北航中法工程师学院
Centrale Pékin

# Algèbre 1

École Centrale de Pékin

*Cours de mathématiques du cycle préparatoire*

1er novembre 2020

# Table des matières

# Chapitre 1 Ensembles

## Table des matières du chapitre



## 1.1 Premières définitions et notations

Dans cette première partie, nous revenons sur les notions d'ensemble, d'élément, d'appartenance et d'inclusion.

Définition 1

- *Un* ***ensemble*** $E$ *est une collection d'objets, appelés* ***éléments*** *de* $E$.
- *On dit que* $x$ ***appartient*** *à* $E$ *si* $x$ *est un élément de l'ensemble* $E$*, et on note* $x \in E$.
- *Deux ensembles* $E$ *et* $F$ *sont* ***égaux*** *s'ils ont les mêmes éléments :* $\forall x, (x \in E \Leftrightarrow x \in F)$.
  *On note* $E = F$.

On privilégie les lettres capitales ($E$, $X$, $A$, ...) pour désigner les ensembles et les lettres minuscules ($a$, $b$, $x$, ...) pour désigner leurs éléments.

Un ensemble n'est pas forcément un ensemble de nombres. Si $E$ est l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ alors $x$ désigne un nombre réel, mais si $E$ est l'ensemble des suites réelles, alors $x$ désigne une suite réelle ou si $E$ est l'ensemble des droites du plan, alors $x$ désigne une droite du plan.

Il existe plusieurs façons de décrire un ensemble.

- On peut donner la liste de tous les éléments de l'ensemble $E$ entre accolades $\{\ \}$, les éléments étant séparés par des virgules. Soit on explicite tous les éléments de $E$, par exemple $E = \{a, b, c, d\}$, soit on en écrit seulement quelques-uns suivis de points de suspension, par exemple $E = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.
  L'ordre des éléments n'a aucune importance : les ensembles $\{a, b\}$ et $\{b, a\}$ sont égaux. De plus, un élément ne peut pas appartenir plusieurs fois à un ensemble et s'il apparait plusieurs fois dans la liste, il s'agit en fait du même élément : les ensembles $\{a, b, a\}$ et $\{a, b\}$ sont égaux car ils ont les mêmes éléments. Par convention, chaque élément est généralement énuméré une seule fois.
- On peut définir un ensemble $F$ par une propriété $\mathcal{P}$ qui caractérise les éléments de $F$ parmi les éléments d'un ensemble connu $E$ : $F = \{x \in E \mid \mathcal{P}(x)\}$. On dit que $F$ est l'ensemble des éléments $x$ de $E$ tels que $x$ vérifie la propriété $\mathcal{P}$.
  Cas particulier : Si $F$ est un sous-ensemble de $E$ et $f$ est une application[1] de $E$ dans $F$, alors l'ensemble $\{y \in F \mid \exists\, x \in E,\ y = f(x)\}$ se note plus simplement $\{f(x),\ x \in E\}$ en remplaçant $f(x)$ par son expression. On dit que c'est l'ensemble des $f(x)$ lorsque $x$ parcourt $E$.
  Par exemple, $\{x^2,\ x \in \mathbb{N}\} = \{0^2, 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, \dots\}$.

1. La notion d'application sera introduite dans le chapitre 2. Intuitivement, une application de $E$ dans $F$ associe à chaque élément de $E$ un élément de $F$.

Exemples 2

- *L'ensemble $E$ des entiers naturels $n$ tels que $n$ est inférieur ou égal à 4 peut s'écrire*

$$E = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 4\} \text{ ou } E = \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

- *Soit $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble $E$ des entiers naturels $m$ tels que $1 \leq m \leq n$ peut s'écrire*

$$E = \{m \in \mathbb{N} \mid 1 \leq m \leq n\} \text{ ou } E = \{1, \dots, n\}.$$

  *On utilise également la notation $[\![1, n]\!]$ pour désigner cet ensemble.*
  *Plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{N}$ tels que $n \leq p$, les notations $\{n, \dots, p\}$ ou $[\![n, p]\!]$ désignent l'ensemble des entiers naturels compris entre $n$ et $p$.*

- *L'ensemble $P$ des entiers naturels pairs peut s'écrire*

$$P = \{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ est pair }\} \text{ ou } P = \{2k,\ k \in \mathbb{N}\},$$

