Corrigé du TD n° 3

Espaces vectoriels normés 3

8 octobre 2020

Pour commencer

Exercice 1. On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}[X]$ et la forme linéaire

$$f : P \in E \mapsto P(1).$$

On considère, de plus, les deux normes suivantes sur E définies pour $P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i$ par

$$\|P\|_\infty = \max_i |a_i| \quad \text{et} \quad \|P\|_1 = \sum_{i=1}^{d} |a_i|.$$

1. Montrer que f est continue pour la norme $\| \ \|_1$ et calculer la norme subordonnée de f pour la norme $\| \ \|_1$.
2. Montrer que f n'est pas continue pour la norme $\| \ \|_\infty$.

---

1. La fonction f est linéaire, 1-lipschitzienne, donc continue pour la norme $\| \ \|_1$. De plus, si P est le polynôme constant 1, alors $\|f(P)\|_1 = \| \ P\|_1 = 1$, donc $|||f||| = 1$.
2. Si $P_n = 1 + \cdots + X^n$, alors $\|P_n\| = 1$ et $|f(P_n)| = n + 1$. L'application linéaire f n'est pas lipschitzienne pour la norme $\| \ \|_\infty$, donc n'est pas continue.

Exercice 2. Déterminer si les ensembles suivants sont, ou ne sont pas, compacts :

$$\begin{array}{ll} A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^4 = 1\} & B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^5 = 2\} \\ C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + xy + y^2 \leq 1\} & D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + 8xy + y^2 \leq 1\} \\ E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ y^2 = x(1-2x)\}. & \end{array}$$

A- Puisque $x^2 \geq 0$ et $y^4 \geq 0$, l'équation $x^2 + y^4 = 1$ entraine $x^2 \leq 1$ et $y^4 \leq 1$. On obtient donc $x \in [-1, 1]$ et $y \in [-1, 1]$, ie $\|(x, y)\|_\infty \leq 1$: A est borné. De plus, f est l'image réciproque de $\{1\}$, qui est fermé, par l'application continue $f(x, y) = x^2 + y^4$. A est donc également fermé. C'est bien une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^2$.

B- B n'est pas borné. En effet, pour tout $r > 0$, $(r, \sqrt[5]{2 - r^2})$ est élément de B (remarquons que l'on peut prendre la racine 5-ième de *tout* réel (il ne doit pas être nécessairement positif). Mais $\|(r, \sqrt[5]{2 - r^2})\|_\infty \geq r$ peut être aussi grand que l'on veut. B n'est donc pas borné, et pas compact.

C- On sait que $(|x| - |y|)^2 \geq 0$, d'où on tire l'inégalité classique $|xy| \leq \frac{x^2+y^2}{2}$, ce qui implique $-xy \leq \frac{x^2+y^2}{2}$. Il vient $\frac{x^2+y^2}{2} \leq x^2 + xy + y^2$. Ainsi, un élément de C vérifie $\|(x, y)\|_2 \leq 2$, ce qui prouve que C est borné. Comme C est de plus fermé (c'est l'image réciproque du fermé $]-\infty, 1]$ par l'application continue $(x, y) \mapsto x^2 + xy + y^2$), C est compact.

D- D n'est pas borné. En effet, pour tout réel a, le point $(a, -a)$ est dans D car $a^2 - 8a^2 + a^2 = -6a^2 \leq 0 \leq 1$. Or, la norme infini de $(-a, a)$ est a et peut donc être choisi aussi grande que l'on veut puisque a est arbitraire. Donc D n'est pas compact.

E- Remarquons que si (x, y) est élément de E, alors $x(1-2x) \geq 0$. Or, $x(1-2x) \geq 0$ si et seulement si $x \in [0, 1/2]$. Et dans ce cas, $x(1-2x) \leq 1/2 \times 1 = 1/2$. Ainsi, si (x, y) est élément de E, on a $x \in [0, 1/2]$ et $y \in [-\sqrt{1/2}, \sqrt{1/2}]$. L'ensemble E est donc borné. On vérifie aisément qu'il est fermé, comme image réciproque du fermé $\{0\}$ par l'application continue $(x, y) \mapsto y^2 - x(1-2x)$. E est donc compact.

