Feuille de TD n° 4 - corrigés
30 septembre 2020

Exercices Fondamentaux

Exercice 1. Soit

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & -d & c \\ -c & d & a & -b \\ -d & -c & b & a \end{pmatrix}$$

avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

1. Calculer ${}^tAA$. En déduire $\det A$.
2. Soient $a, b, c, d, a', b', c', d' \in \mathbb{Z}$. Montrer qu'il existe $a'', b'', c'', d'' \in \mathbb{Z}$ tels que :

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(a'^2+b'^2+c'^2+d'^2) = a''^2+b''^2+c''^2+d''^2$$

---

1. ${}^tAA = \text{Diag}(\delta, \delta, \delta, \delta)$ avec $\delta = a^2+b^2+c^2+d^2$. Par suite $\det A = \pm\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^2$. Or b, c, d fixés, par développement de déterminant, l'expression de $\det A$ est un polynôme en a unitaire de degré 4 donc
$$\det A = \left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^2$$
2. Avec des notations immédiates : $AA' = A''$ avec :
$$\begin{cases} a'' &= aa' - bb' - cc' - dd' \\ b'' &= ab' + b'a + cd' - dc' \\ c'' &= ac' - bd' + ca' + db' \\ d'' &= ad' + bc' - cb' + da' \end{cases}$$
Par égalité des déterminants et considération de signes
$$\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)^2\left(a'^2+b'^2+c^2+d'^2\right)^2 = \left(a''^2+b''^2+c''^2+d'^2\right)^2$$
et les quantités suivantes étant positives
$$\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right)\left(a'^2+b'^2+c^2+d'^2\right) = a''^2+b''^2+c''^2+d''^2$$
avec $a'', b'', c'', d'' \in \mathbb{Z}$ par opérations.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer

$$\begin{vmatrix} S_1 & S_1 & S_1 & \cdots & S_1 \\ S_1 & S_2 & S_2 & \cdots & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_n \end{vmatrix}$$

où pour tout $k \in [\![1, n]\!]$ on a $S_k = \sum_{i=1}^k i$.

Via $L_n \leftarrow L_n - L_{n-1}, L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_{n-2}, \ldots, L_3 \leftarrow L_3 - L_2, L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ (dans cet ordre)

$$\begin{vmatrix} S_1 & S_1 & S_1 & \cdots & S_1 \\ S_1 & S_2 & S_2 & \cdots & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_1 & S_2 & S_3 & \cdots & S_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} S_1 & S_1 & \cdots & \cdots & S_1 \\ & 2 & \cdots & \cdots & 2 \\ & & 3 & \cdots & 3 \\ & (0) & & \ddots & \vdots \\ & & & & n \end{vmatrix} = n!.$$

Exercice 3. Calculer

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} C_0^0 & C_1^1 & \cdots & C_n^n \\ C_1^0 & C_2^1 & \cdots & C_{n+1}^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_n^0 & C_{n+1}^1 & \cdots & C_{2n}^n \end{vmatrix}_{n+1}.$$

en notant par $C_n^k = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Indice : $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$.

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} C_0^0 & C_1^1 & \cdots & C_n^n \\ 0 & C_1^0 & \cdots & C_n^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & C_n^0 & \cdots & C_{2n-1}^{n-1} \end{vmatrix}_{n+1}.$$

En développant selon la première colonne

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} C_1^0 & \cdots & C_n^{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ C_n^0 & \cdots & C_{2n-1}^{n-1} \end{vmatrix}_n.$$

Via $C_n \leftarrow C_n - C_{n-1}, \ldots, C_2 \leftarrow C_2 - C_1$ et en exploitant $C_p^0 = C_{p+1}^0$, on obtient

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} C_0^0 & \cdots & C_{n-1}^{n-1} \\ \vdots & & \vdots \\ C_{n-1}^0 & \cdots & C_{2n-2}^{n-1} \end{vmatrix}_n = D_n.$$

Finalement $D_n = 1$.

Exercice 4. Pour $a \in \mathbb{K}^*$, calculer

$$D_n = \begin{vmatrix} 2a & a & & (0) \\ a & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a \\ 0) & & a & 2a \end{vmatrix}_n.$$

En développant par rapport à la première colonne, puis par rapport à la première ligne dans le second déterminant on obtient pour $n \geq 2$

$$D_n = 2aD_{n-1} - a^2 D_{n-2}.$$

En fait (D_n) est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $r^2 - 2ar + a^2 = 0$ de racines double a. On a alors $D_n = (\lambda n + \mu)a^n$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ $D_0 = 1$ et $D_1 = 2a$ donnent

$$D_n = (n+1)a^n$$

Exercice 5. Soient $\alpha \in \mathbb{C}$ et

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & \ddots & \alpha \\ \alpha & 0 & & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$$

1. Calculer $\det M$.
2. Déterminer, en fonction de α le rang de M.

---

1. En écrivant la première colonne comme somme de deux colonnes on obtient

$$\det M = 1 - (-1)^n \alpha^n.$$

2. — Si $\det M \neq 0$ alors M est inversible et $\operatorname{rg} M = n$;
   — Si $\det M = 0$ alors M n'est pas inversible donc $\operatorname{rg} M < n$. Or M possède une matrice extraite de rang $n-1$ donc $\operatorname{rg}(M) = n-1$.

