Corrigé du TD n° 6

Équations différentielles

26 octobre 2020

Exercice 1.

1. Résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle
$$t^2y'' - 2ty' + 2y = t^2. \tag{E_{1a}}$$
On pourra effectuer le changement de variables « $x = \ln(t)$ ».
2. Résoudre sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ l'équation différentielle
$$y'' + \tan(t)y' - \cos^2(t)y = 0. \tag{E_{1b}}$$
On pourra effectuer le changement de variables « $x = \sin(t)$ ».

---

1. – Identification : Il s'agit d'une équation différentielle linéaire scalaire homogène du deuxième ordre à coefficients continus sur $\mathbb{R}_+^*$, le coefficient t^2 de y'' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$.

 – Changement de variables : *Comme* ln *est un* $\mathcal{C}^2$*-difféomorphisme de* $\mathbb{R}_+^*$ *sur* $\mathbb{R}$*, on peut effectuer le changement de variables « $x = \ln(t)$ ».*

 Soit $\varphi : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ une application deux fois dérivable. Posons, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\psi(x) = \varphi(\exp(x))$ de sorte que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi(t) = \psi(\ln(t))$. ψ est bien définie et est deux fois dérivables comme φ et exp le sont.
 Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,
$$\varphi'(t) = \frac{1}{t}\psi'(\ln(t))$$
 et
$$\varphi''(t) = -\frac{1}{t^2}\psi'(\ln(t)) + \frac{1}{t^2}\psi''(\ln(t)).$$
 Donc φ est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de (E_{1a}) si et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,
$$\psi''(\ln(t)) - 3\psi'(\chi(t)) + 2\psi(\chi(t)) = t^2.$$
 ln étant bijective de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$, de bijection réciproque exp, on en déduit que φ est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de (E_{1a}) si et seulement si, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\psi''(x) - 3\psi'(x) + 2\psi(x) = \mathrm{e}^{2x},$$
 soit encore, si et seulement si ψ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle
$$y'' - 3y' + 2y = \mathrm{e}^{2x}.$$
 L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y'' - 3y' + 2y = 0$ est
$$\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \lambda_1\mathrm{e}^x + \lambda_2\mathrm{e}^{2x} \mid (\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}.$$
 On peut chercher une solution particulière de $y'' - 3y' + 2y = \mathrm{e}^{2x}$ sous la forme $\varphi_p(x) = ax\mathrm{e}^{2x}$ où $a \in \mathbb{R}$. Après calculs, on trouve $a = 1$ et $\varphi_p(x) = x\mathrm{e}^{2x}$.
 Donc l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de $y'' - 3y' + 2y = \mathrm{e}^{2x}$ est l'ensemble
$$\left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ x \longmapsto \lambda_1\mathrm{e}^x + \lambda_2\mathrm{e}^{2x} + x\mathrm{e}^{2x} \mid (\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$
 Ainsi, φ est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de (E_{1a}) si et seulement s'il existe $(\lambda_1,\lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\psi(x) = \lambda_1\mathrm{e}^x + \lambda_2\mathrm{e}^{2x} + x\mathrm{e}^{2x},$$
 soit, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,
$$\varphi(t) = \lambda_1 t + \lambda_2 t^2 + t^2\ln(t).$$

– Conclusion : L'ensemble des solutions de (E_{1a}) est donc

$$\mathcal{S} = \left\{ \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \lambda_1 t + \lambda_2 t^2 + t^2 \ln(t) \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

2. – Identification : Il s'agit d'une équation différentielle linéaire scalaire homogène du deuxième ordre à coefficients continus sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

– Changement de variables : *Comme* $\sin$ *est un* $\mathcal{C}^2$*-difféomorphisme de* $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ *sur* $]-1,1[$*, on peut effectuer le changement de variables « $x = \sin(t)$ ».*

Soit $\varphi : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$ une application deux fois dérivable. Posons, pour tout $x \in]-1,1[$, $\psi(x) = \varphi(\arcsin(x))$ de sorte que, pour tout $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\varphi(t) = \psi(\sin(t))$. ψ est bien définie et est deux fois dérivables comme φ l'est sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ et arcsin l'est sur $]-1,1[$.

