Corrigé du TD n° 4

Équations différentielles

19 octobre 2020

Exercice 1. Considérons l'équation différentielle

$$(2t+1)y'' + (4t-2)y' - 8y = 0. \tag{1}$$

1. Déterminer une solution définie sur $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ de l'équation (1) sous la forme d'un polynôme.
2. Déterminer une solution définie sur $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ de l'équation (1) sous la forme d'une exponentielle.
3. Montrer que ces deux solutions sont indépendantes.
4. En déduire l'ensemble des solutions définies l'intervalle $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ de l'équation (1).

Posons $I = \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

1. Cherchons une solution φ_1 définie sur I de (1) sous la forme d'un polynôme de degré n.
   Alors le polynôme $(2X+1)\varphi_1''(X) + (4X-2)\varphi_1'(X) - 8\varphi_1(X)$ de degré inférieur ou égal à n et le coefficient de X^n est $(4n-8)a$ où a est le coefficient dominant de φ_1. Comme $a \neq 0$, si φ_1 est solution de (1) alors nécessairement $n = 2$. On cherche donc φ_1 sous la forme $\varphi_1(t) = at^2 + bt + c$ où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.
   Alors φ_1 est solution de (1) si et seulement si, pour tout $t \in I$,
   $$(2t+1)2a + (4t-2)(2at+b) - 8(at^2+bt+c) = 0,$$
   soit encore si et seulement si, pour tout $t \in I$,
   $$-4bt + 2a - 2b - 8c = 0,$$
   soit encore si et seulement si $b = 0$ et $a = 4c$.
   Donc φ_1, définie pour tout $t \in I$, par $\varphi_1(t) = 4t^2 + 1$ est une solution de (1) sous forme polynomiale.
2. Cherchons une solution φ_2 définie sur I de (1) sous la forme $\varphi_2(t) = \mathrm{e}^{\alpha t}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.
   Alors φ_2 est solution de (1) si et seulement si, pour tout $t \in I$,
   $$(2t+1)\alpha^2\mathrm{e}^{\alpha t} + (4t-2)\alpha^2\mathrm{e}^{\alpha t} - 8\mathrm{e}^{\alpha t} = 0,$$
   soit encore si et seulement si, pour tout $t \in I$,
   $$(2\alpha^2 + 4\alpha)t + \alpha^2 - 2\alpha - 8 = 0,$$
   soit encore si et seulement si $2\alpha(\alpha+2) = 0$ et $\alpha^2 - 2\alpha - 8 = 0$, soit encore si et seulement si $\alpha = -2$.
   Donc φ_2, définie pour tout $t \in I$, par $\varphi_2(t) = \mathrm{e}^{-2t}$ est une solution de (1) sous forme d'une exponentielle.
3. Calculons le wronskien en 0 de (φ_1, φ_2).
   On a $\omega(0) = \begin{vmatrix} \varphi_1(0) & \varphi_2(0) \\ \varphi_1'(0) & \varphi_2'(0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$
   Le wronskien en 0 de (φ_1, φ_2) est non nul, les solutions φ_1 et φ_2 sont donc indépendantes.
4. L'équation (1) étant une équation différentielle linéaire homogène scalaire d'ordre 2 à coefficients continus sur I, le coefficient de y'' ne s'annulant pas sur I, l'ensemble des solutions $\mathcal{S}$ définies sur I de (1) est un espace vectoriel de dimension 2. La famille (φ_1, φ_2) forme donc une base de solutions.
   D'où
   $$\mathcal{S} = \mathrm{vect}(\varphi_1, \varphi_2) = \left\{ I \longrightarrow \mathbb{R} \ ; \ t \longmapsto \lambda_1(4t^2+1) + \lambda_2\mathrm{e}^{-2t} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Exercice 2. Considérons l'équation différentielle

$$(1+t^2)y'' - 2y = 0. \tag{2}$$

1. (a) Par intégration par parties, calculer, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
   $$\int_0^t \frac{s^2}{(1+s^2)^2}\mathrm{d}s.$$

(b) En déduire, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\int_0^t \frac{1}{(1+s^2)^2} \mathrm{d}s.$$

2. Déterminer une solution définie sur $\mathbb{R}$ de l'équation (2) sous forme polynomiale.
3. En déduire l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation (2).

