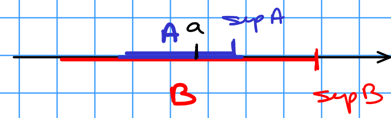
TD 5 - Algèbre 1 - Géométrie 1

Exercice 2 $\sup A$ et $\sup B$ existent (cours).

1. Sup $A \subset B$.



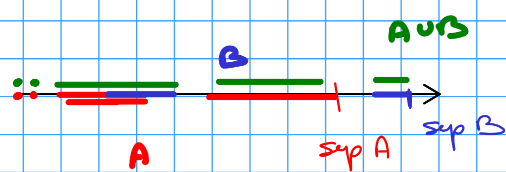
Soit $a \in A$.

Comme $\sup B$ majore B ($\forall b \in B \quad b \leq \sup B$) et $a \in B$,

donc $a \leq \sup B$.

Donc $\sup B$ majore A. Or $\sup A$ est le plus petit des majorants de A. Donc $\sup A \leq \sup B$.

2.



Soit $x \in A \cup B$.

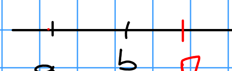
1er cas : $x \in A$. Donc $x \leq \sup A \leq \max(\sup A, \sup B)$

2nd cas : $x \in B$. Donc $x \leq \sup B \leq \max(\sup A, \sup B)$.

Dans tous les cas, $x \leq \underbrace{\max(\sup A, \sup B)}_{\text{majore } A \cup B}$.

Donc $\sup A \cup B \leq \max(\sup A, \sup B)$.

$A \subset A \cup B$, $\sup A \leq \sup(A \cup B)$



$B \subset A \cup B$, $\sup B \leq \sup(A \cup B)$.

$\max(\sup A, \sup B) \leq \sup(A \cup B)$.

3. - $A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$

• Soit $x \in A + B$.

$x = \underset{\in A}{a} + \underset{\in B}{b} \leq \underbrace{\sup A + \sup B}_{\text{majore } A+B}$, donc $\sup A + B \leq \sup A + \sup B$ car ...

- Soient $(a,b) \in A \times B$.

$a+b \in A+B$, donc $a+b \leq \sup(A+B)$

Donc $a \leq \underbrace{\sup(A+B)-b}_{\text{majore } A}$, $\sup A \leq \sup(A+B) - b$

Donc $b \leq \underbrace{\sup(A+B)-\sup(A)}_{\text{majore } B}$, $\sup B \leq \sup(A+B) - \sup A$.

Donc $\sup A + \sup B \leq \sup(A+B)$.

4. Soit $\lambda > 0$ On a $\lambda A = \{\lambda a, a \in A\}$.

Soit $x \in \lambda A$. Alors $x = \lambda \underset{\in A}{\underset{\uparrow}{a}} \leq \underbrace{\lambda \sup A}_{\text{majore } \lambda A}$.

Donc $\sup(\lambda A) \leq \lambda \sup(A)$.

- Posons $\lambda' = \frac{1}{\lambda} > 0$ et $A' = \lambda A$.

Alors $\sup(\lambda' A') \leq \lambda' \sup(A')$.

Donc $\sup\left(\frac{1}{\lambda}\lambda A\right) \leq \frac{1}{\lambda}\sup(\lambda A)$,

$\sup(A) \leq \frac{1}{\lambda}\sup(\lambda A)$. $\times \lambda > 0$.

$\lambda \sup(A) \leq \sup(\lambda A)$

<u>Méthode</u> : Pour montrer que $\sup(A) \leq M$:

Soit $a \in A$. On montre que $a \leq M$.

a étant un élément quelconque de A, M majore A.

Or $\sup(A)$ est le plus petit des majorants de A,

$\sup A \leq M$.

Exercice 3

1\. $\underset{\in A}{\underset{\uparrow}{2}}, -\frac{1}{2}, \frac{4}{3}, -1+\frac{1}{4} = -\frac{3}{4}, \dots$

- $(-1)^n + \frac{1}{n+1} \leq 1 + 1 = 2$, $\forall a \in A$, $a \leq 2$.

A est majorée par 2 et A est non vide, sup A existe donc $\sup A \leq 2$.

Donc $2 = \max(A) = \sup A$.

- $\underbrace{-1 + 0}_{= -1} \leq (-1)^n + \frac{1}{n+1}$, $\forall a \in A$ $-1 \leq a$.

A est minorée par -1, $A \neq \emptyset$ donc inf A existe et $\inf(A) \geq -1$.

$u_p = \underbrace{(-1)^{2p+1} + \frac{1}{2p+2}}_{\in A \text{ avec } n = 2p+1} = -1 + \frac{1}{2p+2} \xrightarrow[p \to +\infty]{} -1$. Donc $\inf A = -1$.

$-1 \in A$, or $-1 < (-1)^n + \frac{1}{n+1}$

Donc A n'a pas de minimum.

2\.