  *Cet ensemble est encore noté parfois $2\mathbb{N}$.*

- *L'ensemble des nombres réels $x$ tels que $0 \leq x \leq 1$ peut s'écrire*

$$\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}.$$

  *Il s'agit de l'intervalle noté $[0, 1]$.*
  *Plus généralement, pour tout $a$ et tout $b$ éléments de $\mathbb{R}$, l'ensemble $\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ est l'intervalle noté $[a, b]$.*

Définition 3

- *On appelle* ***ensemble vide*** \空集\, *noté $\emptyset$, l'ensemble ne contenant aucun élément.*
- *Un ensemble constitué d'un unique élément $x$ est appelé un* ***singleton*** \单元集\. *Il est donc de la forme $\{x\}$.*
- *Un ensemble constitué de deux éléments distincts $a$ et $b$ est appelé une* ***paire*** \二元集合\. *Il est donc de la forme $\{a, b\}$.*

Remarque 4 — *On a bien sûr $\{a, b\} = \{b, a\}$.*

Définition 5
*Soient $E$ et $F$ deux ensembles.*

- *On dit que $E$ est* ***inclus*** \包含\ *dans $F$ si tout élément de $E$ est un élément de $F$ :*

$$\forall x,\ (x \in E \Rightarrow x \in F) \text{ ou encore } \forall x \in E,\ x \in F.$$

  *On note $E \subset F$. On dit aussi que $E$ est une* ***partie*** *(ou un sous-ensemble) de $F$.*
- *On dit que $E$ est* ***strictement inclus*** *dans $F$ si $E \subset F$ et $E \neq F$.*

Méthode 6 — *Ainsi, pour démontrer que $E$ est inclus $F$, on commence par se donner un élément quelconque $x$ de $E$ en écrivant « Soit $x \in E$. » Il s'agit ensuite de montrer que $x$ est un élément de $F$.*

Exemples 7

- *Tout ensemble $E$ est inclus dans lui-même : $E \subset E$.*
- *L'ensemble vide est inclus dans tout ensemble $E$ : $\emptyset \subset E$.*
- *L'ensemble $\{a, c\}$ est strictement inclus dans l'ensemble $\{a, b, c\}$ : $\{a, c\} \subset \{a, b, c\}$.*
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, *les inclusions étant strictes.*
- $[0, 1] \subset \mathbb{R}$.
- $\{2p \mid p \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}$.

Il ne faut pas confondre l'appartenance et l'inclusion : on a $2 \in \{2,4,5\}$ mais $2 \not\subset \{2,4,5\}$, et $\{2\} \subset \{2,4,5\}$ mais $\{2\} \notin \{2,4,5\}$.

Le résultat suivant, élémentaire, est très utile en pratique.

PROPOSITION 8 (Principe de double-inclusion)
*Soient $E$ et $F$ deux ensembles. On a $E = F$ si et seulement si $E \subset F$ et $F \subset E$.*

MÉTHODE 9 — *Pour prouver l'égalité de deux ensembles $E$ et $F$,*

- *soit on raisonne par équivalence en montrant la propriété :*

$$\forall x,\ (x \in E \Leftrightarrow x \in F)$$

- *soit, et c'est le plus courant, on utilise le principe de double-inclusion en montrant les deux propriétés :*

$$\forall x \in E,\ x \in F \quad \text{et} \quad \forall x \in F,\ x \in E.$$

Illustrons cette méthode sur deux exemples, l'un utilisant un raisonnement par équivalence, l'autre le principe de double inclusion.

EXERCICE 10 —

- *Montrer que $\{z \in \mathbb{C}^* \mid \overline{z} = z^2\} = \{1, j, j^2\}$, où $j = \mathrm{e}^{\frac{2i\pi}{3}}$.*

  ***Preuve*** — *Raisonnons par équivalence. Posons $A = \{z \in \mathbb{C}^* \mid \overline{z} = z^2\}$*
  *Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Il existe $r \in \mathbb{R}_+^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $z = re^{i\theta}$.*
  *Ainsi, $z \in A$ si et seulement si $\overline{z} = z^2$, soit encore si et seulement si $re^{-i\theta} = r^2e^{2i\theta}$, et $r$ étant non nul, si et seulement si $re^{3i\theta} = 1$.*
  *Or $re^{3i\theta} = 1$ si et seulement si $r = 1$ et $3\theta \equiv 0\ [2\pi]$ soit encore, $r = 1$ et $\theta \equiv 0\ [2\pi/3]$.*
  *Donc $z \in A$ si et seulement si $z \in \{1, j, j^2\}$.*
  *D'où $\{z \in \mathbb{C}^* \mid \overline{z} = z^2\} = \{1, j, j^2\}$.* □

