Exercice 2 : $(t+1)^2 y'' - 2(t+1)y' + 2y = 0 \quad (**)$

EDL d'ordre 2 homogène

cela ressemble à une équation d'Euler.

$x = t+1$ $\qquad y(t) = \varphi(x) = \varphi(t+1)$

$$y'(t) = \varphi'(t+1)$$

$$y''(t) = \varphi''(t+1)$$

$$x^2 \varphi''(x) - 2x\varphi'(x) + 2\varphi(x) = 0 \quad (*)$$

y est solution de $(**)$ ssi φ est solution de $x^2 z'' - 2x z' + 2z = 0$

On cherche des solutions de la forme $x \longmapsto x^\alpha \quad x > 0$

$\alpha(\alpha-1) - 2\alpha + 2 = 0 \iff \alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0$

$\iff \alpha = 1$ ou $\alpha = 2$.

x^2 et x sont des solutions de $(*)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

Supposons φ solution sur $\mathbb{R}$. $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, α', β'

$\varphi|_{\mathbb{R}_+^*} = \alpha x^2 + \beta x \qquad \varphi|_{\mathbb{R}_-^*} = \alpha' x^2 + \beta' x$

Étude en 0 : $\lim\limits_{\substack{x>0 \\ x \to 0}} \varphi' = \beta$ et $\lim\limits_{\substack{x<0 \\ x \to 0}} \varphi'' = \beta'$

On en déduit que $\beta = \beta'$ car φ' est continue.

De plus : $\varphi''_{|\mathbb{R}_+^*} = \alpha$ $\quad\quad \varphi''_{|\mathbb{R}_-^*} = \alpha'$

φ est dérivable deux fois en $0 \Rightarrow$

$\alpha = \alpha'$ D'où $\boxed{\varphi = \alpha x^2 + \beta x \quad \forall x \in \mathbb{R}}$

Enfin : $y(t) = \alpha (t+1)^2 + \beta t \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Exercice 4 $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ (E)

$p, q : I \to \mathbb{R}$ $\mathcal{C}^0$.

(f, g) base de solutions de (E) sur I.

1) Si $f(x_0) = 0$, alors $f'(x_0) = 0$ implique $f = 0$: c'est le théorème de Cauchy-Lipschitz : f sol tq $\begin{cases} f(x_0) = 0 \\ f'(x_0) = 0 \end{cases}$ donc f uniquement déterminée : $0 = f$.

CCL Si $f \neq 0$ et $f(x_0) = 0$, alors, $f'(x_0) \neq 0$.

On peut supposer $f(x_0) > 0$

quitte à changer f en $-f$.

f' est continue en x_0 et donc $\exists \delta > 0$

tq $\quad \forall x \in \,]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\, \cap I$.

$$f'(x) \geq \frac{f'(x_0)}{2}$$

(On pose $\varepsilon = \dfrac{f'(x_0)}{2}$ dans la définition de la continuité en x_0 ; $\exists \delta > 0$

$\forall x \in \,]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\, \cap I$

$f'(x_0) - f'(x) \leq |f'(x) - f'(x_0)| \leq \dfrac{f'(x_0)}{2} \Rightarrow f'(x) \geq \dfrac{f'(x_0)}{2}$.

Donc $\forall x \in \left]x_0 - \delta, x_0 + \delta\right[\cap I$

$$f'(x) \geq \frac{f'(x_0)}{2} > 0 \quad \cap I.$$

x	$x_0 - \delta$		x_0		$x_0 + \delta$
f'		$+ > 0$		$+ > 0$	
f		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

f est strictement croissante $\left]x_0 - \delta, x_0 + \delta\right[\cap I$

et donc f ne s'annule qu'en x_0

sur $\left]x_0 - \delta, x_0 + \delta\right[\cap I$.

Ceci montre que x_0 est un zéro isolé.

2) f admet un nombre fini de zéros

sur tout segment de I : $f(x) = 0$ $x \in J \subset I$ admet un
J segment

nombre fini de solutions.

Supposons qu'il $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments dans $J \subset I$ segment 2 à 2 distincts.

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in J^{\mathbb{N}}$ J compact, $\exists\, \varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une extractrice telle que $(x_{\varphi(n)})$ converge vers $x \in J$.

Mais alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f(x_{\varphi(n)}) = \begin{cases} 0 & \text{car } f(x_n) = 0 \\ f(x) & \text{car } f \text{ continue en } x \end{cases}$

et $f(x)=0$. Mais par construction :

$\forall \varepsilon>0, \exists N, \forall n>N$ tq $|x_{p(n)}-x|<\varepsilon$

les $x_{p(n)}$ sont à 2 à 2 $\neq$. Donc

$\exists n>N$ tel que $x_{p(n)} \neq x$ et

$f(x_{p(n)})=0$.

