Ex2 $\quad (1+t^2)y'' - 2y = 0$

1) $\int_0^t \frac{1}{(1+s^2)^2}\,ds$. $\quad \frac{P}{Q}$, $P \in \mathbb{K}[X]$, $Q(X) \in \mathbb{K}[X]$

On décompose $\frac{P}{Q}$ en éléments simples

$$\Rightarrow \underbrace{\frac{\alpha}{(x-a)^n}}_{} \quad n \geq 1 \qquad \underbrace{\frac{\alpha x+\beta}{(x^2+bx+c)^p}}_{} \quad b^2-4c<0.$$

$$\int_0^t \frac{1}{(1+s^2)^n}\,ds = I_n(t). \qquad I_1 = \arctan t$$

$$I_n(t) = \int_0^t 1 \times \frac{1}{(1+s^2)^n}\,ds \overset{ipp}{=} \left[\frac{s}{(1+s^2)^n}\right]_0^t + 2n\int_0^t \frac{s^2}{(1+s^2)^{n+1}}\,ds$$

$$I_n(t) = \frac{t}{(1+t^2)^n} + 2n\int_0^t \frac{s^2+1}{(1+s^2)^{n+1}}\,ds - 2n\, I_{n+1}$$

$$2n\, I_{n+1} = \frac{t}{(1+t^2)^n} + (2n-1)\, I_n(t)$$

$$\iff \quad I_{n+1} = \frac{1}{2n}\,\frac{t}{(1+t^2)^n} + \frac{(2n-1)}{2n}\, I_n(t)$$

$n=1$

$$I_2 = \frac{1}{2}\,\frac{t}{1+t^2} + \frac{1}{2}\arctan(t).$$

$$\int_0^t \frac{1}{(1+s^2)^2}\,ds \qquad s = \tan u \qquad ds = (1+\tan^2 u)\,du$$

$$= \int_0^{\arctan t} \frac{1}{(1+\tan^2 u)}\,du = \int_0^{\arctan t} \cos^2 u\,du$$

$$= \int_0^{\arctan t^*} \frac{1}{2} + \frac{\cos 2u}{2}\, du = \frac{1}{2}\arctan t + \frac{1}{2}\left[\frac{\tan u}{1+\tan^2 u}\right]_0^{t^*}$$

$$\sin 2u = \frac{2t}{1+t^2} \times \frac{1}{2} = \frac{t}{1+t^2}$$

$$= \frac{1}{2}\arctan t + \frac{1}{2}\frac{t}{1+t^2} \;\#$$

$$y'' - \frac{2}{1+t^2}\, y = 0 \qquad]-1, +\infty[$$

EDL2

2) $(1+t^2)\, y'' - 2y = 0$

On cherche le degré possible pour P polynôme : On calcule

$(1+t^2)\, y'' - 2y$ pour $y = x^n$

$$(1+t^2)\, n(n-1)\, t^{n-2} - 2t^n = n(n-1) - 2$$
$$= n^2 - n - 2$$

$n = 2$ ou $n = -1$.

P est degré 2. $\quad P = x^2 + bx + c$

$P = x^2 + 1$

On cherche $y = (x^2+1)\,\psi$ $\quad$ x^2+1 ne s'annule pas
$$= f\psi$$

$$y' = f'\psi + f\psi'$$
$$y'' = f''\psi + 2f'\psi' + f\psi''$$

$$\psi \Big[\underbrace{(1+t^2) f'' - 2f}_{=0} \Big] + (1+t^2) \left[2 f'\psi' + f \psi'' \right] = 0$$

$$(1+t^2) \times \left(4t\psi' + (1+t^2)\psi'' \right) = 0$$

$$\psi'' + \frac{4t}{1+t^2}\psi' = 0 \qquad \underbrace{z' - \frac{4t}{1+t^2} z = 0}_{(F)}$$

Les solutions de F : $\quad t \longmapsto \lambda \dfrac{1}{(1+t^2)^2}$

d'où ψ.

<u>Ex 4</u>

$y'' + q(t)y = 0 \; (E) \qquad q : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R} \; \mathcal{C}^0$

et q intégrable

1) Si <u>y est bornée</u> solution de (E) :

$y''(t) = -q(t)y(t) \Rightarrow y$ est $\mathcal{C}^2$

$$y'(t) - y(0) = \int_0^t y''(s)\,ds = \int_0^t q(s)y(s)\,ds$$

On suppose $\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad |y(t)| \leq M$

$\forall s \in \mathbb{R}_+ \qquad |q(s)y(s)| \leq M\,|q(t)|$

$\Rightarrow y(s)\,q(s)$ est intégrable car majorée en valeur absolue par une fonction intégrable $\Rightarrow$ $\lim_{t \to +\infty} \int_0^t q(s)\varphi(s)\,ds$ existe et on la note l.

On veut montrer $l=0$; on procède par l'absurde supposons $l>0$ quitte à changer φ en $-\varphi$.

$\exists M$ tq $\forall x \geq M$ $\varphi'(x) \geq \frac{l}{2}$.

$$\Rightarrow \int_M^x \varphi'(s)\,ds \geq \int_M^x \frac{l}{2} = \frac{l}{2}(x-M)$$

$\Rightarrow \varphi(x) - \varphi(M) \geq \frac{1}{2}(x - M) \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty$

contredit φ bornée

Si φ bornée, $\lim\limits_{+\infty} \varphi' = 0$

2) φ_1, φ_2 2 solutions de (E)

$$w(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{vmatrix} = \varphi_1 \varphi_2' - \varphi_1' \varphi_2$$

$$w'(t) = \varphi_1 \varphi_2'' - \varphi_1'' \varphi_2 = \varphi_1 (-q(t) \varphi_2) - (-q(t) \varphi_1) \varphi_2$$
$$= 0$$

w est constant

3) Si φ_1 et φ_2 une base de fonctions bornées :

$$\lim_{t\to+\infty} \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{vmatrix} = \lim_{t\to+\infty} \underbrace{\varphi_1}_{\text{borné}} \underbrace{\varphi_2'}_{\to 0} - \underbrace{\varphi_1'}_{\to 0} \underbrace{\varphi_2}_{\text{borné}} = 0$$

$$\| \qquad W(t)$$

$$\lim_{t\to+\infty} W(t) = 0 \implies W = 0 \quad \text{absurde}$$

donc : il existe au moins une solution non bornée $\square$.