- *Soient $a$ et $b$ deux réels tels que $a \leq b$.*
  *Montrer que*

$$[a,b] = \{(1-t)a + tb \mid t \in [0,1]\}.$$

  ***Preuve*** — *On exclut le cas trivial où $a = b$ et donc $[a,b] = \{a\}$, et on suppose dans la suite que $a \neq b$.*
  *Raisonnons par double-inclusion.*
  *▷ Soit $x \in [a,b]$. Posons $t_0 = \dfrac{x-a}{b-a}$, bien défini car $b - a \neq 0$, de sorte que $x = (1-t_0)a + bt_0$. Comme $a \leq x \leq b$, on a $0 \leq x - a \leq b - a$ et donc, $b - a$ étant strictement positif, $0 \leq \dfrac{x-a}{b-a} \leq 1$, soit encore $0 \leq t_0 \leq 1$. Donc $x = (1-t_0)a + t_0b \in \{(1-t)a + tb \mid t \in [0,1]\}$.*
  *D'où l'inclusion $[a,b] \subset \{(1-t)a + tb \mid t \in [0,1]\}$.*
  *◁ Réciproquement, soit $x \in \{(1-t)a + tb \mid t \in [0,1]\}$. Il existe $t_0 \in [0,1]$ tel que $x = (1-t_0)a + t_0b$.*
  *On a $0 \leq t_0 \leq 1$ et donc $0 \leq 1 - t_0 \leq 1$. De l'inégalité $a \leq b$ et par positivité de $t_0$ et de $1 - t_0$, on a $t_0a \leq t_0b$ et $(1-t_0)a \leq (1-t_0)b$. On obtient donc $(1-t_0)a + t_0a \leq (1-t_0)a + t_0b \leq (1-t_0)b + t_0b$, soit après simplification $a \leq x \leq b$. Donc $x \in [a,b]$.*
  *D'où la seconde inclusion $\{(1-t)a + tb, t \in [0,1]\} \subset [a,b]$.*
  *De ces deux points, il vient $[a,b] = \{(1-t)a + tb \mid t \in [0,1]\}$.* □

## 1.2 ENSEMBLE DES PARTIES D'UN ENSEMBLE

Dans cette partie, après avoir introduit l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties d'un ensemble, nous étudions différentes opérations dans $\mathcal{P}(E)$ et leurs propriétés.

Dans toute cette partie, $E$ désigne un ensemble et $A$, $B$ et $C$ désignent des parties (ou sous-ensembles) de $E$.

### 1.2.1 Définition

DÉFINITION 11
*On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties \幂集\ de $E$ : $\mathcal{P}(E) = \{A \mid A \subset E\}$.*

$\mathcal{P}(E)$ est donc l'ensemble dont les éléments sont les sous-ensembles de $E$ : $A \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow A \subset E$. Ainsi, une partie $A$ de $E$ est à la fois un sous-ensemble de $E$ ($A \subset E$) et un élément de $\mathcal{P}(E)$ ($A \in \mathcal{P}(E)$).

EXEMPLES 12

- *Considérons l'ensemble $E = \{0, 1\}$. Les parties de $E$ sont celles à 0 élément, $\emptyset$, celles à un élément, $\{0\}$ et $\{1\}$, et celles à deux éléments, $E = \{0, 1\}$.*
  *Donc $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$.*
- *Si $E = \emptyset$ alors $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset\}$ et donc $\mathcal{P}(E)$ n'est pas vide.*
- *On a $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ et $\mathbb{Q} \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$.*
- *On a $\pi \in \mathbb{R}$, $\{\pi\} \subset \mathbb{R}$ et $\{\pi\} \in \mathcal{P}(\mathbb{R})$.*

REMARQUE 13 — *Puisque que $E \subset E$ et $\emptyset \subset E$, on a $E \in \mathcal{P}(E)$ et $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$. Ainsi, $\mathcal{P}(E)$ n'est jamais vide.*

### 1.2.2 Union et intersection de deux parties

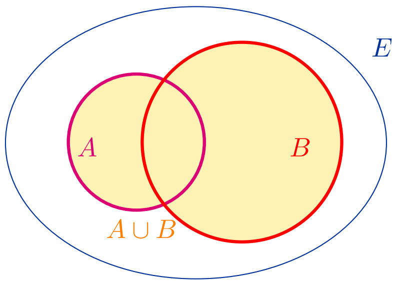
DÉFINITION 14 (Union, intersection)

