Ex 1 $A \subset \mathbb{R}$ $f_n, g_n : A \to \mathbb{R}$.

1) (f_n) CVU vers f. $g : A \to \mathbb{R}$ g bornée.

Donc $\exists M$ tq $\forall x \in A$ $|g(x)| \leq M$.

Si (f_n) CVS vers f, alors $(g f_n)$ CVS vers gf :

car $\forall x \in A$ $\lim\limits_{n} g(x) f_n(x) = g(x) \lim\limits_{n} f_n(x)$.

Étudions $\forall x \in A$

$$|f_n(x) g(x) - f(x) g(x)| \leq M |f_n(x) - f(x)|$$

$$\sup |f_n(x) g(x) - f(x) g(x)| \leq M \sup |f_n(x) - f(x)| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \text{ car CVU.}$$

Donc $\sup |f_n(x) g(x) - f(x) g(x)| \to 0$.

D'où $(f_n g)$ CVU vers fg.

$(\alpha f_n + \beta g_n)$ CVS vers $\alpha f + \beta g$.

2) b) (f_n) CVU f (g_n) CVU vers g.

On suppose que f_n, g_n sont bornées pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Alors f, g sont des fonctions bornées.

On sait que si $\varepsilon = 1$, $\exists N$ $n \geq N$

$\sup |f_n(x) - f(x)| \leq 1$.

$|f_n(x) - f(x)| \leq 1 \quad \forall x$.

$\Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq 1$

$\Rightarrow \left| |f(x)| - |f_n(x)| \right| \leq 1 \Rightarrow |f(x)| \leq |f_n(x)| + 1$
$\leq M + 1$.

$\Rightarrow f$ est bornée. De même pour g.

Il est clair que $(f_n g_n)$ CVS vers fg.

Étudions $\forall x \in A$

$$|f_n g_n(x) - fg(x)| \leq |f_n(x) g_n(x) - f(x) g_n(x) + f(x) g_n(x) - f(x) g(x)|$$

$$\leq \underbrace{\|g_n\|_\infty}_{\text{dépend de } n} \underbrace{\|f_n - f\|_\infty}_{\to 0} + \|f\|_\infty \underbrace{\|g_n - g\|_\infty}_{\to 0}$$

$$\|f_n g_n - fg\|_\infty \leq \|g_n\|_\infty \|f_n - f\|_\infty + \|f\|_\infty \|g_n - g\|_\infty$$

$\varepsilon = 1$, $\exists N$ $n \geq N$ $\|g - g_n\|_\infty \leq 1$

$\Rightarrow \|g_n\|_\infty - \|g\|_\infty \leq 1$

$\Longrightarrow \quad \|g_n\|_\infty \leq 1 + \|g\|_\infty$.

d'où $\|f_n g_n - fg\|_\infty \leq (1+\|g\|_\infty)\|f_n - f\|_\infty + \|f\|_\infty \|g_n - g\|_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

d'où $(f_n g_n)$ CVU vers fg.

2 a) $\|\alpha f_n + \beta g_n - (\alpha f + \beta g)\|_\infty$

$\leq |\alpha| \underbrace{\|f_n - f\|_\infty}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0} + |\beta| \underbrace{\|g_n - g\|_\infty}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$

et donc $(\alpha f_n + \beta g_n)$ CV vers $\alpha f + \beta g$.

c) $A = \mathbb{R}$ $\quad f_n(x) = \frac{1}{n}$. $\quad (f_n)$ CVU vers 0

car $\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

$g_n(x) = x$. $\quad (g_n)$ CVU vers id

$\|g_n - id\|_\infty = 0 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

g_n n'est pas bornée.

$g_n(x) f_n(x) = \frac{x}{n} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

donc $(g_n f_n)$ CVS vers 0.

MAIS $\sup_{\mathbb{R}} |g_n(x) f_n(x) - 0| = \sup_{\mathbb{R}} \left|\frac{x}{n}\right| = +\infty$.

On a pas la convergence uniforme.

Ex 3 $\quad f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{2^n x}{1+2^n n x^2} \qquad \frac{u'}{u}$$

1) Étude de la convergence simple :

si $x=0$ $\quad f_n(x) = 0 \quad \lim_n f_n(0) = 0$

sinon : $\quad f_n(x) \sim \frac{2^n x}{2^n n x^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

donc $\lim_n f_n(x) = 0$

(f_n) cvs vers la fonction nulle

2) $$I_n = \frac{1}{2n}\int_0^1 \frac{2^{n+1} n x}{1+2^n n x^2}\,dx = \frac{1}{2n}\Big[\ln\left|(1+2^n n x^2)\right|\Big]_0^1$$

$$= \frac{1}{2n} \ln(1+2^n n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\ln(2^n n)}{2n} = \frac{\ln 2^n + \ln n}{2n} \sim \frac{\ln 2}{2}.$$

Donc $\lim I_n = \dfrac{\ln 2}{2}$.

3) Si (f_n) convergeait uniformément vers 0 sur $\mathbb{R}$, alors

$$\frac{\ln 2}{2} = \lim_n I_n = \lim_n \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 \underbrace{\lim_{n \to +\infty} f_n(x)}_{=0}\,dx = 0$$

ce qui est absurde.

Donc (f_n) ne converge pas uniformément vers f.

On peut aussi mettre en défaut la convergence uniforme en calculant :

$$\lim_{n\to+\infty} f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{2^n/n}{1+\frac{2^n}{n}} = 1 .$$

Ex 5 $n \in \mathbb{N}$, $$v_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^n+e^x}\, dx .$$

1) v_n existe car, l'intégrande : $x \longmapsto \dfrac{1}{x^n+e^x}$ est continue sur $[0,+\infty[$ et

$$\left| \frac{1}{x^n+e^x} \right| \leq e^{-x}$$ et e^{-x} est intégrable

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} = \left[-e^{-x}\right]_0^{+\infty} = 1$$

2) $\lim v_n = ?$

⚠ on intègre sur $[0,+\infty[$ qui n'est pas un segment.

1) $f_n : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^0$ ok

2) f_n est intégrable ok

3) (f_n) CVS vers $f : x \longmapsto \begin{cases} \frac{1}{e^x} & \text{si } x \in [0,1[\\ \frac{1}{1+e} & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

f est $\mathcal{C}^0$ par morceaux

4) Convergence dominée :

$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}$ $\left| \frac{1}{x^n + e^x} \right| \leq \frac{1}{e^x} = e^{-x}$ intégrable

Théorème de Convergence Dominée nous dit que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \int_0^{+\infty} f \, dx = \int_0^1 e^{-x} = 1 - e^{-1}$

Autre preuve

$$\left|\int_0^1 -\frac{1}{x^n+e^x}+\frac{1}{e^x}\,dx\right| = \left|\int_0^1 \frac{x^n}{x^n+e^x}\,dx\right|$$

$$\leq \int_0^1 x^n\,dx = \frac{1}{n+1}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 \frac{1}{x^n+e^x} = \int_0^1 \frac{1}{e^x} = \underline{1-e^{-1}},$$

$$\text{et } \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^n+e^x}\,dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^n}\,dx = \frac{1}{n-1}\left[\bar{x}^{n+1}\right]_1^{+\infty},$$

$$= \frac{1}{n-1} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Donc $\lim v_n = 1 - e^{-1}$.