Exercice 4 $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $\mathcal{C}^1$ telle que

$\forall x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = -f(-x)$

Si $f$ est de classe $\mathcal{C}^1$, $f'$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et donc $f$ est de classe $\mathcal{C}^2$

$$f''(x) = \left(-f(-x)\right)' = +f'(-x) = -f(x)$$

Analyse : Si $f$ existe, alors $f$ vérifie l'équation différentielle :

$$y'' + y = 0 \qquad \text{EDL 2}$$

$$\mathcal{S} = \{\lambda \cos x + \mu \sin x,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

$= \{ A \cos(x-\varphi) \quad , \quad A \in \mathbb{R}_+ \ , \ \varphi \in ]-\pi ; \pi] \}$

et donc il existe $A$ et $\varphi$ tels que

$$f(x) = A \cos(x-\varphi)$$

<u>Synthèse</u> : Si $f(x) = A \cos(x-\varphi)$

$$f'(x) = -A \sin(x-\varphi)$$

$$= -A \cos(-x-\varphi) = -f(-x)$$

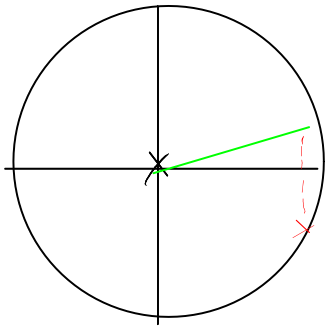
$$= -A \cos(x+\varphi)$$

On cherche $\varphi$ tq $\forall x \in \mathbb{R}$ $\sin(x-\varphi) = \cos(x+\varphi)$

Or $\sin(x-y) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x + y\right)$,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x + y\right) = \cos(x+y),$$

Or $\cos X = \cos Y \iff \begin{cases} X = \underline{Y} + 2k\pi, \\ X = -Y + 2k\pi \end{cases}$



D'où : $\frac{\pi}{2} - x + \cancel{y} = x + \cancel{y} + 2k\pi \quad \forall x$

impossible.

ou $\frac{\pi}{2} - x + y = -x - y + 2k\pi$

$$\Rightarrow 2y = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$$

$$\varphi = k\pi - \frac{\pi}{4}.$$

Or $\varphi \in \left]-\pi, \pi\right]$ $\overset{!}{\Longrightarrow}$ $\varphi = \frac{3\pi}{4} \in [0, \pi]$

donc $f(x) = A \cos\left(x - \frac{3\pi}{4}\right)$, $A \in \mathbb{R}$.

Exercice 5 Trouver $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que toute solution de $y'' + ay' + by = 0$ est bornée.

$r^2 + ar + b = 0$ équation caractéristique

Si $\Delta > 0$, on pose $r_1$ et $r_2$ les 2 racines réelles ≠ et $e^{r_1 t}$ $e^{r_2 t}$ sont des solutions distinctes. Or si $r \neq 0$, $e^{rt}$ n'est pas bornée, donc peut être $r_1$ ou $r_2$ vaut 0, mais pas les deux.

Il existe des solutions non bornée.

Si $\Delta = 0$ $\quad r$ la racine double,

$t e^{rt}$, $e^{rt}$ sont des solutions.

d'où $r = 0$ mais $t e^{0t}$ n'est pas

bornée. Donc il existe des solutions

non bornée.

Si $\Delta < 0$, alors $r = a + ib$ une

racine complexe de l'eq. caractéristique

Alors toute solution s'écrit :

$$A e^{at} \cos(t - \varphi)$$

Mais si $a \neq 0$, $f : t \longrightarrow e^{at}\cos(t-\varphi)$

n'est pas bornée $t = \varphi + 2k\pi$

$$f(\varphi+2k\pi) = \underline{e^{a\varphi}} \times \underline{e^{2k\pi t}} \qquad k \in \mathbb{Z}$$

donc $f$ non bornée.

Si $a = 0$ $\quad f(t) = A\cos(x-\varphi)$

qui est bornée.

<u>Conclusion</u> : Toutes les solutions de l'équation différentielle sont bornées ssi $a = 0$ et $\Delta = -4b < 0$.