# Feuille de TD n° 5

*Équations différentielles*

16 octobre 2020

**Exercice 1.** Considérons l'équation différentielle

$$(2t+1)y'' + (4t-2)y' - 8y = 0. \tag{1}$$

1. Déterminer une solution définie sur $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ de l'équation (1) sous la forme d'un polynôme.
2. Déterminer une solution définie sur $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ de l'équation (1) sous la forme d'une exponentielle.
3. Montrer que ces deux solutions sont indépendantes.
4. En déduire l'ensemble des solutions définies l'intervalle $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ de l'équation (1).

**Exercice 2.** Considérons l'équation différentielle

$$(1+t^2)y'' - 2y = 0. \tag{2}$$

1. (a) Par intégration par parties, calculer, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^t \frac{s^2}{(1+s^2)^2} \mathrm{d}s.$$

   (b) En déduire, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\int_0^t \frac{1}{(1+s^2)^2} \mathrm{d}s.$$

2. Déterminer une solution définie sur $\mathbb{R}$ de l'équation (2) sous forme polynomiale.
3. En déduire l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation (2).

**Exercice 3.** En utilisant un changement de fonction inconnue $\varphi(t) = \psi(t)\varphi_1(t)$ où $\varphi_1$ est une fonction bien choisie, déterminer l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation suivante :

$$(1+\mathrm{e}^t)y'' + 2\mathrm{e}^t y' + (2\mathrm{e}^t + 1)y = t\mathrm{e}^t.$$

**Exercice 4.** Considérons l'équation différentielle

$$y'' + q(t)y = 0, \tag{3}$$

où $q$ est une application de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ continue et intégrable.

1. Soit $\varphi$ une solution bornée de l'équation (3) définie sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que $\varphi'$ tend vers 0 en l'infini.
2. Montrer que le wronskien de deux solutions de l'équation (3) est constant.
3. En déduire que l'équation (3) admet des solutions définies sur $\mathbb{R}_+$ non bornées.