Alors, pour tout $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$,

$$\varphi'(t) = \cos(t)\psi'(\sin(t))$$

et

$$\varphi''(t) = -\sin(t)\psi'(\sin(t)) + \cos^2(t)\psi''(\sin(t)).$$

Donc φ est solution sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ de (E_{1b}) si et seulement si, pour tout $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$,

$$\cos^2(t)\psi''(\sin(t)) - \cos^2(t)\psi(\sin(t)) = 0,$$

soit, cos ne s'annulant pas sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, si et seulement si, pour tout $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$,

$$\psi''(\sin(t)) - \psi(\sin(t)) = 0.$$

sin étant bijective de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $]-1,1[$, on en déduit que φ est solution sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ de (E_{1b}) si et seulement si, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\psi''(x) - \psi(x) = 0,$$

soit encore, si et seulement si ψ est solution sur $]-1,1[$ de l'équation différentielle

$$y'' - y = 0.$$

Ainsi, φ est solution sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ de (E_{1b}) si et seulement s'il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\psi(x) = \lambda_1 \mathrm{e}^{x} + \lambda_2 \mathrm{e}^{-x},$$

soit, pour tout $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$,

$$\varphi(t) = \lambda_1 \mathrm{e}^{\sin(t)} + \lambda_2 \mathrm{e}^{-\sin(t)}.$$

– Conclusion : L'ensemble des solutions sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ de (E_{1b}) est donc

$$\mathcal{S} = \left\{ \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \lambda_1 \mathrm{e}^{\sin(t)} + \lambda_2 \mathrm{e}^{-\sin(t)} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Exercice 2. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(t+1)^2 y'' - 2(t+1)y' + 2y = 0. \qquad (E_2)$$

On pourra commencer par rechercher des solutions polynomiales.

— Identification : Il s'agit d'une équation différentielle linéaire scalaire homogène d'ordre 2, sous forme non résolue dont le coefficient $(t+1)^2$ de y'' s'annule en -1. On ne peut donc rien dire sur la dimension de l'espace vectoriel des solutions sur $\mathbb{R}$.

— Résolution de (E_2) sur les intervalles de non annulation de $(t+1)^2$. Posons $I_1 =]-\infty, -1[$ et $I_2 =]-1, +\infty[$.
Soit $i \in \{1, 2\}$. Cherchons une solution φ définie sur I de (E_2) sous la forme d'un polynôme de degré n.
Alors le polynôme $(X+1)^2\varphi_1''(X) - 2(X+1)\varphi_1'(X) + 2\varphi_1(X)$ est de degré inférieur ou égal à n et le coefficient de X^n est $(n(n-1) - 2n - 2)a = (n-1)(n-2)a$ où a est le coefficient dominant de φ. Comme $a \neq 0$, si φ est solution de (E_2) alors nécessairement $n = 1$ ou $n = 2$. On cherche donc φ sous la forme $\varphi(t) = at^2 + bt + c$ où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.
Alors φ est solution de (E_2) si et seulement si $2a - 2b + 2c = 0$.
En choisissant $(a, b) = (1, 0)$ et $(a, b) = (0, 1)$, on obtient deux solutions $\varphi_1(t) = t^2 - 1$ et $\varphi_2(t) = t + 1$. Ces solutions sont indépendantes car pour tout $t \in I$, $\omega(t) = -(t+1)^2 \neq 0$.
Donc l'ensemble des solutions sur I_i est

$$\mathcal{S}_i = \left\{ I_i \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \lambda_1(t^2 - 1) + \lambda_2(t+1) \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

— Résolution sur $\mathbb{R}$.

— Raccordement des solutions en -1.
Soit φ une solution de (E_2) sur $\mathbb{R}$. D'après le point précédent, il existe donc $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$\varphi(t) = \begin{cases} \lambda_1(t^2-1) + \lambda_2(t+1) \text{ si } t > -1, \\ \lambda_3(t^2-1) + \lambda_4(t+1) \text{ si } t < -1. \end{cases}$$

φ étant continue en -1, on a $\lim_{t\to -1^+} \varphi(t) = \lim_{t\to -1^-} \varphi(t) = \varphi(-1)$.