- *On appelle **union** \并集\ de $A$ et $B$, notée $A \cup B$ (se lit « $A$ union $B$ »), l'ensemble des éléments de $E$ appartenant soit à $A$, soit à $B$ :*

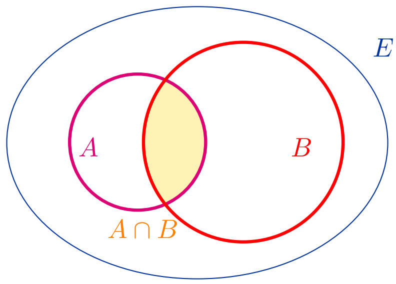
$$A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

- *On appelle **intersection** \交集\ de $A$ et $B$, notée $A \cap B$ (se lit « $A$ inter $B$ »), l'ensemble des éléments de $E$ appartenant à la fois à $A$ et à $B$ :*

$$A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}.$$




Union




Intersection

PROPOSITION 15

- *L'union $A \cup B$ vérifie :*
  - *$A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$.*
  - *Si $A \subset C$ et $B \subset C$ alors $A \cup B \subset C$.*

  *On dit que $A \cup B$ est le plus petit ensemble au sens de l'inclusion qui contient $A$ et $B$.*
- *L'intersection $A \cap B$ vérifie :*
  - *$A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$.*
  - *Si $C \subset A$ et $C \subset B$ alors $C \subset A \cap B$.*

  *On dit que $A \cap B$ est le plus grand ensemble au sens de l'inclusion qui est inclus dans $A$ et dans $B$.*

**Preuve** — Démontrons le premier point.

– Les propriétés $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$ sont évidentes car, par exemple, si $x$ appartient à $A$ alors il appartient à $A$ ou à $B$ (puisqu'il appartient à $A$ !), et donc à $A \cup B$.

– Supposons que $A \subset C$ et $B \subset C$. Soit $x \in A \cup B$. Montrons que $A \cup B \subset C$.

Par définition de l'union, $x \in A$ ou $x \in B$.

1^er cas : $x \in A$. Alors $x \in C$ car par hypothèse $A \subset C$.

2^nd cas : $x \in B$. Alors $x \in C$ car par hypothèse $B \subset C$.

Donc dans tous les cas, $x \in C$.

Donc $A \cup B \subset C$.

□

Remarque 16 — *On en déduit facilement les inclusions et égalités suivantes.*

- $A \cap B \subset A \subset A \cup B$ *et* $A \cap B \subset B \subset A \cup B$.
- $A \cup \emptyset = A$ *et* $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cup E = E$ *et* $A \cap E = A$.
- *Si* $A \subset B$ *alors* $A \cup B = B$ *et* $A \cap B = A$.

Définition 17
*On dit que $A$ et $B$ sont* ***disjoints*** *si* $A \cap B = \emptyset$.

*L'union $A \cup B$ est alors souvent notée $A \sqcup B$.*

Deux ensembles sont disjoints si et seulement s'ils n'ont aucun élément en commun. Attention, deux ensembles peuvent être distincts (c'est-à-dire qu'ils ne sont pas égaux) mais non disjoints : $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{3, 4, 5\}$ sont distincts car ils n'ont pas les mêmes éléments mais ils ne sont pas disjoints car 2 appartient à $A$ et à $B$.

Les propositions 18 et 19 découlent directement des propriétés usuelles des connecteurs logiques « et » et « ou ». Elles se visualisent facilement sur des dessins.

Proposition 18 (Commutativité \交换律\, associativité \结合律\)

- $\cup$ *et* $\cap$ *sont* ***commutatives*** *:* $A \cup B = B \cup A$ *et* $A \cap B = B \cap A$.
- $\cup$ *et* $\cap$ *sont* ***associatives*** *:* $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ *et* $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

**Preuve** — Traitons, par exemple, la première égalité du deuxième point, découlant de l'associativité de l'opération logique "ou" $\vee$. Les autres se démontrent en suivant le même modèle.

Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B) \cup C \Leftrightarrow\ & x \in (A \cup B) \text{ ou } x \in C \Leftrightarrow (x \in A \text{ ou } x \in B) \text{ ou } x \in C \\ & \Leftrightarrow x \in A \text{ ou } (x \in B \text{ ou } x \in C) \Leftrightarrow x \in A \text{ ou } x \in B \cup C \\ & \Leftrightarrow x \in A \cup (B \cup C). \end{aligned}$$

Donc $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$. □

Proposition 19 (Distributivité \分配率\)

- *L'union est distributive sur l'intersection :*

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C).$$

- *L'intersection est distributive sur l'union :*

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

**Preuve** — La première égalité découle de l'équivalence des propositions $p \vee (q \wedge r)$ et $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$. La seconde égalité découle de l'équivalence des propositions $p \wedge (q \vee r)$ et $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$. □

### 1.2.3 Différence de deux parties et complémentaire

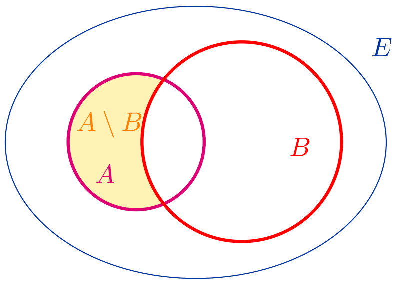
Définition 20

- *On appelle* ***différence*** $A \setminus B$ *(se lit « $A$ privé de $B$ » ou « $A$ moins $B$ ») l'ensemble des éléments de $A$ n'appartenant pas à $B$ :*

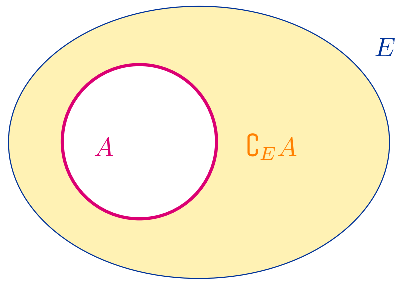
$$A \setminus B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}.$$

- *On appelle* ***complémentaire*** \补集\ *de $A$ dans $E$, noté $\complement_E A$, la différence $E \setminus A$ :*

$$\complement_E A = \{x \in E \mid x \notin A\}.$$



Différence



Complémentaire

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur l'ensemble $E$ considéré, on peut noter plus simplement $\complement A$ ou $\overline{A}$ (se lit « $A$ barre »).

Exemples 21

- $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $[0,2] \setminus [1,3] = [0,1[$.
- $\complement_{[0,1]} \left[0, \frac{1}{2}\right] = \left]\frac{1}{2}, 1\right]$.

Les propriétés suivantes découlent à nouveau des propriétés des opérateurs logiques. Elles se visualisent facilement sur des dessins.

Proposition 22 (Propriétés du complémentaire)

- $\complement_E(A \cup B) = \complement_E A \cap \complement_E B$.
- $\complement_E(A \cap B) = \complement_E A \cup \complement_E B$.

**Preuve** —

Prouvons la première égalité, la deuxième se démontrant se façon analogue .

Soit $x \in E$.

$$\begin{aligned} x \in \complement_E(A \cup B) &\Leftrightarrow x \notin A \cup B \Leftrightarrow \neg(x \in A \cup B) \Leftrightarrow \neg(x \in A \text{ ou } x \in B) \\ &\Leftrightarrow \big(\neg(x \in A)\big) \text{ et } \big(\neg(x \in B)\big) \\ &\Leftrightarrow (x \notin A) \text{ et } (x \notin B) \Leftrightarrow x \in \complement_E A \text{ et } x \in \complement_E B \\ &\Leftrightarrow x \in \complement_E A \cap \complement_E B \end{aligned}$$

Donc $\complement_E(A \cup B) = \complement_E A \cap \complement_E B$.

□

La proposition suivante donne une caractérisation du complémentaire.

Proposition 23

*Si $A \cup B = E$ et $A \cap B = \emptyset$ alors $\complement_E A = B$.*

**Preuve** — Supposons que $A \cup B = E$ et $A \cap B = \emptyset$.

Soit $x \in B$. Comme $A$ et $B$ sont disjoints, $x \notin A$ donc $x \in \complement_E A$. Donc $B \subset \complement_E A$.

Soit $x \in \complement_E A$. Comme $A \cup B = E$ et $x \notin A$, $x \in B$. Donc $\complement A \subset B$.

D'où le résultat. □

EXEMPLE 24 — *On déduit facilement les égalités suivantes :* $\complement_E E = \emptyset$, $\complement_E \emptyset = E$, $\complement_E \complement_E A = A$.

