Ex1 :

$$M(a,b,c) = \begin{pmatrix} a+c & b & c \\ b & a+2c & b \\ c & b & a+c \end{pmatrix} = aI_3 + b\underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{J} + c\left(\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{K}\right)$$

$\{M(a,b,c),\ a,b,c \in \mathbb{K}\} = \mathrm{vect}(I_3, J, K)$.

$M(a,b,c) = 0$: $b = m_{2,1} = 0$ $c = m_{3,1} = 0$ $a = m_{1,1} = 0$

d'où $a = b = c = 0$ et donc (I_3, J, K) est libre :

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = K$$

Si $D = P^{-1} J P$ D matrice diagonale :

$D^2 = P^{-1} J P P^{-1} J P = P^{-1} J^2 P = P^{-1} K P$

et ainsi $P^{-1} M(a,b,c) P = a P^{-1} I_3 P + b P^{-1} J P + c P^{-1} J^2 P$

$$= a I_3 + b D + c D^2$$

On étudie $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $J^2 = K$

$$J^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2J$$

$J^3 = 2J$ si X vecteur propre de valeur propre λ

$$J^3 X = J^2 J X = J^2 \lambda X = J(\lambda J X)$$

$$= \lambda^2 J X = \lambda^3 X$$

$$= 2\lambda X$$

$\lambda = 0$ ou $\sqrt{2}$ ou $-\sqrt{2}$

$\ker J$ $\quad \operatorname{rg} 2 = 2$ car $\det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -1 \neq 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \ker J$$

$$\dim \ker J = 1 \Rightarrow \ker J = \mathbb{K} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$\ker\left(J - \sqrt{2} I_3\right) \qquad \operatorname{rg}(J - \sqrt{2} I_3) = 2$ $\quad \det \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0$

$$\begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \in \ker J - \sqrt{2} I_3$$

$$\ker\left(J - \sqrt{2} I_3\right) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\ker\left(J+\sqrt{2}\,I_3\right)$$

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \in \ker\left(J+\sqrt{2}\,I_3\right)$$

$$E_0 = \mathbb{K}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad E_{\sqrt{2}} = \mathbb{K}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} \qquad E_{-\sqrt{2}} = \mathbb{K}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ On sait que $$P^{-1} J P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} M(a,b,c)\, P = a\, I_3 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & b\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2}\,b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2c & 0 \\ 0 & 0 & -2c \end{pmatrix}.$$

Ex2 $\lambda \in \operatorname{Spec} u \circ v$ $\quad u, v \in \mathcal{L}(E)$.

But : $\lambda \in \operatorname{Spec} v \circ u$

1) $\lambda \in \operatorname{Spec} u \circ v$ et $\lambda \neq 0$. Alors il existe $x \overset{\neq 0}{\in} E$ tq

$u \circ v(x) = \lambda x \Rightarrow v \circ u \circ v(x) = \lambda v(x)$

$v(x) = y$ tq $\quad v \circ u(y) = \lambda y \underset{\text{car } y \neq 0 \text{ car sinon } \lambda x = 0}{\boxed{\Rightarrow}} \lambda \in \operatorname{Spec} v \circ u$.

2) Si $\lambda = 0$, $\quad 0 \in \operatorname{Spec} u \circ v$ et $\dim E = n$.

On obtient $\det u \circ v = 0 = \det u \det v = \det v \circ u$

d'où $\exists\, x \neq 0$ tq $v \circ u(x) = 0$ et $0 \in \operatorname{Spec} v \circ u$

3) $u(P) = P'$ $\quad v(P) = \int_0^X P(t)\, dt$ $\quad E = \mathbb{R}[X]$

$u \circ v = u\left(\int_0^X P(t)\, dt\right) = P$, $\quad u \circ v = id_E \Rightarrow 0 \notin \operatorname{Spec} u \circ v$

$v \circ u(P) = v(P') = \int_0^X P'(t)\,dt = P(X) - P(0)$

si P est constant $P = c \in \mathbb{K}$: $v \circ u(P) = 0$

$0 \in \mathrm{Spec}(v \circ u)$

<u>Ex 3</u> : $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ $\quad D : E \longrightarrow E$, $f \longmapsto f'$.

On cherche λ <u>et</u> $f \neq 0$ tq $D(f) = \lambda f = f'$

$f' = \lambda f$ éq. diff. linéaire du 1er ordre.

$\iff f \in \{ \alpha e^{\lambda t}, \alpha \in \mathbb{R} \}$.

$\mathrm{Ker}(D - \lambda \mathrm{Id}) = \mathbb{R} \cdot e^{\lambda t}$ $\quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

$\mathrm{Spec}\, D = \mathbb{R}$ <u>et</u> $E_\lambda = \mathbb{R}\, e^{\lambda t}$.