Or

$$\varphi(t) = \begin{cases} \lambda_1(t^2-1) + \lambda_2(t+1) & \xrightarrow[t\to -1^+]{} 0 \\ \lambda_3(t^2-1) + \lambda_4(t+1) & \xrightarrow[t\to -1^-]{} 0 \end{cases}$$

Donc φ est continue en -1 et $\varphi(-1) = 0$.
Donc nécessairement, φ est définie par

$$\varphi(t) = \begin{cases} \lambda_1(t^2-1) + \lambda_2(t+1) \text{ si } t \geq -1, \\ \lambda_3(t^2-1) + \lambda_4(t+1) \text{ si } t < -1. \end{cases} \tag{1}$$

– Étude réciproque : Réciproquement, soient $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ et soit $\varphi_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda,\lambda_4}$ l'application donnée par (1).
Étudions la dérivabilité à l'ordre 1 et 2 de $\varphi_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda,\lambda_4}$ et regardons si elle vérifie l'équation (E_2) sur $\mathbb{R}$.
La restriction de $\varphi_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4}$ aux intervalles ouverts I_1 et I_2 est dérivable à l'ordre 2, donc $\varphi_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4}$ est dérivable à l'ordre 2 sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et vérifie l'équation différentielle (E_2) en tout point de $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
On a

$$\varphi'_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda,\lambda_4}(t) = \begin{cases} 2t\lambda_1 + \lambda_2 & \xrightarrow[t\to -1^+]{} -2\lambda_1 + \lambda_2 \\ 2t\lambda_3 + \lambda_4 & \xrightarrow[t\to -1^-]{} -2\lambda_3 + \lambda_4 \end{cases}.$$

Donc, $\varphi_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda,\lambda_4}$ est dérivable en -1 si et seulement si $-2\lambda_1+\lambda_2 = -2\lambda_3+\lambda_4$, et dans ce cas $\varphi'_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda,\lambda_4}(-1) = -2\lambda_1 + \lambda_2$.
On a également

$$\varphi''_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda,\lambda_4}(t) = \begin{cases} 2\lambda_1 & \xrightarrow[t\to -1^+]{} 2\lambda_1 \\ 2\lambda_2 & \xrightarrow[t\to -1^-]{} 2\lambda_3 \end{cases}.$$

Donc $\varphi_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda,\lambda_4}$ est deux fois dérivable en -1 si et seulement si $-2\lambda_1 + \lambda_2 = -2\lambda_3 + \lambda_4$ et $\lambda_1 = \lambda_3$, soit encore, si et seulement si $\lambda_1 = \lambda_3$ et $\lambda_2 = \lambda_4$, et dans ce cas, $\varphi''_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda,\lambda_4}(-1) = 2\lambda_1$.

On a alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_1,\lambda_2}(t) = \lambda_1(t+1) + \lambda_2(t^2-1)$ et

$$(-1+1)^2\varphi''_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_1,\lambda_2}(-1) - 2(-1+1)\varphi'_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_1,\lambda_2}(-1) + 2\varphi_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_1,\lambda_2}(-1) = 0.$$

Donc $\varphi_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_1,\lambda_2}$ est solution en -1 et donc sur $\mathbb{R}$.

– Conclusion : L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de $t^2y'' - 2y = t^4$ est donc

$$\mathcal{S} = \left\{ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,;\, t \longmapsto \lambda_1(t^2-1) + \lambda_2(t+1) \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 3. On considère l'équation différentielle

$$ty'' - y' - t^3y = 0. \tag{E_3}$$

1. Montrer que φ est solution sur I de l'équation (E_3) si et seulement si $t \longmapsto \varphi(-t)$ est solution de l'équation (E_3) sur I', symétrique de I par rapport à 0.
2. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation (E_3). *On pourra effectuer le changement de variables « $x = t^2$ ».*
3. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E_3).

---

1. Notons $I = [a, b]$, où a et b sont des réels. Alors $I' = [-b, -a]$.
Pour toute application définie sur I, posons $\tilde{\varphi} : I' \longrightarrow \mathbb{R}\,;\, t \longmapsto \varphi(-t)$. $\tilde{\varphi}$ est bien définie car si $t \in I'$ alors $-t \in I$ et φ est définie sur I.
Alors, pour tout $t \in I'$, $\tilde{\varphi}'(t) = -\varphi'(-t)$ et $\tilde{\varphi}''(t) = \varphi''(-t)$.
Donc φ est solution sur I de (E_3) si et seulement si, pour tout $t \in I$,
$$t\varphi''(t) - \varphi'(t) - t^3\varphi(t) = 0,$$
soit si et seulement si, pour tout $t \in I'$,
$$(-t)\varphi''(-t) - \varphi'(-t) - (-t)^3\varphi(-t) = 0,$$
soit encore si et seulement si, pour tout $t \in I'$,
$$-t\tilde{\varphi}''(t) + \tilde{\varphi}'(t) + t^3\tilde{\varphi}(t) = 0,$$
soit finalement, si et seulement si $\tilde{\varphi}$ est solution sur I' de (E_3).