### 1.2.4 Généralisation à une famille de parties

Soit $I$ un ensemble non vide, dont les éléments sont appelés les **indices**. Pour chaque $i \in I$, on considère $A_i$ une partie de l'ensemble $E$. On dit que les ensembles $A_i$ forment une **famille** \族\ **de parties de** $E$, indicée par $I$, et notée $(A_i)_{i\in I}$.

Dans ce paragraphe, $I$ désigne un ensemble non vide.

Les définitions et propriétés des parties précédentes se généralisent à des familles d'ensembles.

DÉFINITION 25
*Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de $E$.*

- *On appelle **union** de la famille $(A_i)_{i\in I}$ l'ensemble*
$$\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \in E \mid \exists i \in I, x \in A_i\}.$$
*C'est l'ensemble des éléments de $E$ qui appartiennent au moins à l'un des $A_i$.*
- *On appelle **intersection** de la famille $(A_i)_{i\in I}$ l'ensemble*
$$\bigcap_{i\in I} A_i = \{x \in E \mid \forall i \in I, x \in A_i\}.$$
*C'est l'ensemble des éléments de $E$ qui appartiennent à tous les $A_i$.*

PROPOSITION 26
*Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de $E$ et $B$ une partie de $E$.*

- $\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \cap B = \bigcup_{i\in I} (A_i \cap B)$
- $\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \cup B = \bigcap_{i\in I} (A_i \cup B)$
- $\complement_E \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcap (\complement_E A_i)$.
- $\complement_E \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcup (\complement_E A_i)$.

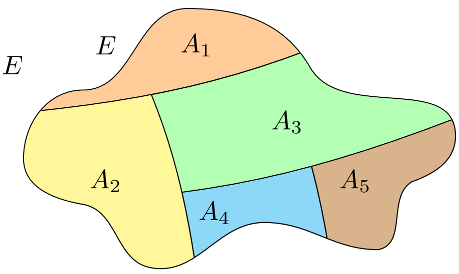
DÉFINITION 27
*Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de $E$.*

*On dit que les ensembles $A_i$ sont **disjoints deux à deux** si pour tout $i$ et tout $j$ éléments distincts de $I$ ($i \neq j$), $A_i \bigcap A_j = \emptyset$.*

*L'union $\bigcup_{i\in I} A_i$ est alors notée $\bigsqcup_{i\in I} A_i$.*

DÉFINITION 28
*Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de $E$*
*On dit que la famille $(A_i)_{i\in I}$ forme une **partition** \划分\ de $E$ si*

1. *pour tout $i \in I$, $A_i$ est non vide : $\forall i \in I, A_i \neq \emptyset$,*
2. *les $A_i$ sont deux à deux disjoints : $\forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset$,*
3. $\bigcup_{i\in I} A_i = E$.



Exemples 29

- *Notons* $P = \{2k, k \in \mathbb{N}\}$ *l'ensemble des nombres pairs et* $I = \{2k+1, k \in \mathbb{N}\}$ *l'ensemble des nombres impairs.* $P$ *et* $I$ *sont des ensembles non vides et disjoints. De plus,* $P \cup I = \mathbb{N}$.
  *La famille* $\{P, I\}$ *forme donc une partition de* $\mathbb{N}$.
- *La famille* $([n, n+1[)_{n\in\mathbb{Z}}$ *est une partition de* $\mathbb{R}$.

## 1.3 Produit cartésien d'ensembles

### 1.3.1 Couples et $n$-uplets

Un **couple** d'éléments est la donnée de deux éléments dans un certain ordre. On note un couple entre parenthèses : $(a, b)$. Deux couples $(a_1, b_1)$ et $(a_2, b_2)$ sont égaux si et seulement si $a_1 = a_2$ et $b_1 = b_2$. On distingue donc le couple $(a, b)$ (énumération ordonnée) de la paire $\{a, b\} = \{b, a\}$ (énumération non ordonnée). En général, $(a, b) \neq (b, a)$ alors que $\{a, b\} = \{b, a\}$. Enfin, dans le couple $(a, b)$, les éléments $a$ et $b$ peuvent être égaux, le couple s'écrivant alors $(a, a)$, mais l'ensemble $\{a, a\} = \{a\}$ est un singleton.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la notion de couples se généralise à celle de **$n$-uplets** $(x_1, \ldots, x_n)$. Dans le cas où $n = 3$, on parle de **triplet** $(x, y, z)$. Dans un $n$-uplet, certains éléments peuvent être égaux entre eux.

