Exc 2 :

$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^4=1\}$, $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^5=2\}$

$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+xy+y^2 \leq 1\}$, $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+8xy+y^2 \leq 1\}$

$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y^2 = x(1-2x)\}$

compactes ? $\mathbb{R}^2$ est de dimension finie, il faut et il suffit de montrer que les parties sont fermées et bornées. Chacun de ces ensembles s'écrit :

$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f_X(x,y) \begin{matrix} = \\ \leq \\ \geq \end{matrix} 0\}$ avec f continue.

$f_A : (x,y) \longmapsto x^2+y^4-1$, $f_B(x,y) = x^2+y^5-2$

$f_C(x,y) = x^2+xy+y^2-1$, $f_D(x,y) = x^2+8xy+y^2-1$

$f_E(x,y) = y^2 - x(1-2x)$. Ces fonctions polynomiales.

On en déduit que A, B, C, D et E sont des fermés.

* $A \subset B_F(0,1)$ car $x^2 + y^4 = 1 \Rightarrow |x|, |y| \leq 1$
$\| \|_\infty$ A est borné.

* $x^2 + y^5 = 2 \iff y = (2 - x^2)^{\frac{1}{5}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$(n, (2-n)^{\frac{1}{5}}) \in B, \forall n \quad \|(n, (2-n)^{\frac{1}{5}})\|_1 \geq n \to +\infty$

B n'est pas bornée donc pas compacte.

* $x^2 + xy + y^2 \leq 1 \iff (x + \frac{y}{2})^2 + \frac{3}{4} y^2 \leq 1$

$\Rightarrow \frac{3}{4} y^2 \leq 1$ et $(x + \frac{y}{2})^2 \leq 1$

$\Rightarrow |y| \leq 2$ et $|x| \leq 2$

Donc $C \subset B_{F_{\|\ \|_\infty}}(0, 2)$ donc c'est bornée

d'où compacte.

$*$ $x^2 + 8xy + y^2 \leq 1$.

$\Leftrightarrow (x+4y)^2 - 15y^2 \leq 1$

Si $y = n$, $x = -4n \Rightarrow -15n^2 \leq 1$.

$(-4n, n) \in D$ et $\|(-4n, n)\|_1 \geq n \xrightarrow{} +\infty$

donc D n'est pas bornée donc n'est pas

compacte.

$* \quad y^2 = x(1-2x)$

$\Rightarrow \quad \underbrace{x(1-2x)}_{P(x)} \geqslant 0$ P est un polynôme de degré 2. Il est du signe du coefficient dominant à l'extérieur des racines et du signe opposé à l'intérieur des racines. Donc $P = -2X^2 + X$

$\forall x \in [0, \frac{1}{2}] \qquad P(x) \geqslant 0$

et $\forall x \notin [0, 1/2] \qquad P(x) < 0$

d'où si $(x, y) \in E \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}$

Et P atteint son maximum en $\frac{1}{4}$ et

$0 \leq y \leq \frac{1}{8}$ d'où $\|(x,y)\|_2 \leq \frac{1}{2}$ et

E est une partie bornée et E est compacte.

$B_F(0,1) = \{x, \|x\| = 1\}$.

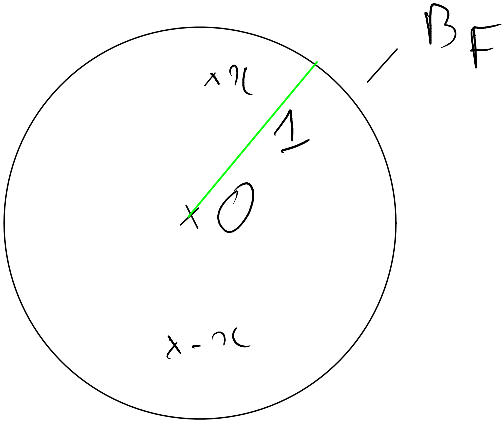
* convexe : $\forall x, y \in B_F(0,1)$, $\forall t \in [0,1]$