2. – Identification : Il s'agit d'une équation différentielle linéaire scalaire homogène du deuxième ordre à coefficients continus sur $\mathbb{R}_+^*$, le coefficient de y'' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$.

– Changement de variables : *Comme $t \longmapsto t^2$ est un $\mathcal{C}^2$-difféomorphisme de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on peut effectuer le changement de variables « $x = t^2$ ».*

Soit $\varphi : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ une application deux fois dérivable. Posons, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\psi(x) = \varphi\left(\sqrt{x}\right)$ de sorte que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi(t) = \psi\left(t^2\right)$. ψ est bien définie et est deux fois dérivables comme φ et $\sqrt{\cdot}$ le sont sur $\mathbb{R}_+^*$. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\varphi'(t) = 2t\psi'\left(t^2\right)$$

et

$$\varphi''(t) = 2\psi'\left(t^2\right) + 4t^2\psi''\left(t^2\right).$$

Donc φ est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de (E_3) si et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$4t^3\psi''\left(t^2\right) - t^3\psi\left(t^2\right) = 0,$$

soit encore, puisque t est non nul sur $\mathbb{R}_+^*$, si et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$4\psi''(t^2) - \psi(t^2) = 0.$$

$t \longmapsto t^2$ étant bijective de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que φ est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de (E_3) si et seulement si ψ est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle

$$4y'' - y = 0.$$

Ainsi, φ est solution sur $\mathbb{R}_+$ de (E_3) si et seulement s'il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\psi(x) = \lambda_1 e^{\frac{1}{2}x} + \lambda_2 e^{-\frac{1}{2}x},$$

soit, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\varphi(t) = \lambda_1 e^{\frac{1}{2}t^2} + \lambda_2 e^{-\frac{1}{2}t^2}.$$

— Conclusion : L'ensemble des solutions de (E_3) est donc

$$\mathcal{S} = \left\{\mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \lambda_1 e^{\frac{1}{2}t^2} + \lambda_2 e^{-\frac{1}{2}t^2} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

3. — Identification : Il s'agit d'une équation différentielle linéaire scalaire homogène d'ordre 2, sous forme non résolue dont le coefficient t de y'' s'annule en 0. On ne peut donc rien dire sur la dimension de l'espace vectoriel des solutions sur $\mathbb{R}$.

— Résolution de (E_3) sur les intervalles de non annulation de t.

D'après la question précédente, l'ensemble des solutions de (E_3) sur $\mathbb{R}_+^*$ est

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}_+^*} = \left\{\mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \lambda_1 e^{\frac{1}{2}t^2} + \lambda_2 e^{-\frac{1}{2}t^2} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

D'après la question 1., φ est solution sur $\mathbb{R}_-^*$ de (E_3) si et seulement si $t \longmapsto \varphi(-t)$ est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de (E_3), soit si et seulement s'il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\varphi(-t) = \lambda_1 e^{\frac{1}{2}t^2} + \lambda_2 e^{-\frac{1}{2}t^2},$$

soit, puisque $(-t)^2 = t^2$, si et seulement si pour tout $t \in \mathbb{R}_-^*$,

$$\varphi(t) = \lambda_1 e^{\frac{1}{2}t^2} + \lambda_2 e^{-\frac{1}{2}t^2}.$$

Donc l'ensemble des solutions de (E_3) sur $\mathbb{R}_-^*$ est

$$\mathcal{S}_{\mathbb{R}_-^*} = \left\{\mathbb{R}_-^* \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \lambda_1 e^{\frac{1}{2}t^2} + \lambda_2 e^{-\frac{1}{2}t^2} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

— Résolution sur $\mathbb{R}$.