Ex4 $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

$$f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ (u_n) & \longmapsto & (v_n) \end{array} \quad \begin{cases} v_0 = u_0 \\ v_n = \dfrac{u_n + u_{n-1}}{2} & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

1) f est linéaire : $f(\lambda(a_n) + \mu(b_n)) = \lambda f((a_n)) + \mu f((b_n))$

$f(u_n) \in E$

3) $\lambda \in \mathbb{C}$ $u \in E$. $f(u) = \lambda u \iff \begin{cases} u_0 = \lambda u_0 \\ \dfrac{u_n + u_{n-1}}{2} = \lambda u_n \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} (1-\lambda) u_0 = 0 \\ (2\lambda - 1) u_n = u_{n-1} \end{cases}$$

si $\lambda = 1 \Rightarrow (u_n)$ suite constante est solution : $\forall n \ u_n = c$

si $\lambda = \frac{1}{2}$ $\quad \forall n \geq 1$, $u_{n-1} = 0 \Rightarrow u = 0$.

si $\lambda \neq 1, \frac{1}{2}$ $\quad u_0 = 0$ par récurrence ; $u_n = 0$.
$u = 0$

Conclusion $\operatorname{Spec} f = \{1\}$ $\quad E_1 = \mathbb{K}(1)_n$.

2) On a montré que f injective
car $0 \notin \operatorname{Spec} f$.

De plus f est surjective ; on résout
$f(U_n) = V_n \Rightarrow$ $\quad u_0 = v_0$.

$n \geq 1 \quad v_n = \frac{U_n + U_{n-1}}{2} \Rightarrow U_n = 2V_n - V_{n-1}$

$\Rightarrow u_n = 2v_n - (2v_{n-1} - u_{n-2})$

récurrence $\Rightarrow$ $\quad u_n = 2v_n - 2v_{n-1} + 2v_{n-2} + \dots + (-1)^n v_0$.

et donc (u_n) existe et f est surjective.

Ex 5 : E $\mathbb{C}$-espace vectoriel. $\dim E = p \geq 1$

$u \circ v - v \circ u = au$ $\quad a \neq 0$

1) Montrer que $u \notin GL_n(E)$.

Supposons que u est inversible.

$u \circ v \circ u^{-1} - v = a\, Id_E$

$\underbrace{tr\, u \circ v \circ u^{-1}}_{} = tr\, u^{-1} \circ u \circ v = tr\, v$: tr est linéaire.

$tr\, u \circ v \circ u^{-1} - tr\, v = ap \Rightarrow ap = 0$ $\quad p \neq 0$, $a \neq 0$ absurde.

2) $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad u^n \circ v - v \circ u^n = n a u^n$.

par récurrence : si $n = 1$ c'est l'hypothèse.

On suppose $P(n)$: $u^n \circ v - v \circ u^n = n a v^n$.

$$u^{n+1} \circ v - \underbrace{u \circ v} \circ u^n = n a v^{n+1}$$

$$u \circ v - v \circ u = a v \Rightarrow \underbrace{u \circ v} = \underline{a v + v \circ u}$$

$$u^{n+1} \circ v - (a v + v \circ u) \circ u^n = n a v^{n+1}$$

$$v^{n+1} \circ v - v \circ u^{n+1} = (n+1) a v^{n+1}$$

On a montré $P(n+1)$.

$\forall n \geq 1 \quad u^n \circ v - v \circ u^n = a n u^n$

c) Montrer que u est nilpotent.

$$\varphi : \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{L}(E)$$

$$u \longrightarrow u \circ v - v \circ u$$

$\varphi(u^n) = a_n v^n$ si $v^n \neq 0 \Rightarrow a_n \in \mathrm{Spec}\,\varphi$

Mais $\dim E = p$ $\dim \mathcal{L}(E) = p^2$

le spectre de φ est fini il faut que pour un certain $N \in \mathbb{N}$ $n \geqslant N$ $u^n = 0$

c'est-à-dire u est nilpotent.

d) Montrer que u et v ont un vecteur propre en commun ;

Si $u^n = 0$, alors $\mathrm{Spec}\,u = \{0\}$:

$\det u^n = (\det v)^n = 0 \Rightarrow u \notin GL_n(E)$

$0 \in \mathrm{Spec}\{0\}$. De plus si $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \neq 0 \in E$

$u(x) = \lambda x$ $u^n(x) = \lambda^n x = 0 \Rightarrow \lambda = 0$

$\mathrm{Spec}\, u = \{0\}$
"le" vecteur propre commun est à choisir dans $\mathrm{Ker}\, u$: Montrons que $\mathrm{Ker}\, u$ est stable par v ; v induit une application $\tilde{v}$; $\mathrm{Ker}\, u \longrightarrow \mathrm{Ker}\, u$:
$x \longmapsto v(x)$
Or $\mathbb{K} = \mathbb{C}$; $\tilde{v}$ admet au moins une valeur propre λ, donc au moins un vecteur propre : $x_0 \in \mathrm{Ker}\, u$

Par définition $\tilde{v}(x_0) = v(x_0) = \lambda x_0$

$u(x_0) = 0$ car $x_0 \in \mathrm{Ker}\, u$

x_0 vecteur propre commun.