Il ne faut pas confondre le $n$-uplet (ou la famille) $(x_1, \ldots, x_n)$ et l'ensemble $\{x_1, \ldots, x_n\}$. Par exemple, $(1, 2, 3) \neq (3, 2, 1)$ alors que $\{1, 2, 3\} = \{3, 2, 1\}$, ou $(1, 1, 2) \neq (1, 2)$ alors que $\{1, 1, 2\} = \{1, 2\}$.

### 1.3.2 Produit cartésien

Définition 30

*Soient* $E$ *et* $F$ *deux ensembles. Le* ***produit cartésien*** \笛卡尔积\ *de* $E$ *par* $F$*, noté* $E \times F$*, est l'ensemble des couples* $(x, y)$ *tels que* $x \in E$ *et* $y \in F$ *:*

$$E \times F = \{(x, y) \mid x \in E, y \in F\}.$$

Notation Si $E = F$, le produit cartésien $E \times F$ se note $E^2$.

Exemples 31

- *Soient* $E = \{a, b\}$ *et* $F = \{1, 2, 3\}$.
  *Alors* $E \times F = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$.
- $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *est l'ensemble des couples* $(x, y)$ *de réels. On visualise cet ensemble comme un plan muni d'un repère, et le couple* $(x, y)$ *est identifié au point de coordonnées* $(x, y)$.
- *L'ensemble* $\mathbb{R} \times \{0\} = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ *correspond, dans le plan muni d'un repère, à l'axe des abscisses.*
- $(\mathcal{P}(E))^2 = \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E)$ *est l'ensemble des couples* $(A, B)$ *où* $A$ *et* $B$ *sont des parties de* $E$.

En général, $E \times F \neq F \times E$ car l'ordre importe dans un couple.

Le produit cartésien se généralise au produit de $n$ ensembles.

Définition 32

*Soit* $n$ *un entier naturel supérieur ou égal à 2. Soient* $E_1, \ldots, E_n$ $n$ *ensembles. On appelle* ***produit cartésien*** *de* $E_1, \ldots, E_n$*, noté* $E_1 \times \ldots \times E_n$*, l'ensemble des* $n$*-uplets* $(x_1, \ldots, x_n)$ *tels que pour tout* $i \in \{1, \ldots, n\}$, $x_i \in E_i$ *:*

$$E_1 \times \ldots \times E_n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid \forall i \in \{1, \ldots, n\}, x_i \in E_i\}.$$

Notation Si $E_1 = \ldots = E_n = E$, on note le produit cartésien $E^n$.

Exemples 33

- $\mathbb{R}^n$ *désigne l'ensemble des* $n$*-uplets* $(x_1, \ldots, x_n)$ *de réels, i.e. tels que pour tout* $i \in \{1, \ldots, n\}$, $x_i \in \mathbb{R}$.
- $[0, +\infty[\times[0, 2\pi[\times[0, \pi[$ *est l'ensemble des triplets* $(r, \theta, \varphi)$ *où* $r \in [0, +\infty[$, $\theta \in [0, 2\pi[$ *et* $\varphi \in [0, \pi[$.

# Chapitre 2 Applications

## Table des matières du chapitre



## 2.1 Applications

### 2.1.1 Définitions

Intuitivement, une application $f$ d'un ensemble $E$ dans un ensemble $F$ est un objet qui à tout élément $x$ de $E$ associe un unique élément $y$ de $F$, noté $f(x)$.

Nous allons en donner une définition rigoureuse au moyen des ensembles.

Définition 1
*Soient $E$ et $F$ deux ensembles. On appelle **application de $E$ dans $F$** \映射\ tout triplet $f = (E, F, \mathcal{G})$ où $E$, $F$ et $\mathcal{G}$ sont trois ensembles vérifiant :*

1. *$\mathcal{G}$ est un sous-ensemble de $E \times F$,*
2. *pour tout élément $x$ de $E$, il existe un unique élément $y$ de $F$ tel que $(x, y) \in \mathcal{G}$.*

