Ex1 : $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$

1) Ensemble de définition :

$\sum \frac{1}{n^x}$ CV ssi $x > 1$ (Somme de Riemann)

$D_f =]1 ; +\infty[$

$\mathcal{C}^0$. $a > 1$

2) $f_n : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \frac{1}{n^x}$

$\forall x \in [a ; +\infty[, \ |f_n(x)| \leq \frac{1}{n^a}$ $\quad \sum \frac{1}{n^a}$ CV

Donc $\sum f_n$ converge normalement sur $[a ; +\infty[$ pour tout $a > 1$ et donc converge uniformément sur $[a ; +\infty[$.

On sait qu'alors la limite f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

3) $f_n : x \longmapsto \frac{1}{n^x}$ est décroissante

donc $\sum f_n$ est décroissante

Elle est même strictement décroissante

car $x \longmapsto \frac{1}{2^x}$ est strictement décroissante

4) $f_n' : x \longmapsto (e^{-x\ln n})' = -\ln n \, e^{-x}$

est croissante donc f_n est convexe et

$\Rightarrow \sum f_n$ est convexe sur $\mathbb{R}_+^*$

$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^* \quad \forall t \in [0,1]$

$$f(tx + (1-t)y) \leq t f(x) + (1-t) f(y)$$

5) $\sum f_n$ converge normalement sur

(a>1) $[a ; +\infty[$ on peut prendre $[2 ; +\infty[$.

Donc $\sum f_n$ CVU sur $[2 ; +\infty[$.

et $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $\quad \lim\limits_{+\infty} f_n = 0$ si $n \geq 2$

$$\lim_{+\infty} f_1 = 1$$

Par théorème d'interversion limite intégrale, on a $\lim\limits_{+\infty} f(x) = 1$.

Ex 3 $\forall x > 0 \quad S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+nx}$

1) On pose $u_n(x) = (-1)^n \frac{1}{1+nx}$

pour $x>0$ fixé : $|U_n(x)|$ est décroissante et tend vers 0. $(-1)^n U_n(x)$ est de signe constant.

Par le critère spécial des séries alternées

$\sum U_n(x)$ converge et :

$$|R_{n-1}(x)| \leq \frac{1}{1+nx}$$

Donc sur $[a, +\infty[$ $\quad a>0$

$\forall x \in [a ; +\infty[\quad |R_{n-1}(x)| \leq \frac{1}{1+na} \to 0$

ceci montre la convergence uniforme de $\sum U_n(x)$ sur $[a; +\infty[$

et S est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

2) On a la CVU de $\sum U_n(x)$ sur $[1; +\infty[$. On applique le théorème de la double limite en sachant que;

$$\lim_{+\infty} \frac{1}{1+nx} = 0 \quad \text{si } n \neq 0$$

$$n=0 \quad \lim_{+\infty} \frac{1}{1+nx} = 1$$

donc $\lim\limits_{+\infty} S = \sum\limits_{n \geq 0} \lim\limits_{+\infty} f_n = 1$

3) Établir que S est dérivable et calculer S'.

$\mathcal{C}^1$: $\sum f_n$ CVS.

i) $f_n : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \dfrac{1}{1+nx}(-1)^n$

ii) $f_n' : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$

$x \longmapsto \dfrac{-n}{(1+nx)^2}(-1)^n$

⚠ pour montrer la CVU de $\sum f_n'$ on va utiliser le critère spécial des séries alternées :

$(-1)^n f_n$ de signe constant.

$\left(\frac{n}{(1+nx)^2}\right)$ est décroissante pour x fixé

Méthode 1, On calcule

$$\frac{n}{(1+nx)^2} - \frac{n+1}{(1+(n+1)x)^2} = \frac{n(n+1)x^2 - 1}{(1+nx)^2\,(1+(n+1)x)^2}$$

pour x fixé $x > 0$. $\exists N$ tq $n > N$

$n(n+1)x^2 - 1 \geq 0$. $N > \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor$

Donc $\left|R_{n+1}(x)\right| \leq \frac{n}{1+nx}$ $n > N$.

Sur $[a ; +\infty[$ on $N = \left[\frac{1}{a}\right]$, $n \geq N$

et $\forall x \in [a ; +\infty[$ $\quad |R_n(x)| \leq \frac{n}{(1+na)^2} \to 0$

D'où la convergence uniforme

de $\sum \frac{(-1)^n n}{(1+nx)^2}$ sur $[a ; +\infty[$.

<u>Conclusion</u> : Théorème de dérivation

"sous le signe somme" :

S est de classe $\mathcal{C}^1$ et

$$S'(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} n}{(1+nx)^2}.$$