3. Relations d'ordre et ensembles ordonnés

4. Borne supérieure et borne inférieure

b) Cas de l'ensemble ordonné $(\mathbb{R}, \leq)$

$A = \{x \in \mathbb{Q},\ x^2 \leq 2\}$ n'admet pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$.

$M = \sup A$ si par définition, M est le plus petit des majorants.

Donc M majorant de A.

Si $x \in \mathbb{R}$ tel que $x < M$ alors x n'est pas un majorant

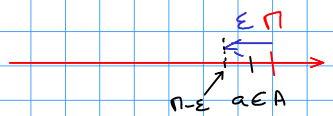
x_0 est un majorant de B si : $\forall b \in B\ \ b \leq x_0$

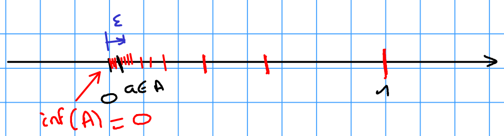
x_0 n'est pas un majorant de B : $\exists b \in B$ tel que $b > x_0$

Donc il existe $a \in A$ tel que $x < a \leq M$.

Si M' est un majorant de A tel que $M' < M$

donc par 2., il existe $a \in A$ tel que $M' < a \leq M$. Absurde car M' majore A

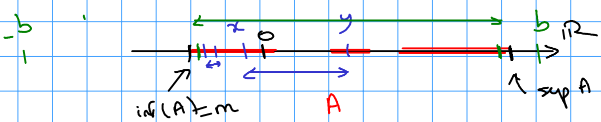




① 0 minore A

② Soit $\varepsilon > 0$.

Ex 47. $E = \{|x-y|,\ (x,y) \in A^2\}$



$\delta = \sup A - \inf A$.

$\sup E = M - m$

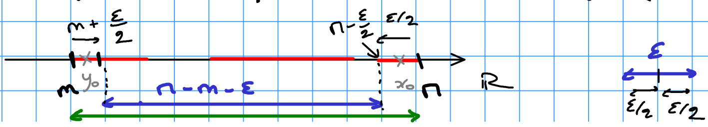
① $M - m$ majore E.

$d = |x_0 - y_0|$

Soit $(x,y) \in A^2$. Montrons que $|x-y| \leq M - m$. ✓

② Soit $\varepsilon > 0$. Montrons qu'il existe $d \in E$ tel que $M - m - \varepsilon < d \leq M - m$,

ie il existe $(x_0, y_0) \in A^2$ tel que $M - m - \varepsilon < |x_0 - y_0| (\leq M - m)$



$M - m$

<u>Prop 48</u>. ① $b \geq b - \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, donc b est un majorant de B

② Soit $\varepsilon > 0$. Prenons $b_0 = b - \frac{\varepsilon}{2} \in B$ tel que

$$b - \varepsilon < b_0 \leq b .$$

Donc par caractérisation de la borne supérieure, $b = \sup B$.

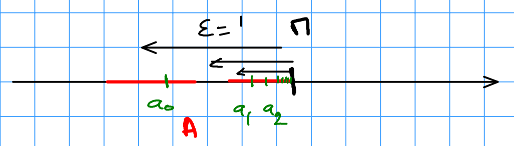
$B =]-\infty, b[$ $\qquad \sup B = b$.

3. Relations d'ordre et ensembles ordonnés

Cours 9 (2)

4. Borne supérieure et borne inférieure

b) Cas de l'ensemble ordonné $(\mathbb{R}, \leq)$



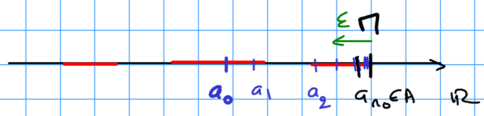
$\varepsilon = 1$ $\qquad \varepsilon = \frac{1}{n}$

$\varepsilon = \frac{1}{2}$

$\varepsilon = \frac{1}{3}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons $\varepsilon = \frac{1}{n}$. Il existe $a_n \in A$ tel que $M - \varepsilon < a_n \leq M$

$M - \frac{1}{n} < a_n \leq M$.



$$\frac{n}{n+2} = \frac{n}{n\left(1 + \frac{2}{n}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{2}{n}} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 1$$

1. Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

1.1. Définitions et premières propriétés

$6 = 3 \times 2$, $a = 1 \times a$, $a = (-1) \times (-a)$

L'ensemble des multiples de a est $\{ b \mid \exists k \in \mathbb{Z}, b = ka \}$

$= \{ ka \mid k \in \mathbb{Z} \} = \{ ak, k \in \mathbb{Z} \}$

$= a\mathbb{Z}$

$-3\mathbb{Z} = 3\mathbb{Z}$ $n\mathbb{Z}$

$-a\mathbb{Z} = a\mathbb{Z}$.

$2n+3 \mid \underbrace{u}_{-3}(2n+3) + \underbrace{v}_{2}(3n+7) = -9 + 14 = 5$.

$E(x) \leq x < E(x) + 1$.

$0 \leq r_1 < b$ $0 \leq r_2 < b$ $-b < -r_2 \leq 0$

$-b < r_1 - r_2 < b$ donc $|r_1 - r_2| < b$.