– Raccordement au point 0 : Soit φ une solution de (E_3) sur $\mathbb{R}$. D'après le point précédent, il existe donc $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$\varphi(t) = \begin{cases} \lambda_1 e^{\frac{1}{2}t^2} + \lambda_2 e^{-\frac{1}{2}t^2} & \text{si } t > 0, \\ \lambda_3 e^{\frac{1}{2}t^2} + \lambda_4 e^{-\frac{1}{2}t^2} & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

φ étant continue en 0, on a $\lim\limits_{t \to 0^+} \varphi(t) = \lim\limits_{t \to 0^-} \varphi(t) = \varphi(0)$.

Or

$$\varphi(t) = \begin{cases} \lambda_1 e^{\frac{1}{2}t^2} + \lambda_2 e^{-\frac{1}{2}t^2} & \xrightarrow[t \to 0^+]{} \lambda_1 + \lambda_2 \\ \lambda_3 e^{\frac{1}{2}t^2} + \lambda_4 e^{-\frac{1}{2}t^2} & \xrightarrow[t \to 0^-]{} \lambda_3 + \lambda_4. \end{cases}$$

Donc φ est continue en 0 si et seulement si $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_3 + \lambda_4$, et dans ce cas, $\varphi(0) = \lambda_1 + \lambda_2$.

Donc nécessairement, φ est définie par

$$\varphi(t) = \begin{cases} \lambda_1 e^{\frac{1}{2}t^2} + \lambda_2 e^{-\frac{1}{2}t^2} & \text{si } t \geq 0, \\ \lambda_3 e^{\frac{1}{2}t^2} + \lambda_4 e^{-\frac{1}{2}t^2} & \text{si } t < 0, \end{cases} \tag{2}$$

avec $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_3 + \lambda_4$.

– Étude réciproque : Réciproquement, soient $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ tel que $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_3 + \lambda_4$ et soit $\varphi_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4}$ l'application donnée par (2). Étudions la dérivabilité à l'ordre 1 et 2 de $\varphi_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4}$ et regardons si elle vérifie l'équation (E_3) sur $\mathbb{R}$.

La restriction de $\varphi_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4}$ aux intervalles ouverts $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ est dérivable à l'ordre 2, donc $\varphi_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4}$ est dérivable à l'ordre 2 sur $\mathbb{R}^*$ et vérifie l'équation différentielle (E_3) en tout point de $\mathbb{R}^*$.

On a

$$\varphi'_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4}(t) = \begin{cases} \lambda_1 t e^{\frac{1}{2}t^2} - \lambda_2 t e^{-\frac{1}{2}t^2} & \xrightarrow[t \to 0^+]{} 0 \\ \lambda_3 t e^{\frac{1}{2}t^2} - \lambda_4 t e^{-\frac{1}{2}t^2} & \xrightarrow[t \to 0^-]{} 0 \end{cases}.$$

Donc, les deux limites étant égales, $\varphi_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4}$ est dérivable en 0, de dérivée $\varphi'_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4}(0) = 0$.

On a également

$$\varphi''_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4}(t) = \begin{cases} \lambda_1(1+t^2)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}t^2} + \lambda_2(-1+t^2)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2} & \xrightarrow[t \to 0^+]{} \lambda_1 - \lambda_2 \\ \lambda_3(1+t^2)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}t^2} + \lambda_4(-1+t^2)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2} & \xrightarrow[t \to 0^-]{} \lambda_3 - \lambda_4 \end{cases}.$$

Donc $\varphi_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4}$ est deux fois dérivable en 0 si et seulement si $\lambda_1 - \lambda_2 = \lambda_3 - \lambda_4$, et dans ce cas, $\varphi''_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4}(0) = \lambda_1 - \lambda_2$.

Comme $\lambda_1 + \lambda_2 = \lambda_3 + \lambda_4$, φ est deux fois dérivable en 0 si et seulement si $\lambda_1 = \lambda_3$ et $\lambda_2 = \lambda_4$.

On a donc pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4}(t) = \lambda_1 \mathrm{e}^{\frac{1}{2}t^2} + \lambda_2 \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2}$ et

$$0\varphi''_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4}(0) - \varphi'_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4}(0) - 0^3\varphi_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4}(0) = 0.$$

Donc $\varphi_{\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4}$ est solution en 0 et donc sur $\mathbb{R}$.