---

1. (a) Les applications $u : s \longmapsto s$ et $v : s \longmapsto -\frac{1}{2}\frac{1}{1+s^2}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ et de dérivée $u'(s) = 1$ et $v'(s) = \frac{s}{(1+s^2)^2}$.
Donc par intégration par parties, on obtient, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{s^2}{(1+s^2)^2}\mathrm{d}s &= \left[-s\frac{1}{2}\frac{1}{1+s^2}\right]_0^t + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{1+s^2}\mathrm{d}s \\ &= -\frac{t}{2(t^2+1)} + \frac{1}{2}\arctan(t).\end{aligned}$$

(b) Soit $t \in \mathbb{R}$.
$$\begin{aligned}\int_0^t \frac{1}{(1+s^2)^2}\mathrm{d}s &= \int_0^t \frac{1+s^2-s^2}{(1+s^2)^2}\mathrm{d}s \\ &= \int_0^t \frac{1}{1+s^2}\mathrm{d}s - \int_0^t \frac{s^2}{(1+s^2)^2}\mathrm{d}s \\ &= \arctan(t) + \frac{t}{2(t^2+1)} - \frac{1}{2}\arctan(t) \\ &= \frac{1}{2}\arctan(t) + \frac{1}{2}\frac{t}{t^2+1}.\end{aligned}$$

Remarque : On peut également calculer cette intégrale par le changement de variables « $s = \tan(u)$ ».

2. Cherchons une solution φ_1 définie sur $\mathbb{R}$ de (2) sous la forme d'un polynôme de degré n.
Alors le polynôme $(1+X^2)\varphi_1''(X) - 2\varphi_1(X)$ est de degré inférieur ou égal à n et le coefficient de X^n est $n(n-1)a - 2a = (n^2-n-2)a$ où a est le coefficient dominant de φ_1. Comme $a \neq 0$, si φ_1 est solution de (1) alors nécessairement $n = 2$ ou $n = -1$. On cherche donc φ_1 sous la forme $\varphi_1(t) = at^2 + bt + c$ où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.
Alors φ_1 est solution de (2) si et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$(1+t^2)2a - 2(at^2+bt+c) = 0,$$
soit encore si et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$-2bt + 2a - 2a = 0,$$
soit encore si et seulement si $b = 0$ et $a = c$.
Donc φ_1, définie pour tout $t \in \mathbb{R}$, par $\varphi_1(t) = t^2+1$ est une solution de (2) sous forme polynomiale.

3. Appliquons la méthode d'abaissement de l'ordre.
Soit $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une application deux fois dérivable. Posons, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\psi(t) = \frac{\varphi(t)}{\varphi_1(t)}$, de sorte que $\varphi(t) = \psi(t)\varphi_1(t) = \psi(t)(t^2+1)$. ψ est bien définie car φ_1 ne s'annule pas sur I et est deux fois dérivable.
On a donc, pour tout $t \in I$,
$$\varphi'(t) = \psi'(t)(t^2+1) + 2t\psi(t)$$
et
$$\varphi''(t) = \psi''(t)(t^2+1) + 4t\psi'(t) + 2\psi(t).$$
Donc φ est solution de (2) si et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$(1+t^2)^2\psi''(t) + 4t(1+t^2)\psi'(t) = 0,$$
soit encore, si et seulement si ψ' est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation
$$(1+t^2)y' + 4ty = 0. \tag{3}$$
Déterminons l'ensemble des solutions de cette équation différentielle linéaire scalaire homogène du premier ordre à coefficients continus, le coefficient de y' ne s'annule pas.
Une primitive de $t \longmapsto \frac{4t}{t^2+1}$ est $t \longmapsto t \longmapsto -2\ln(t^2+1) = \ln\left(\frac{1}{(1+t^2)^2}\right)$.
Donc l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de $(1+t^2)y' + 4ty = 0$ est
$$\mathcal{S}_1 = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \lambda\frac{1}{(1+t^2)^2} \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

Ainsi, φ est solution de (2) si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\psi'(t) = \lambda \frac{1}{(1+t^2)^2},$$

soit encore, si et seulement s'il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\psi(t) = \lambda_1 \left(\frac{1}{2} \arctan(t) + \frac{1}{2} \frac{t}{t^2+1} \right) + \lambda_2,$$

soit,

$$\varphi(t) = \lambda_1 \left(\frac{1}{2}(1+t^2) \arctan(t) + \frac{t}{2} \right) + \lambda_2(1+t^2).$$

