

Donc φ est solution de $(\mathcal{C}_2)$ ssi

$$\lambda_1 = 1 - \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2}$$

$$\lambda_2 = 0 .$$

Donc la solution sur $\mathbb{R}$ de $(\mathcal{C}_2)$ est

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R} ;\ t \mapsto \left(1 - \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2}\right) \cos(\omega t) + \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2} \cos(\omega_0 t)$$

$$= \cos(\omega t) + \frac{\cos(\omega_0 t) - \cos(\omega t)}{\omega^2 - \omega_0^2} .$$

Exercice 1

Exercice 1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les problèmes de Cauchy suivants :

1. $\begin{cases} y'' - 2\sqrt{2}y' + 2y = 0, \\ y(0) = 2, \\ y'(0) = 3 \end{cases}$

2. $\begin{cases} y'' - 4y' + 5y = 0, \\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \\ y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \end{cases}$

1. . Solutions de l'équation : $X^2 - 2\sqrt{2}X + 2$ de discriminant $\Delta = 8 - 8 = 0$, donc de racine réelle double $r = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

Donc $S_1 = \left\{ \mathbb{R} \to \mathbb{R} ;\ t \mapsto (\lambda_1 + \lambda_2 t)e^{\sqrt{2}t},\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2 fois dérivable.

φ est solution du problème de Cauchy $(\mathcal{C}_1)$ ssi il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\varphi(t) = (\lambda_1 + \lambda_2 t)e^{\sqrt{2}t}$ et $\varphi(0) = 2$ et $\varphi'(0) = 3$.

Or $\varphi(0) = \lambda_1$, $\varphi'(t) = (\lambda_2 + \sqrt{2}\lambda_1 + \sqrt{2}\lambda_2 t)e^{\sqrt{2}t}$,

$\varphi'(0) = \lambda_2 + \sqrt{2}\lambda_1$.

Donc φ est solution de $(\mathcal{C}_1)$ ssi $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 + \sqrt{2}\lambda_1 = 3$

ssi $\lambda_1 = 2$ et $\lambda_2 = 3 - 2\sqrt{2}$.

Donc la solution sur $\mathbb{R}$ de $(\mathcal{C}_1)$ est

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R} ;\ t \mapsto (2 + (3 - 2\sqrt{2})t)e^{\sqrt{2}t} .$$

2. . Solutions de l'équation : $X^2 - 4X + 5$ de discriminant $\Delta = 16 - 20 = -4$, de racines complexes conjuguées

$r_1 = \frac{4 - i2}{2} = 2 - i$ et $r_2 = 2 + i$.

Donc $S_2 = \{ \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,;\, t \mapsto e^{2t}(\lambda_1 \cos(t) + \lambda_2 \sin(t)),\ (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \}$.

- Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2 fois dérivable.

φ est solution du problème de Cauchy $(\mathcal{C}_2)$ ssi il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\varphi(t) = e^{2t}(\lambda_1 \cos(t) + \lambda_2 \sin(t))$ et $\varphi(\frac{\pi}{2}) = 1$ et $\varphi'(\frac{\pi}{2}) = 1$.

Or $\varphi(\frac{\pi}{2}) = \lambda_2 e^{\pi}$, $\varphi'(t) = e^{2t}(2\lambda_1 \cos t + 2\lambda_2 \sin t - \lambda_1 \sin t + \lambda_2 \cos(t))$

$\varphi'(\frac{\pi}{2}) = e^{\pi}(2\lambda_2 - \lambda_1)$.

Donc φ est solution de $(\mathcal{C}_2)$ ssi

$\lambda_2 e^{\pi} = 1$ et $e^{\pi}(2\lambda_2 - \lambda_1) = 1$

ssi $\lambda_2 = e^{-\pi}$ et $2e^{-\pi} - \lambda_1 = e^{-\pi}$

ssi $\lambda_2 = e^{-\pi}$ et $\lambda_1 = e^{-\pi}$.

Donc la solution sur $\mathbb{R}$ de $(\mathcal{C}_2)$ est

$$\mathbb{R} \to \mathbb{R} \,;\, t \mapsto e^{2t}(e^{-\pi} \cos(t) + e^{-\pi} \sin(t))$$
$$= e^{2t-\pi}(\cos t + \sin t).$$