Exercice 3. Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, A un fermé de E et B un compact de E tels que $A \cap B = \emptyset$.
Montrer que
$$\exists \delta > 0,\ \forall a \in A,\ \forall b \in B,\ d(a,b) \geq \delta > 0.$$
Si B est uniquement fermé (et pas compact), la propriété est-elle encore vraie ?

On raisonne par l'absurde et on construit une suit $d(a_n, b_n)$ qui tend vers 0, mais B étant compact, on peut en extraire une suite $(b_{\rho(n)})$ convergente vers b et finalement $(a_{\rho(n)}$ converge aussi et $b \in A$, d'où la contradiction.
L'exemple $A = \{(x, \frac{1}{x}),\ x > 0\}$ et $B = \{(0, x),\ x \in \mathbb{R}\}$ vérifie $d(A, B) = 0$.

Exercice 4. Soit E un espace vectoriel normé, K un compact de E, $x \in K$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de K.

1. Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x si, et seulement si, toute sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ convergente a pour limite x.
2. Montrer que cette propriété est fausse si K n'est pas compact.

---

1. On sait que toute toute sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ d'une suite convergente (x_n) est convergente et converge vers $\lim x_n$.
Supposons que toute sous-suite convergente a pour limite x et supposns que (x_n) ne converge pas vers x : on pose $\rho(0) = 0$ et il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, il existe $\rho(n) > \rho(n-1)$ tel que $\|x_{\rho(n)} - x\| \geq \varepsilon$. Comme K est compact, la suite $(x_{\rho(n)})$ admet une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ convergente et donc converge vers x, ce qui contredit $\|x_{\varphi(n)} - x\| \geq \varepsilon$.
Donc (x_n) concerge vers x.
2. On pose la suite $u_{2n} = n$ et $u_{2n+1} = 1$. Toute sous-suite convergente tend vers 1 ! Maus la suite (u_n) n'est pas convergente.

Pour aller plus loin

Exercice 5. Soit E un $\mathbb{R}$ espace vectoriel normé de dimension finie.

1. Montrer que la boule unité fermée B_E de E est un convexe, compact, symétrique par rapport à 0.
2. Inversement, soit K un convexe, compact, symétrique par rapport à 0, tel qu'il existe $\rho > 0$, $B(0, \rho) \subset K$ (on dit que 0 est un point intérieur de K). On pose $J_K(0) = 0$ et, pour $x \in E \setminus \{0\}$, $J_K(x) = \inf\{r > 0,\ x/r \in K\}$. Montrer que J_K définit une norme sur E et décrire sa boule unité fermée.