D'où, l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de (2) est

$$\mathcal{S} = \left\{ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ ; \ t \longmapsto \lambda_1 \left(\frac{1}{2}(1+t^2) \arctan(t) + \frac{t}{2} \right) + \lambda_2(1+t^2) \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Exercice 3. En utilisant un changement de fonction inconnue $\varphi(t) = \psi(t)\varphi_1(t)$ où φ_1 est une fonction bien choisie, déterminer l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation suivante :

$$(1+\mathrm{e}^t)y'' + 2\mathrm{e}^t y' + (2\mathrm{e}^t + 1)y = t\mathrm{e}^t.$$

- Identification : Il s'agit d'une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2 à coefficients et second membre continus sur $\mathbb{R}$, le coefficient de y'' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. On sait donc que l'ensemble des solutions est un espace affine de dimension 2.
- Changement de fonction inconnue : Cherchons un changement de fonction inconnue qui conduit à une équation à coefficients constants.

  Soit $\varphi_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application deux fois dérivable qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application deux fois dérivable.

  Posons, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\psi(t) = \dfrac{\varphi(t)}{\varphi_1(t)}$ de sorte que $\varphi(t) = \psi(t)\varphi_1(t)$. ψ est bien définie et est deux fois dérivable comme quotient de deux fonctions deux fois dérivables.
  Alors

  $$\varphi'(t) = \psi'(t)\varphi_1(t) + \psi(t)\varphi_1'(t)$$

  et

  $$\varphi''(t) = \psi''(t)\varphi_1(t) + 2\psi'(t)\varphi_1'(t) + \psi(t)\varphi_1''(t).$$

  Donc φ est solution de l'équation si et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

  $$(1+\mathrm{e}^t)\varphi_1(t)\psi''(t) + \Big(2(1+\mathrm{e}^t)\varphi_1'(t) + 2\mathrm{e}^t\varphi_1(t)\Big)\psi'(t) + \Big((1+\mathrm{e}^t)\varphi_1''(t) + 2\mathrm{e}^t\varphi_1'(t) + (2\mathrm{e}^t+1)\varphi_1(t)\Big)\psi(t) = t\mathrm{e}^t.$$

  Ceci nous invite à choisir alors pour φ_1 la fonction $\varphi_1(t) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^t}$, fonction qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
  Alors

  $$(1+\mathrm{e}^t)\varphi_1(t) = 1,$$
  $$2(1+\mathrm{e}^t)\varphi_1'(t) + 2\mathrm{e}^t\varphi_1(t) = 0,$$

  et

  $$(1+\mathrm{e}^t)\varphi_1''(t) + 2\mathrm{e}^t\varphi_1'(t) + (2\mathrm{e}^t+1)\varphi_1(t) = 1.$$

  Donc φ est solution de l'équation si et seulement si ψ est solution de l'équation différentielle linéaire scalaire du deuxième ordre à coefficients constants

  $$y'' + y = t\mathrm{e}^t.$$

  Déterminons l'ensemble des solutions de l'équation $y'' + y = t\mathrm{e}^t$.
  L'ensemble des solutions de l'équation homogène est l'ensemble

  $$\left\{ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ ; \ t \longmapsto \lambda_1 \cos(t) + \lambda_2 \sin(t) \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

  On cherche une solution particulière de $y'' + y = t\mathrm{e}^t$ sous la forme $\varphi_p(t) = (at+b)\mathrm{e}^t$ ($\alpha = 1$ n'est pas racine de X^2+1.
  Après calculs, on trouve $a = \dfrac{1}{2}$ et $b = -\dfrac{1}{2}$. Donc φ_p définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par $\varphi_p(t) = \dfrac{1}{2}(t-1)\mathrm{e}^t$ est une solution particulière de $y'' + y = t\mathrm{e}^t$.
  Donc l'ensemble des solutions de l'équation $y'' + y = t\mathrm{e}^t$ est

  $$\left\{ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \ ; \ t \longmapsto \lambda_1 \cos(t) + \lambda_2 \sin(t) + \frac{1}{2}(t-1)\mathrm{e}^t \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

  Ainsi, φ est solution de l'équation si et seulement s'il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

  $$\psi(t) = \lambda_1 \cos(t) + \lambda_2 \sin(t) + \frac{1}{2}(t-1)\mathrm{e}^t,$$

  soit

  $$\varphi(t) = \lambda_1 \frac{\cos(t)}{1+\mathrm{e}^t} + \lambda_2 \frac{\sin(t)}{1+\mathrm{e}^t} + \frac{1}{2}(t-1)\frac{\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^t}.$$

– Conclusion : L'ensemble des solutions de l'équation est donc

$$\mathcal{S} = \left\{ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; t \longmapsto \lambda_1 \frac{\cos(t)}{1+\mathrm{e}^t} + \lambda_2 \frac{\sin(t)}{1+\mathrm{e}^t} + \frac{1}{2}(t-1)\frac{\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^t} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Exercice 4. Considérons l'équation différentielle

$$y'' + q(t)y = 0, \tag{4}$$

où q est une application de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ continue et intégrable.