– Conclusion : L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de $t^2y'' - 2y = t^4$ est donc

$$\mathcal{S} = \left\{ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; t \longmapsto \lambda_1 \mathrm{e}^{\frac{1}{2}t^2} + \lambda_2 \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t^2} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Exercice 4. On considère l'équation différentielle

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, \tag{E_4}$$

où p et q sont des applications continues d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs réelles. Soit (f, g) une base de solutions sur I de l'équation (E_4).

1. Montrer que les zéros de f sont isolés, c'est-à-dire que tout zéro z de f admet un voisinage qui ne contient pas d'autres zéros de f que z.
2. En déduire que f n'admet qu'un nombre fini de zéros sur tout segment de I.
3. Montrer que le le wronskien de f et g garde un signe constant.
4. Montrer qu'entre deux zéros consécutifs de f, il existe un unique zéro de g.

---

1. Soit z_0 un zéro de f. Alors $f'(z_0) \neq 0$. En effet, supposons que $f'(z_0) = 0$ alors f est solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \\ y(z_0) = 0 \\ y'(z_0) = 0. \end{cases}$$

Or l'application nulle est également solution de ce problème de Cauchy. Donc, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz pour les équation linéaires scalaires d'ordre 2 à coefficients continus (p et q le sont), par unicité de la solution, f est l'application nulle, ce qui est absurde.

Quitte à considérer $-f$, supposons $f'(z_0) > 0$. Comme f' est dérivable, f' est continue. Il existe donc $\eta \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $x \in]z_0 - \eta, z_0 + \eta[\cap I$, $f'(x) > 0$. Alors f' est strictement croissante sur cet intervalle et ne s'annule qu'en z_0. Ainsi, z_0 est un zéro isolé de f.

2. Soit $[a, b]$ un segment de I. Supposons que f admette un nombre infini de zéros sur $[a, b]$.
On peut donc construire une suite $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de zéros de f dans $[a, b]$ deux à deux distincts. $[a, b]$ étant compact, on peut extraire une sous-suite $(z_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers un élément $z \in [a, b]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(z_n) = 0$ donc par continuité de f, en laissant tendre n vers $+\infty$, on a $f(z) = 0$. Donc z est un zéro de f. Comme $(z_{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers z, dans tout voisinage de z, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $z_{\varphi(n_0)}$, zéro de f, appartient à ce voisinage. Ceci est absurde car d'après la question 1, les zéros de f sont isolés.

3. (f, g) étant une base de solutions, on sait que le wronskien ω ne s'annule pas sur I. f et g étant de 2 fois dérivables, $\omega = fg' - f'g$ est continu, et garde donc un signe constant.

4. Soit t_1 et t_2 deux zéros consécutifs de f. Supposons que g ne s'annule pas sur $]t_1, t_2[$. Pour tout $t \in [t_1, t_2]$, on a $\omega(t) = f(t)g'(t) - f'(t)g(t)$. Donc en particulier, $\omega(t_1) = -f'(t_1)g(t_1)$ et $\omega(t_2) = -f'(t_2)g(t_2)$. Le wronskien ne s'annulant pas sur $[t_1, t_2]$, on en déduit que $g(t_1) \neq 0$ et $g(t_2) \neq 0$. Donc g ne s'annule pas sur $[t_1, t_2]$.

   Posons $h = \dfrac{f}{g}$, définie sur $[t_1, t_2]$. Comme f et g sont dérivables, h l'est et $h' = -\dfrac{\omega}{g^2}$. ω étant de signe constant d'après la question précédente et g^2 étant de signe positif, h' est de signe constant et h est donc strictement monotone sur $[t_1, t_2]$. Or $h(t_1) = h(t_2) = 0$, ce qui est absurde.

   Donc g s'annule au moins une fois sur l'intervalle $]t_1, t_2[$.

   Supposons que g s'annule au moins deux fois sur l'intervalle $]t_1, t_2[$. Les fonctions f et g jouant le même rôle, d'après ce qui précède, f s'annule entre deux zéros de g, ce qui contredit le fait que t_1 et t_2 soient deux zéros consécutifs de f.

   Donc g s'annule une seule fois sur $]t_1, t_2[$.

   On a donc montré qu'entre deux zéros consécutifs de f, il existe un unique zéro de g.