ALG 1

Chap 3 : Les relations binaires

Cours 8 (1)

3. Relations d'ordre et ensembles ordonnés

3.1. Définitions et exemples.

Ex 20

- $\leq$:
  - $x \leq x$
  - si $x \leq y$ et $y \leq x$ alors $x = y$
  - si $x \leq y$ et $y \leq z$ alors $x \leq z$.
- $\subset$:
  - $A \subset A$
  - si $A \subset B$ et $B \subset A$ alors $A = B$
  - si $A \subset B$ et $B \subset C$ alors $A \subset C$.

Ex 22

- $\{a\}$ et $\{b\}$ ne sont pas comparables pour $\subset$

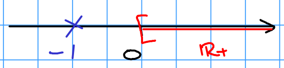
  $\{a\}$ et $\{a,b\}$ sont comparables : $\{a\} \subset \{a,b\}$.

Cours 8 (2)

3. Relations d'ordre et ensembles ordonnés

3.2. Majorant et minorant

Ex 27. • $A = \mathbb{R}_+$



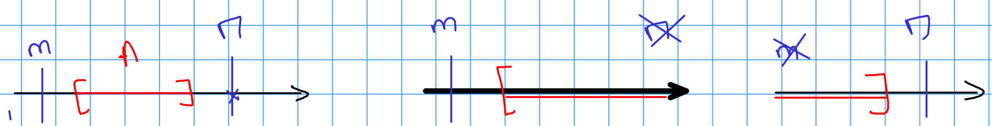
Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ $-1 \leq x$

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq x$

• $A = \mathcal{P}(E)$.

$\forall B \in \mathcal{P}(E)$ $m \subset B$, pour $B = \emptyset$, $m \subset \emptyset$, donc $m = \emptyset$

$\forall B \in \mathcal{P}(E)$ $B \subset M$, pour $B = E$, $E \subset M$, donc $M = E$



Cours 8 (3)

3. Relations d'ordre et ensembles ordonnés

3.3. Maximum et minimum.

$A = \{5, 3, 7, 2\}$ ↑ max ↑ min

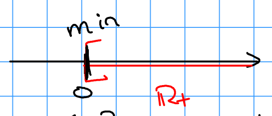
1 minore A
2 minore A

10 majore A
7 majore A

$10 \notin A$
$7 \in A$

$7 \in A$ et $7 \geq 5$, $7 \geq 3$, $7 \geq 7$, $7 \geq 2$

Ex 35 . • $0 = \min(\mathbb{R}_+)$



$0 \in \mathbb{R}_+$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $0 \leq x$.

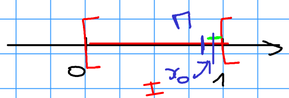
• $\emptyset = \min(\mathcal{P}(E))$.

$\emptyset \in \mathcal{P}(E)$ et pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, $\emptyset \subset A$

$E = \max(\mathcal{P}(E))$

$E \in \mathcal{P}(E)$ et pour tout $A \in \mathcal{P}(E)$, $A \subset E$

• $I = [0, 1[$



$0 \in I$ et $\forall x \in [0, 1[$, $0 \leq x$. Donc $0 = \min(I)$.

1 majore I : $\forall x \in I$, $x \leq 1$

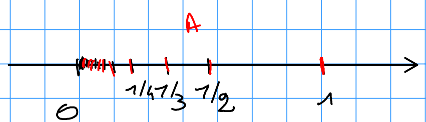
mais $1 \notin I$ donc $1 \neq$ "$\max(I)$"

Supposons que le maximum M existe. $M \in [0, 1[$ donc $M < 1$

Posons $x_0 = \dfrac{1+M}{2}$. Alors $x_0 \in I$ car $x_0 < 1$

et $M < x_0$. Absurde car M maximum.

•

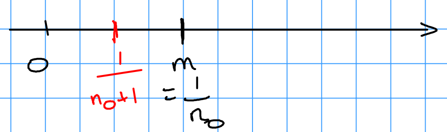


$A = \left\{ \frac{1}{n},\ n \in \mathbb{N}^* \right\}$

$= \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \right\}$

$1 = \max(A)$ car $1 \in A$ $\left(1 = \frac{1}{1}\right)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{n} \leq 1$

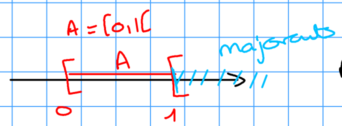
$0 \leq \frac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ mais $0 \notin A$.



3. Relations d'ordre et ensembles ordonnés

Cours 8 (4)

3.4. Borne supérieure et borne inférieure.



A n'a pas de maximum.

Ex 41 •