$\Rightarrow x$ n'est pas un zéro isolé.

ABSURDE d'après la question précédente.

cl : f admet un nombre de 0 dans $J \subset I$ segment.

3) $\forall x \in I \quad \det\begin{pmatrix} f(x) & g(x) \\ f'(x) & g'(x) \end{pmatrix} = W(x)$

Soit le wronskien s'annule partout, soit il ne s'annule jamais :

$$w(x) = f(x)\, g'(x) + g(x)\, f'(x)$$

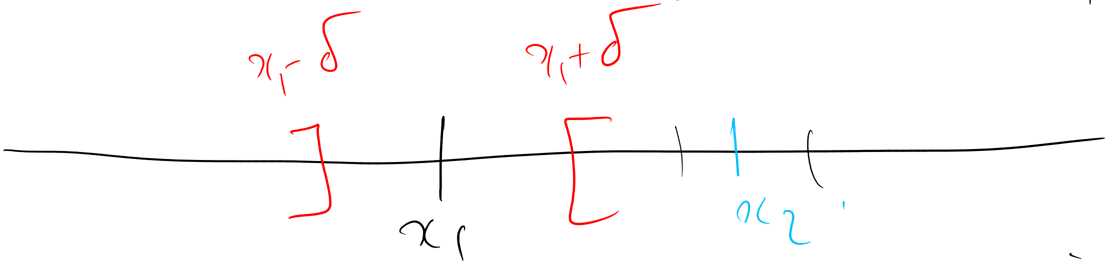
w est continue sur I et w ne s'annule jamais car (f, g) est une base de solutions.

On en déduit que w est de signe constant sur I.

4) Montrer qu'entre deux zéros consécutifs de f, il existe un unique zéro de g.

Si x_1 est un zéro de f ; x_1 est un zéro isolé, donc $\exists\, \delta$ tel que :

$$\forall x \in \left]x_1-\delta,\ x_1+\delta\right[\setminus \{x_1\},\quad f(x) \neq 0$$



$$\mathrm{Inf}\,(x,\ x > x_1\ \ f(x)=0) = \inf A_{x_1}$$

Si $A_{x_1} = \emptyset$, il n'y a pas de zéro consécutif à droite de x_1

Si $A_{x_1} \neq 0$, A_{x_1} est minoré par $x_1 + \delta$

et on note $x_2 = \inf A_{x_1}$

et $\forall x \in]x_1, x_2[$ $f(x) \neq 0$

On a $f(x_2) = 0$. Car si x_2 n'est pas un minimum, alors x_2 n'est pas un zéro isolé.

$$w(x_1) = f(x_1)\, g'(x_1) - f'(x_1)\, g(x_1)$$
$$= -f'(x_1)\, g(x_1)$$

$f'(x_1) \neq 0$
car x_1 n'est pas un zéro isolé

$g(x_1) \neq 0$ car sinon $\begin{vmatrix} f(x_1) & g(x_1) \\ f'(x_1) & g'(x_1) \end{vmatrix} = 0$

mais le wronskien ne s'annule pas.

De même, $w(x_2) = f(x_2)g'(x_2) - f'(x_2)g(x_2)$

$$= -f'(x_2)\,g(x_2) \neq 0$$

$g(x_2) \neq 0$.

Si g ne s'annule pas sur $]x_1, x_2[$

alors g ne s'annule pas sur $[x_1, x_2]$

On pose $h = \dfrac{f}{g}$ sur $[x_1, x_2]$

$$h' = \frac{f'g - gf'}{g^2}$$ g^2 est de signe constant

$$= -\frac{w}{g^2}$$ Mais w ne s'annule pas sur $[x_1, x_2]$.

on en déduit que h est strictement monotone sur $[x_1, x_2]$.

$$h(x_1) = \frac{f(x_1)}{g(x_1)} = 0 \qquad h(x_2) = \frac{f(x_2)}{g(x_2)} = 0$$

c'est absurde, donc g s'annule sur $]x_1, x_2[$. en y_1

Mais si g s'annule en $y_2 \in]x_1, x_2[$

$y_2 \neq y_1$. On applique le raisonnement précédent en changeant le rôle de f et de g : $\Rightarrow$ $\exists z$ entre y_1 et y_2 tq $f(z) = 0$. c'est encore absurde ; g s'annule une unique fois entre x_1 et x_2.

<u>Exemple</u> : $y'' + 1 = 0$;

$(\cos, \sin)$

cos s'annule en $\frac{\pi}{2} + k\pi$

et sin —— $k\pi$