1. Soit φ une solution bornée de l'équation (4) définie sur $\mathbb{R}_+$. Montrer que φ' tend vers 0 en l'infini.
2. Montrer que le wronskien de deux solutions de l'équation (4) est constant.
3. En déduire que l'équation (4) admet des solutions définies sur $\mathbb{R}_+$ non bornées.

---

1. Soit φ une solution bornée de l'équation (4). Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a
$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \varphi'(0) + \int_0^t \varphi''(s)\mathrm{d}s \\ &= \varphi'(0) - \int_0^t q(s)\varphi(s)\mathrm{d}s. \end{aligned}$$
Or, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$0 \leq |q(t)\varphi(t)| \leq \|\varphi\|_\infty |q(t)|$$
et $|q|$ est une application intégrale sur $\mathbb{R}_+$.
Donc, par comparaison de fonctions positives, $t \longmapsto |\varphi(t)q(t)|$ est intégrable, et donc $t \longmapsto \varphi(t)q(t)$ est intégrable.
Donc $\varphi'(t)$ tend vers $\ell = \varphi'(0) - \int_0^{+\infty} q(s)\varphi(s)\mathrm{d}s$ lorsque t tend vers $+\infty$.
Supposons $\ell \neq 0$. Quitte à prendre $-\varphi$, également bornée, on peut supposer que $\ell > 0$. Alors $0 \leq \varphi'(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \ell$ et $t \longmapsto \ell$ étant non intégrable au voisinage de $+\infty$, on en déduit que
$$\int_0^t \varphi'(s)\mathrm{d}s \underset{t\to+\infty}{\sim} \int_0^t \ell\mathrm{d}s = \ell t.$$
Donc $\varphi(t) = \varphi(0) + \int_0^t \varphi'(s)\mathrm{d}s \underset{t\to+\infty}{\sim} \ell t$. Donc φ tend vers $+\infty$ en $+\infty$, ce qui contredit son caractère borné.
Donc $\ell = 0$ et φ' tend vers 0 en l'infini.
2. Soient (φ_1, φ_2) deux solutions de l'équation (4) définies sur $\mathbb{R}+$.
On a, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,
$$\omega(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) \end{vmatrix} = \varphi_1(t)\varphi_2'(t) - \varphi_1'(t)\varphi_2(t).$$
φ_1 et φ_2 étant de classe $\mathcal{C}^2$, ω est dérivable et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,
$$\begin{aligned} \omega'(t) &= \varphi_1(t)\varphi_2''(t) - \varphi_1''(t)\varphi_2(t) \\ &= \varphi_1(t)(-q(t)\varphi_2(t)) - (-q(t)\varphi_1(t))\varphi_2(t) \\ &= 0. \end{aligned}$$
Donc ω étant continue de dérivée nulle sur $\mathbb{R}_+$, ω est constant.
Le wronskien de deux solutions de (4) est donc constant.
3. Soient φ_1 et φ_2 deux solutions bornées sur $\mathbb{R}_+$ de (4). D'après la question précédente, leur wronskien ω est constant.
De plus, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\omega(t) = \varphi_1(t)\varphi_2'(t) - \varphi_1'(t)\varphi_2(t)$. Or, pour $i \in \{1, 2\}$, φ_i est bornée et φ_i' tend vers 0 en $+\infty$.
Donc $\omega(t) = \varphi_1(t)\varphi_2'(t) - \varphi_1'(t)\varphi_2(t)$ tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$.
Donc ω est l'application nulle.
Les solutions φ_1 et φ_2 ne sont donc pas indépendantes.
Donc l'ensemble des solutions bornées sur $\mathbb{R}_+$ est donc un sous-espace vectoriel de l'ensemble des solutions de (4) de dimension au plus 1.
L'équation (4) étant linéaire d'ordre 2 homogène à coefficients continues sous forme résolue, l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}_+$ de (4) est de dimension 2 et il existe donc des solutions non bornées.