   Finalement

$$\operatorname{rg} M = \begin{cases} n-1 & \text{si } -\alpha \in U_n \\ n & \text{sinon} \end{cases}$$

Exercices Supplémentaires

Exercice 6. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}, \quad a_{i,j} \in \{1, -1\}$. Montrer que : $2^{n-1} \mid \det A$.

En ajoutant la premiere colonne de A a chacune des suivantes, on obtient une matrice dont les colonnes d'indices 2 jusqu'à n ont pour coefficients 0, 2 ou -2. On peut donc factoriser 2 sur chacune de ces colonnes et l'on obtient

$$\det A = 2^{n-1} \det B$$

avec B une matrice dont les coefficients sont 0, 1 ou -1 de sorte que $\det B \in \mathbb{Z}$.

Exercice 7. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ (avec $n \geq 2$) telle que, pour tout $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$,

$$\det(A + X) = \det A + \det X$$

Montrer que $\det A = 0$, puis que $A = 0$.
Indice : penser à "J_r".

Pour $X = A$, la relation $\det(A + X) = \det A + \det X$ donne $2^n \det A = 2 \det A$ et donc $\det A = 0$. La matrice A n'est donc par inversible et en posant $r < n$ égal à son rang, on peut écrire $A = QJ_rP$ avec P, Q inversibles et

$$J_r = \begin{pmatrix} I_r & (0) \\ (0) & O_{n-r} \end{pmatrix}$$

Posons alors $X = QJ'_rP$ avec

$$J'_r = \begin{pmatrix} O_r & (0) \\ (0) & I_{n-r} \end{pmatrix}$$

Puisque $A+X = QI_nP = QP$, la matrice $A+X$ est inversible et donc $\det X = \det(A+X) \neq 0$
On en déduit que la matrice J'_r est l'identité et donc $r = 0$ puis $A = O_n$

Exercice 8. Pour $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$, on considère $a_i \in \mathbb{R}$ et $b_j \in \mathbb{R}$ tels que $a_i + b_j \neq 0$. Calculer

$$D_n = \det\left(\frac{1}{a_i + b_j}\right)_{1 \leq i,j \leq n} = \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & \frac{1}{a_{n-1}+b_n} \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_{n-1}} & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix}.$$

Traiter en particulier le cas où $\forall i \in [\![1, n]\!], a_i = b_i = i$.

Via $C_1 \leftarrow C_1 - C_n, \ldots, C_{n-1} \leftarrow C_{n-1} - C_n$ puis factorisation

$$D_n = \frac{(b_1 - b_n) \ldots (b_{n-1} - b_n)}{(a_1 + b_n) \ldots (a_n + b_n)} \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}b_{n-1}} & 1 \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_{n-1}} & 1 \end{vmatrix}.$$

Via $L_1 \leftarrow L_1 - L_n, \ldots, L_{n-1} \leftarrow L_{n-1} - L_n$ puis factorisation

$$D_n = \frac{(b_1 - b_n) \ldots (b_{n-1} - b_n)\,(a_1 - a_n) \ldots (a_{n-1} - a_n)}{(a_1 + b_n) \ldots (a_n + b_n)\,(a_n + b_1) \ldots (a_n + b_{n-1})} \begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_{n-1}} & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{a_{n-1}+b_1} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}+b_{n-1}} & 0 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Puis développer par rapport à la dernière colonne, on a

$$D_n = \frac{(b_1 - b_n) \ldots (b_{n-1} - b_n)\,(a_1 - a_n) \ldots (a_{n-1} - a_n)}{(a_1 + b_n) \ldots (a_n + b_n)\,(a_n + b_1) \ldots (a_n + b_{n-1})} D_{n-1}.$$

Par conséquent

$$D_n = \frac{\prod_{1 \le i < j \le n} (a_j - a_i)(b_j - b_i)}{\prod_{1 \le i, j \le n} (a_i + b_j)}.$$

Pour le cas où $\forall i \in [\![1, n]\!], a_i = b_i = i$, puisque

$$\prod_{1 \le i < j \le n} (j - i) = 1!2! \ldots (n-1)!$$

et

$$\prod_{1 \le i, j \le n} (i + j) = \frac{(n+1)!}{1!} \frac{(n+2)!}{2!} \cdots \frac{(2n)!}{n!}$$

on obtient dans le cas particulier

$$D_n = \frac{(1!2! \ldots (n-1)!)^3 n!}{(n+1)!(n+2)! \ldots (2n)!}$$

Exercice 9. Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ distincts et $P(X) = \prod_{i=1}^n (X - \lambda_i)$. Calculer

$$\Delta(X) = \begin{vmatrix} \frac{P(X)}{X - \lambda_1} & \frac{P(X)}{X - \lambda_2} & \cdots & \frac{P(X)}{X - \lambda_n} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-2} & \lambda_2^{n-2} & \cdots & \lambda_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Indice : utiliser le déterminants de Vandermonde.

En développant selon la première ligne, on peut affirmer que Δ est un polynôme de degré inférieur à $n-1$. Pour $k \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\Delta(\lambda_k) = (-1)^{k+1} \prod_{i \ne k} (\lambda_k - \lambda_i) V_{n-1}(\lambda_1, \ldots, \lambda_k, \ldots, \lambda_n) = (-1)^{n+1} V_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

où $V_n(a_1, \ldots, a_n)$ désigne le Vandermonde de $(a_1, \ldots, a_n)$ Le polynôme Δ coincide en n point avec le polynôme constant égal à $(-1)^{n+1} V_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, ils sont donc égaux.