$p \backslash n$	1	2	3	4
1	0	$-1/2$	$-2/3$	
2	$1/2$	0		
3	$2/3$		0	
4				0

$\frac{1}{n} - \underbrace{\frac{1}{p}}_{>0} \leq \frac{1}{n} \leq 1$ 1 majore B. Donc $\sup B \leq 1$.

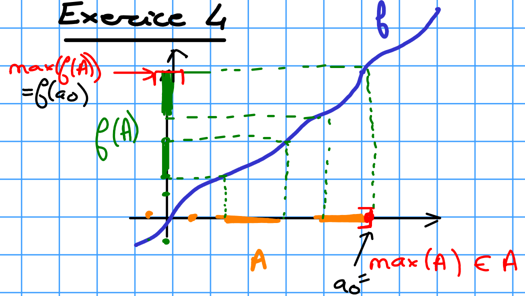
$\underbrace{\frac{1}{1} - \frac{1}{p}}_{\in B} = 1 - \frac{1}{p} \xrightarrow[p \to +\infty]{} 1$. $\sup B = 1$.

$1 \in B$? non, $1 > \underbrace{\frac{1}{n}}_{\leq 1} - \frac{1}{p}$

$\frac{1}{n} - \frac{1}{p} \geq -\frac{1}{p} \geq -1$ -1 minore B. Donc $\inf B \geq -1$.

$\underbrace{\frac{1}{n} - \frac{1}{1}}_{\in B} = \frac{1}{n} - 1 \xrightarrow[n \to +\infty]{} -1$. Donc $\inf B = -1$.

Exercice 4



$E = \mathbb{R}$

$(\mathbb{R}, \leq)$

1. Supposons que $\max(A)$ existe.

Montrons que $\max(f(A))$ existe et

$\max(f(A)) = f(\max(A))$.

Rappel. $f(A) = \{f(a), a \in A\}$. Posons $a_0 = \max(A)$.

Alors $a_0 \in A$ et pour tout $a \in A$, $a \leq_E a_0$.

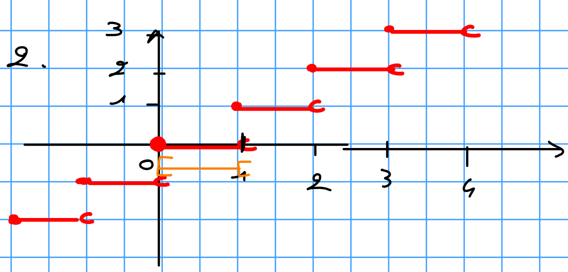
Donc par croissance de f, $f(a) \leq_F f(a_0)$.

Donc $f(a_0)$ majore $f(A)$. Or $a_0 \in A$ donc $f(a_0) \in f(A)$.

Donc $f(A)$ admet un maximum, égal à $f(a_0)$.

Or $f(a_0) = f(\max(A))$. Donc $\max(f(A)) = f(\max(A))$.

2.



$E(1) = 1$

$E(0,9) = 0$

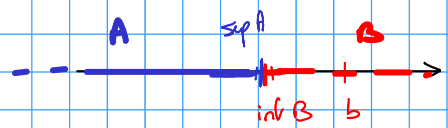
$E(1,1) = 1$

$A = [0,1[$. $\sup A = 1$ $E(\sup A) = E(1) = 1$

$E([0,1[) = \{E(x), 0 \leq x < 1\} = \{0\}$, $\sup(E([0,1[)) = \sup\{0\} = 0$

$E(\sup A) \neq \sup(E(A))$.

Exercice 5



$A = \mathbb{R}_-^*$

$B = \mathbb{R}_+^*$.

. Soit $b \in B$. D'après 1, pour tout $a \in A$, $a \le \underbrace{b}_{\text{majore } A}$.

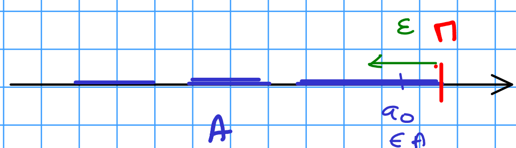
Donc A est non vide et majorée, donc $\sup A$ existe

et $\underbrace{\sup A}_{\text{minore } B} \le b$.

Donc B est non vide et minorée, donc $\inf B$ existe

et $\sup A \le \inf B$.

. Posons $m = \inf B$. Montrons que $\sup A = m$.



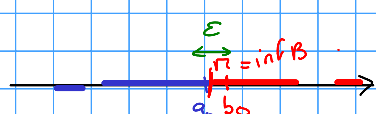
① m majore A.

② Soit $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$. Montrons qu'il existe $a_0 \in A$ tel que

$m - \varepsilon < a_0 \le m$.

↑ à déterminer.

Or d'après 2, il existe $a_0 \in A$ et $b_0 \in B$ tels que $b_0 - a_0 < \varepsilon$.



On a $b_0 - \varepsilon < a_0$. Or $\inf B \le b_0$.

Donc $\underbrace{\inf B}_{= m} - \varepsilon \le b_0 - \varepsilon < a_0 \le m$.

Donc d'après la caractérisation de la borne supérieure,

$\sup A = m = \inf B$.