Feuille de TD n° 5

Relations d'ordre, bornes supérieures et bornes inférieures et Théorème de Lagrange

21 novembre 2020

Exercice 1. On considère la relation $\preccurlyeq$ sur $\mathbb{N}$ définie par $x \preccurlyeq y$ si par définition, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $y = x^n$.

1. Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre. S'agit-il d'une relation d'ordre total ?
2. La partie $\{2, 3\}$ est-elle majorée ?

Exercice 2. Soient A et B deux parties non vides majorées de $\mathbb{R}$.

1. Démontrer que si $A \subset B$ alors $\sup(A) \leq \sup(B)$.
2. Démontrer que $A \cup B$ possède une borne supérieure et que $\sup(A \cup B) = \max(\sup(A), \sup(B))$.
3. Démontrer que $\sup(A + B) = \sup(A) + \sup(B)$.
4. Démontrer que pour tout $\lambda > 0$, $\sup(\lambda A) = \lambda \sup(A)$.

Exercice 3. Déterminer les bornes supérieure et inférieure des parties suivantes, après avoir justifié leur existence. Ces parties admettent-elles un maximum ou un minimum ?

1. $A = \left\{(-1)^n + \dfrac{1}{n+1} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$.
2. $B = \left\{\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{p} \mid (n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2\right\}$.

Exercice 4. Soient $(E, \preccurlyeq_E)$ et $(F, \preccurlyeq_F)$ deux ensembles ordonnés et A une partie non vide de E. Soit f une application croissante de E dans F, c'est-à-dire, telle que pour tout $(x, y) \in E^2$, si $x \preccurlyeq_E y$ alors $f(x) \preccurlyeq_F f(y)$.

1. Montrer que si $\max(A)$ existe, alors $\max(f(A))$ existe et est égal à $f(\max A)$.
2. Est-ce encore vrai si on remplace les max par des sup ?

Exercice 5. Soient A et B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ vérifiant les deux propriétés suivantes :

1. Pour tout $a \in A$ et tout $b \in B$, $a \leq b$,
2. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $a_0 \in A$ et $b_0 \in B$ tel que $b - a < \varepsilon$.

Montrer que $\sup(A) = \inf(B)$.

Exercice 6. Soit G un groupe d'ordre 8.

1. Soit $a \in G$, quelles valeurs peut prendre $\gamma(a)$ l'ordre de a ?
2. S'il existe $a \in G$, tel que $\gamma(a) = 8$, que dire de G ?
   On suppose désormais qu'il n'existe pas d'élements d'ordre 8.
3. Si pour tout $a \in G$, $\gamma(a) = 2$, montrer que G est commutatif et en déduire que G isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^3$.
4. On suppose qu'il existe $a \in G$ d'ordre 4.
   (a) Montrer qu'il existe $b \in G \backslash < a >$ d'ordre 2.
   (b) En déduire que si G est commutatif, $\varphi : \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times 2\mathbb{Z} \to G$, $(a, b) \mapsto ab$ est un isomorphisme de groupes.

L'exercice ci-dessous montre qu'il existe des groupes d'ordre 8 non abélien avec H isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 7. Le groupe $\mathfrak{Q}$ des quaternions (\四元群\) est le groupe engendré par deux éléments distincts i et j dont on note l'élément neutre e (différent de i et j) et qui vérifie en posant $k = ij$ et $m = i^2 \neq e$

$$i^4 = j^4 = e, \; i^2 = j^2 = m, \; k = ij = mji.$$

On a par exemple $k^2 = mjiij = mj^4 = m$.

1. Montrer que $\mathfrak{Q} = \{e, m, i, i^3, j, j^3, k, k^3\}$ est stable par multiplication : on écrira le tableau de multiplication des éléments de $\mathfrak{Q}$

$\circ$	e	m	i	i^3	j	j^3	k	k^3
e	e	m	i	i^3	j	j^3	k	k^3
m	m							
i	i							
i^3	i^3							
j	j							
j^3	j^3							
k	k							
k^3	k^3							

.

2. Vérifier que $\mathfrak{Q}$ est un groupe (on admettra que la loi est associative !).
3. Combien a-t-il d'éléments ?
4. Est-il commutatif ?

Indications

Exercice 1

1. Réflexivité et transitivité : faciles.
   Pour l'antisymétrie, montrer que l'on doit avoir $x = x^{nm}$ puis discuter selon les valeurs possibles de x, n et m.
2. Supposer par l'absurde qu'il y a un majorant M. Par définition, que vérifie ce majorant ?