---

1. La boule unité fermée est une partie fermée car $B_F(O, 1) = \varphi^{-1}([0, 1])$ avec $\varphi : E \to E$, $x \mapsto \|x\|$ une application 1-lipŝchitzienne, donc continue et $[0, 1]$ un fermé.
Elle est bornée par définition.
Si $x \in B_F(0, 1)$, alors $\|-x\| = \|x\| \leq 1$ et $-x \in B_F(0, 1)$. La boule unité est symétrique par rapport à 0.
Enfin, la boule unité est une partie convexe (cf cours).
2. On veut montrer ici la réciproque. On suppose, $\rho > 0$, $B(0, \rho) \subset K$. Pour $x \neq 0$ fixé, $A_x = \{r > 0,\ x/r \in K\}$ est non vide car contient $\dfrac{2\|x\|}{\rho}$ et minorée (par 0), donc la borne inférieure existe. De plus, $J_K(x) \neq 0$ car sinon $\displaystyle\lim_{t\to 0^+, x/t\in K} \frac{\|x\|}{r} = +\infty$, ce qui contredit l'hypothèse K bornée. Ce qui montre $J_K(x) = 0$ ssi $x = 0$.
De plus, $J_k(-x) = J_K(x)$ car K est symétrique par rapport à 0 et par définition, $J_K(\lambda x) = \lambda J_K(x)$ pour $\lambda > 0$. On en déduit $J_K(\lambda x) = |\lambda| J_K(x)$.
Si $x \in K$, alors $J_k(x) \leq 1$. Réciproquement, si $J_k(x) \leq 1$ et $x \neq 0$, alors il existe une suite (r_n) qui tend vers $J_K(x)$ telle que $\dfrac{x}{r_n} \in K$. Mais K est fermée, donc $\dfrac{1}{J_K(x)} x \in K$.Mais $0 \in K$, donc le segment $[0, \dfrac{1}{J_K(x)} x] \subset K$ puisque K est convexe. Comme par hypothèse, $\dfrac{1}{J_K(x)} \geq 1$, on en déduit que $x \in K$.
Ceci montre que K est bien la boule unité pour la "norme" J_K.
Pour montrer que J_K est bien une norme, il reste à vérfier l'inégalité triangulaire.
On a $\forall x, y \in E \setminus \{0\}$,
$$\frac{1}{J_K(x) + J_K(y)}(x + y) = \frac{J_K(x)}{J_K(x) + J_K(y)} \left(\frac{x}{J_K(x)}\right) + \frac{J_K(y)}{J_K(x) + J_K(y)} \left(\frac{y}{J_K(y)}\right) \in K$$

puisque K est convexe, $\dfrac{x}{J_K(x)} \in K$ et $\dfrac{y}{J_K(y)} \in K$. En effet,on pose $t = \dfrac{J_K(y)}{J_K(x)+J_K(y)} \in [0,1]$ dans la définition de la convexité. Par définition de la borne inférieure, on en déduit

$$J_K(x+y) = \inf\{r>0,\ \frac{x}{r} \in K\} \leq J_K(x) + J_K(y)$$

c'est-à-dire l'inégalité triangulaire.
On a donc montré que J_k est une norme et K est sa boule unité fermée.

Exercice 6. Soit E un espace vectoriel normé, K un compact de E et f une application de K dans K telle que

$$\forall x, y \in K,\ x \neq y\ \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|.$$

1. Montrer que f est continue et injective.
2. Montrer que f est surjective.
   <u>Indication :</u> On pourra procéder par l'absurde en prenant $x \in K \setminus f(K)$ et en posant la suite $x_0 = x$ et $x_{n+1} = f(x_n)$.

---

1. La fonction est 1-lipschitzienne, donc continue. De plus, $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$ montre que si $f(x) = f(y)$, alors $x = y$. et f est injective.
2. On procède par l'absurde : si f n'est pas surjective, alors il existe $x \in K \setminus f(K)$ et comme K est compact, $f(K)$ est compact. En particulier, $f(K)$ est fermé. On en déduit que $d(x, f(K)) = \delta > 0$.
   La suite (x_n) définie dans l'énoncé admet une sous-suite convergente $(x_{\varphi(n)}$ dans K, donc

$$\begin{aligned}
\|x_{\varphi(n+1)} - x_{\varphi(n)}\| &= \|f^{\varphi(n+1)}(x) - f^{\varphi(n)}(x)\| \\
&= \|f^{\varphi(n+1)-1}(x) - f^{\varphi(n)-1}(x)\| \quad \text{car} \quad \|f(x) - f(y)\| = \|x - y\| \\
&\ \ \vdots \\
&= \|f^{\varphi(n+1)-\varphi(n)}(x) - x\| \geq \delta > 0
\end{aligned}$$

   doit tendre vers 0, ce qui est absurde. D'où le résultat.