Ex1 $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\,dt$.

$$\phi : E \longrightarrow E$$
$$f \longmapsto \left(x \longmapsto \int_0^x f(t)\,dt\right).$$

1) $\phi(f) \in E$ car $x \longmapsto \int_0^x f(t)\,dt$ $\mathcal{C}^0$ et par linéarité de l'intégrale, ϕ est linéaire

2) ϕ est linéaire, on va montrer que ϕ est lipschitzienne.

$$\|\phi(f)\|_1 = \int_0^1 \left|\left(\int_0^x f(t)\,dt\right)\right| dx \leq \int_0^1 \int_0^x |f(t)|\,dt$$
$$\leq \int_0^1 \int_0^1 |f(t)|\,dt$$

$$\|f\|_1 \overset{=}{} \int_0^1 |f(t)|\,dt$$

d'où ϕ est 1-lipschitzienne $\|\phi(f)\|_1 \leq \overset{\|f\|_1}{\overline{\overline{\|f\|_1}}}$

3) $n \geq 0$ $f_n(x) = n e^{-nx}$ $x \in [0,1]$.

$\|f_n\|_1 = 1 - e^{-n}$ $\quad \phi(f)(x) = 1 - e^{-nx}$.

$\|\phi(f_n)\| = 1 - \dfrac{1-e^{-n}}{n}$.

4) $|||\phi||| = \sup\limits_{f \neq 0} \dfrac{\|\phi(f)\|_1}{\|f\|_1} \leq 1$ car 1-lipsch.

$(*)$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|||\phi(f_n)|||_1}{\|f_n\|_1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-\frac{1-e^{-n}}{n}}{1-e^{-n}} = 1.$$

$$\Rightarrow \sup_{f\neq 0} \frac{\|\phi(f)\|_1}{\|f\|_1} \geq 1 \quad (**).$$

donc $(*)$ et $(**)$ montrent que $|||\phi||| = 1$.

<u>Ex 3</u> $f_n : [0,+\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$.

$$x \longmapsto \arctan\left(\frac{x+n}{1+nx}\right).$$

1) (f_n) CVS ? $f_n(0) = \arctan(n)$ $\lim_{n\to+\infty} f_n(0) = \frac{\pi}{2}$,

si $x \neq 0$, $x > 0$ $\lim_{n\to+\infty} \arctan\left(\frac{x+n}{nx}\right) = \arctan\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \arctan x$

On a : $\arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \arctan x$. $x > 0$

(f_n) CVS vers $f = \frac{\pi}{2} - \arctan x$. (valable en $x = 0$)

f est continue.

2) Étudier le tableau de variations de $f_n(x) - f(x) = g_n(x)$

$g_n'(x) \leq 0$

x	0		$+\infty$
g'		$-$	
g	$\arctan \frac{1}{n}$	$\searrow$	$-\arctan \frac{1}{n}$

$|f_n - f|$? ceci n'est pas dérivable.

$|f_n(x) - f(x)| \leq \arctan \frac{1}{n}$ $\forall x \in [0,1]$.

On en déduit que (f_n) CVU vers f sur $[0,+\infty[$.

Ex 5

1) $f_n(x) = 1 + \quad + x^n = \dfrac{1-x^n}{1-x}$ sur $]-1,1[$.

(f_n) CVS vers $\left(x \longmapsto \dfrac{1}{1-x}\right)$ sur $]-1,1[$.

$\left| f_n(x) - \dfrac{1}{1-x} \right| = \dfrac{x^n}{1-x}$ $\quad \sup_{]-1,1[} \left| f_n(x) - \dfrac{1}{1-x} \right| = +\infty$

Il n'y a pas convergence uniforme sur $]-1,1[$. si $a > 0$ $\quad a < 1$.

$\forall x \in [-a, a]$ $\left| f_n(x) - \dfrac{1}{1-x} \right| < \dfrac{a^n}{1-a} \longrightarrow 0$

Donc (f_n) CVU vers f sur $[-a, a]$.

2) $f_n(x) = n x^n \ln x$, $f_n(0) = 0$ $x \in [0, 1]$
$x \neq 0$.

$x = 0$: $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(0) = 0$

$x \neq 0$ $\lim\limits_{n \to +\infty} n x^n \ln x = 0$.

Donc $f_n(x)$ CVS vers la fonction nulle

$f_n'(x) = + n x^{n-1} (n \ln x + 1)$. la dérivée s'annule et change de signe en $e^{-\frac{1}{n}}$.

$f_n(e^{-\frac{1}{n}}) = e^{-1}$ on en déduit que

$\sup\limits_{x \in [0,1[} |f_n(x)| \geq e^{-1}$ et donc on n'a pas

convergence uniforme.

3) $f_n(x) = e^{-nx} \sin(2nx)$ $x \in \mathbb{R}^+$

Si $x = 0$ $f_n(0) = 0$

Si $x > 0$ $\lim f_n(x) = 0$

(f_n) CVS vers la fonction nulle.

$|f_n(x)| = |e^{-nx} \sin 2nx|$

On remarque que

$$\sup_{\mathbb{R}_+} |e^{-nx} \sin 2nx| = \sup_{\mathbb{R}_+} |g(x)| = M > 0 ;$$

avec $g(x) = e^{-x} \sin 2x$; $f_n(x) = g(nx)$

Donc (f_n) ne CVU vers 0 sur $\mathbb{R}_+$.

Sur $[a, +\infty[$;

$$|f_n(x)| \leq e^{-na} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

et donc (f_n) CVU vers 0.

4) $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$;

$x \longmapsto n e^{-n^2 x^2}$

si $x = 0$ $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n = +\infty$

Etude sur $]0 ; +\infty[$:

si $x > 0$ $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$.

Donc (f_n) CVS vers 0.

Etudions la CVU sur $[a ; +\infty[$:

$|f_n(x)| \leq n e^{-n^2 a^2}$ $\forall x \in [a ; +\infty[$:

$\longrightarrow 0$ qd $a \longrightarrow +\infty$

(f_n) CVU sur $[a, +\infty[$ vers 0.

calculons $f_n\left(\frac{1}{n}\right) = n e^{-1}$ $\lim_{n \to +\infty} f_n\left(\frac{1}{n}\right) = +\infty$

Donc $\sup_{x \in]0, +\infty[} |f_n(x)| = +\infty$.

Pas de CVU sur $\mathbb{R}_+^*$.