Exercice 2

1. Justifier que $\sup(B)$ majore A puis conclure.
2. Montrer que $\max(\sup(A), \sup(B))$ majore $A \cup B$. Conclure que $\sup(A \cup B) \leq \max(\sup(A), \sup(B))$.
   Justifier que $\sup(A) \leq \sup(A \cup B)$ et $\sup(B) \leq \sup(A \cup B)$. Conclure.
3. **Rappel :** $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$.
   Montrer que $\sup(A) + \sup(B)$ majore $A + B$. Conclure que $\sup(A + B) \leq \sup(A) + \sup(B)$.
   L'inégalité inverse est plus difficile à obtenir.
   Soit $(a, b) \in A \times B$. Justifier que $a + b \leq \sup(A + B)$.
   En déduire que $\sup(A + B) - b$ majore A.
   Justifier que $b \leq \sup(A + B) - \sup(A)$ puis en déduire que $\sup(A) + \sup(B) \leq \sup(A + B)$.
4. **Rappel :** $\lambda A = \{\lambda x \mid x \in A\}$.
   Montrer que $\lambda \sup(A)$ majore λA. Justifier alors que $\sup(\lambda A) \leq \lambda \sup(A)$.
   L'inégalité inverse est plus difficile à obtenir.
   Que dire du cas où $\lambda = 0$?
   On suppose $\lambda \neq 0$. Poser $\lambda' = \dfrac{1}{\lambda}$ et $A' = \lambda A$.
   Appliquer l'inégalité $\sup(\lambda A) \leq \lambda \sup(A)$ en remplaçant λ par λ' et A par A' et conclure.

Exercice 3

1. *Vous pouvez faire un tableau avec les premiers éléments de A pour avoir une idée du résultat.*

   Justifier que A est minorée par -1 et trouver une suite d'éléments de A qui converge vers -1. Quel serait le minimum si A en admettait un ?

   Justifier que A est majorée par 2, conclure.

2. Justifier que A est minorée par -1 et trouver une suite d'éléments de A qui converge vers -1. Quel serait le minimum si A en admettait un ?

   Justifier que A est majorée par 1 et trouver une suite d'éléments de A qui converge vers 1. Quel serait le maximum si A en admettait un ?

Exercice 4

1. Supposons que $\max(A)$ existe. Considérer $a_0 = \max(A)$.
   Montrer que $f(a_0)$ majore $f(A)$ et justifier que $f(a_0) \in f(A)$. Conclure.
2. Considérer la fonction E partie entière de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $A = [0, 1[$.
   Que peut-on dire de $E(\sup(A))$ et de $\sup(E(A))$?

Exercice 5

On pourra commencer par justifier que $\sup(A)$ et $\inf(B)$ existent.

• Montrer que $\sup(A) \leq \inf(B)$: fixer $b \in B$ et justifier que $\sup(A) \leq b$. En déduire que $\sup(A) \leq \inf(B)$.

• Utiliser la caractérisation en ε de la borne supérieure pour A.

1\. Justifier que $\inf(B)$ majore A.

2\. Soit $\varepsilon > 0$. Il faut montrer qu'il existe $a_0 \in A$ tel que $\inf(B) - \varepsilon < a_0 \leq \inf(B)$.

Pour cela, utiliser la propriété 2. pour justifier qu'il existe $a_0 \in A$ et $b_0 \in B$ tel que $b_0 - \varepsilon < a_0$. Conclure.

Exercice 6

1. Que dit le théorème de Lagrange ?
2. Combien $< a >$ a-t-il d'éléments ? Pourquoi $< a > \subset G$? Conclure.
3. • Commutativité : Justifier que $abab = e$. En déduire que $ab = b^{-1}a^{-1}$. Conclure.

   • Soit $a \in G$ distinct de e. Combien $< a >$ a-t-il d'éléments ?

   Soit $b \in G$ tel que $b \notin < a >$ (pourquoi b existe-t-il ?) Justifier que $ab \notin \{e, a, b\}$ (on pourra raisonner par l'absurde). Combien $< a, b >$ a-t-il d'éléments ?

   Soit $c \in G$ tel que $c \notin < a, b >$. (pourquoi c existe-t-il ?) Justifier que $< a, b, c > = G$.

   Montrer que l'application $\varphi : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \longrightarrow G$; $(\overline{p}, \overline{q}, \overline{r}) \longmapsto a^p b^q c^r$ est bien définie et est un isomorphisme.
4. (a) Combien $< a >$ a-t-il d'éléments ? Justifier qu'il existe $b \in G$ tel que $b \notin < a >$. Quels sont les ordres possibles pour b ?

   Si l'ordre de b est 2, que peut-on conclure ?

   Si l'ordre de b est 4, quel est l'ordre de b^2 ?

   Si $b^2 \notin < a >$, que peut-on conclure ?

   Si $b^2 \in < a >$, calculer l'ordre de ab et montrer que $ab \notin < a >$. Que peut-on conclure ?

   (b) Montrer que φ est surjective : justifier que $\mathrm{Im}(\varphi)$ est un sous-groupe de G contenant au moins 5 éléments. Mais quels sont les ordres possibles pour $\mathrm{Im}(\varphi)$?

   On pourra ensuite conclure en utilisant la propriété suivante : Soit $f : E \longrightarrow F$ une application surjective. Si E et F ont le même nombre d'éléments alors f est bijective. (voir chapitre 5 d'algèbre 1).

Exercice 7

1. Utiliser les relations données dans l'énoncé. Dans le tableau, ne doivent apparaître que les éléments de $\mathfrak{Q}$.
   Par exemple, $m^2 = (i^2)^2 = ?$.
2. Revenir à la définition du cours.
3. Justifier que les éléments de $\mathfrak{Q}$ sont deux à deux distincts (on pourra raisonner par l'absurde).
4. S'aider du tableau : a-t-on toujours $ab = ba$?