Feuille de TD n$^{\text{o}}$ 6

Équations différentielles

26 octobre 2020

Exercice 1.

1. Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle
$$t^2y'' - 2ty' + 2y = t^2. \tag{E_{1a}}$$
On pourra effectuer le changement de variables « $x = \ln(t)$ ».
2. Résoudre sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ l'équation différentielle
$$y'' + \tan(t)y' - \cos^2(t)y = 0. \tag{E_{1b}}$$
On pourra effectuer le changement de variables « $x = \sin(t)$ ».

Exercice 2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle
$$(t+1)^2y'' - 2(t+1)y' + 2y = 0. \tag{E_2}$$
On pourra commencer par rechercher des solutions polynomiales.

Exercice 3. On considère l'équation différentielle
$$ty'' - y' - t^3y = 0. \tag{E_3}$$

1. Montrer que φ est solution sur I de l'équation (E_3) si et seulement si $t \longmapsto \varphi(-t)$ est solution de l'équation (E_3) sur I', symétrique de I par rapport à 0.
2. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation (E_3). *On pourra effectuer le changement de variables « $x = t^2$ ».*
3. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E_3).

Exercice 4. On considère l'équation différentielle
$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, \tag{E_4}$$
où p et q sont des applications continues d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs réelles. Soit (f, g) une base de solutions sur I de l'équation (E_4).

1. Montrer que les zéros de f sont isolés, c'est-à-dire que tout zéro z de f admet un voisinage qui ne contient pas d'autres zéros de f que z.
On dit que z est un zéro de f si $f(z) = 0$. Un zéro z_0 de f est donc isolé s'il existe un voisinage V de z_0 tel que pour tout $z \in V \cap I$ distinct de z_0 $(z \neq z_0)$, $f(z) \neq 0$.
2. En déduire que f n'admet qu'un nombre fini de zéros sur tout segment de I.
3. Montrer que le le wronskien de f et g garde un signe constant.
4. Montrer qu'entre deux zéros consécutifs de f, il existe un unique zéro de g.

Indications

Les trois premiers exercices sont des variantes des exemples du cours.

Exercice 4

1. Soit z_0 un zéro de f, c'est-à-dire $f(z_0) = 0$.
   Justifier que $f'(z_0) \neq 0$.
   Quel argument permet d'en déduire que $f' > 0$ sur un petit voisinage de z_0 ?
   Conclure.
2. Par l'absurde, supposer que f admet un nombre infini de zéros dans un segment $[a, b]$. On peut donc construire une suite de zéros distincts de f dans $[a, b]$. Justifier que l'on peut trouver une sous-suite qui converge vers un zéro de f. Conclure à une contradiction.
3. Cours.
4. Soient t_1 et t_2 deux zéros consécutifs de f $(t_1 < t_2)$.
   On montre que g s'annule au moins une fois (on pensera à utiliser le wronskien) : Par l'absurde, supposer que g ne s'annule pas sur $]t_1, t_2[$. Justifier que $g(t_1) \neq 0$ et $g(t_2) \neq 0$. Considérer l'application $h = \dfrac{f}{g}$ sur $[t_1, t_2]$. Montrer qu'elle est strictement monotone et conclure à une contradiction.
   Déduire du point précédent que g ne peut pas s'annuler plus d'une fois. (par l'absurde).