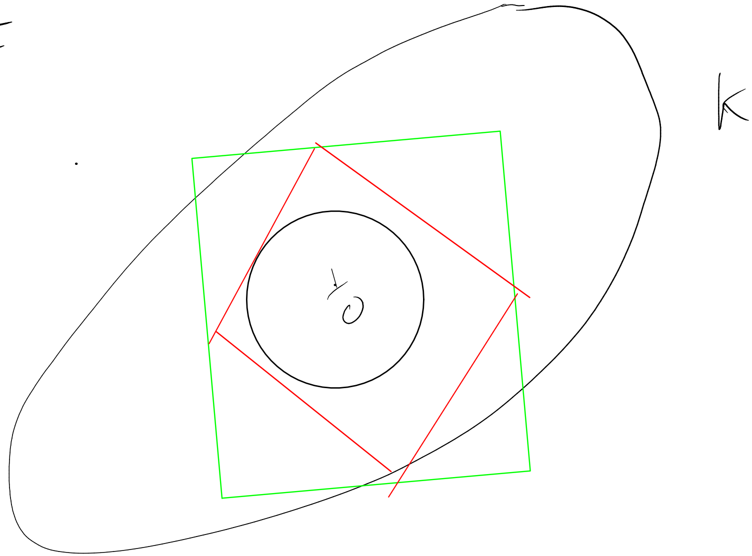
$$\|tx + (1-t)y\| \leq t\|x\| + (1-t)\|y\|$$
$$\leq t + (1-t) = \underline{1}$$

donc $tx + (1-t)y \in B_F(0,1)$.

* compact : car $B_F(0,1)$ est fermée et bornée
ET E de dimension finie.

* symétrique par rapport à O ; si $x \in B_F(0,1)$
$\|-x\| = \|x\| \leq \underline{1}$ donc $-x \in B_F(0,1)$





$x \neq 0$ $\qquad J_K(x) = \inf\left(r > 0,\ \frac{x}{r} \in K\right)$

o) Est-ce que la borne inférieure existe ?

$A_x = \left\{r > 0,\ \frac{x}{r} \in K\right\}$ $\qquad A_x \neq \emptyset$?

On $\exists \rho > 0$ tq $B(0,\rho) \subset K \Rightarrow \frac{x}{2\|x\|}\rho \in B(0,\rho)$

donc $r = \frac{2\|x\|}{\rho} \in A_x \neq \emptyset$

$\Rightarrow J_K(x)$ existe car A_x minorée par 0.

On veut montrer que si $x \neq 0$, $J_K(x) > 0$

Si $J_K(x) = 0$, alors $\lim_{r \to 0, \frac{x}{r} \in K} \left\|\frac{x}{r}\right\| = +\infty$

Ceci contredit K compact donc bornée.

D'où $J_K(x) = 0$ ssi $x = 0$.

J_K homogène : $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ $J_K(\lambda x) = |\lambda| J_K(x)$.

Si $\lambda > 0$, $A_{\lambda x} = \{r > 0, \frac{\lambda x}{r} \in K\}$ d'où

$J_K(\lambda x) = \lambda J_K(x)$.

Si $\lambda < 0$, si $x \in K$, alors $-x \in K$.

$\Rightarrow J_K(x) = J_K(-x)$. $\Rightarrow J_K(\lambda x) = |\lambda| J_K(x)$

$\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

De plus, si $x \in K$, $A_x = \{ r > 0, \frac{x}{r} \in K \}$.

$1 \in A_x$. Donc $J_K(x) \leq 1$.

Si $x \in E$ et $J_K(x) \leq 1$, il existe une suite r_n telle que $\lim r_n = J_K(x)$.

D'où $\lim \frac{x}{r_n}$ converge vers $\frac{x}{J_K(x)}$

Mais K est fermé donc $\frac{x}{J_K(x)} \in K$.

De plus $0 \in K$ car $B(0,\rho) \subset K$.

K est convexe donc $\left[0, \frac{x}{J_K(x)}\right] \subset K$

$\frac{1}{J_K(x)} \geq 1$ et on a $x \in \left[0, \frac{x}{J_K(x)}\right] \subset K$

d'où $x \in K$.

K est la boule fermée unité pour la "norme" J_K.

Il reste à montrer l'inégalité triangulaire ;

$J_K(x+y) = \inf\{r > 0, \frac{x+y}{r} \in K\} \leq J_K(x) + J_K(y)$.