*Avec les notations précédentes,*

- *$E$ est appelé l'**ensemble de définition** \函数f的定义域\ ou ensemble de départ de $f$,*
- *$F$ est appelé l'**ensemble d'arrivée** de $f$,*
- *$\mathcal{G}$ est appelé le **graphe** de $f$.*
- *Pour tout élément $x$ de $E$, l'unique élément $y$ de $F$ tel que $(x, y) \in \mathcal{G}$ est noté $f(x)$, et est appelé **image** \像或值\ de $x$ par $f$.*
- *Pour tout élément $y$ de $F$, on appelle **antécédent** \原像\ de $y$ par l'application $f$, tout élément $x$ de $E$ tel que $y = f(x)$.*
- *L'ensemble des applications de $E$ dans $F$ est noté $F^E$ ou $\mathcal{F}(E, F)$.*

Remarque 2 — *Le graphe $\mathcal{G}$ de $f$ est donc égal à $\mathcal{G} = \{(x, f(x)) \mid x \in E\}$.*

Notation En général, le triplet $f = (E, F, \mathcal{G})$ est noté de la façon suivante :

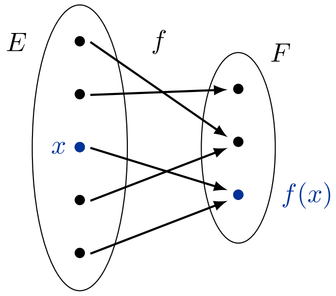
$$f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array},$$

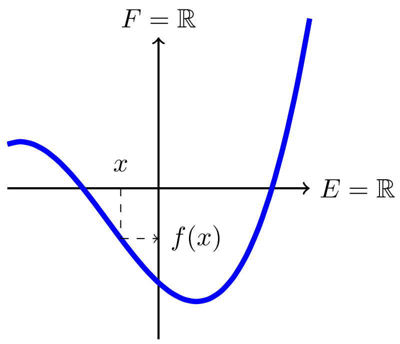
$f(x)$ étant remplacé par son expression.

On utilise également la notation $f : E \longrightarrow F$ pour signifier que $f$ est une application de $E$ dans $F$.

Remarque 3 — *Dans ce cours, on ne fera pas de distinction entre application et fonction.*

On peut représenter une application de deux manières : soit sous forme de diagrammes fléchés, soit en représentant son graphe dans le plan muni d'un repère, à la manière des courbes représentatives d'une fonction numérique.

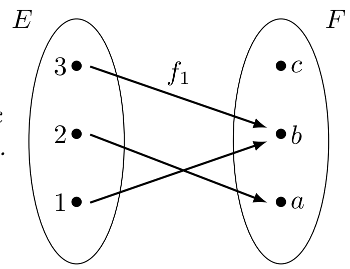


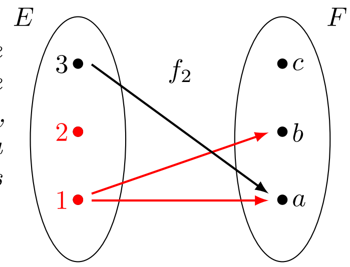

Exemples 4

- *Considérons les ensembles* $E=\{1,2,3\}$ *et* $F=\{a,b,c\}$*. Soient* $\mathcal{G}_1=\{(1,b),(2,a),(3,b)\}$ *et* $\mathcal{G}_2=\{(1,a),(1,b),(3,a)\}$ *deux sous-ensembles de* $E\times F$*.*

  *Le triplet* $(E,F,\mathcal{G}_1)$ *vérifie les points 1. et 2. de la définition et est donc une application* $f_1$ *de* $E$ *dans* $F$*. On a* $f_1(1)=b$*,* $f_1(2)=a$ *et* $f_1(3)=b$*.*



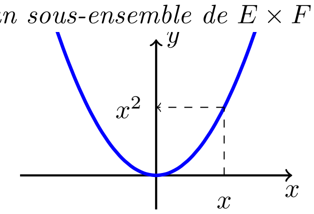

  *Le triplet* $(E,F,\mathcal{G}_2)$ *vérifie le point 1. mais ne vérifie pas le point 2. de la définition : à l'élément* 1 *de* $E$*, on ne peut pas associer un unique élément de* $F$ *car les couples* $(1,a)$ *et* $(1,b)$ *sont éléments de* $\mathcal{G}_2$*. De plus, l'élément* 2 *de* $E$ *ne peut être associé à aucun élément de* $F$ *car il n'y a pas de couples de la forme* $(2,\cdot)$ *dans* $\mathcal{G}_2$*. Ainsi, ce triplet ne définit pas une application de* $E$ *dans* $F$*.*




- *Considérons les ensembles* $E=\mathbb{R}$ *et* $F=\mathbb{R}$*. Soit* $\mathcal{G}_1=\{(x,x^2)\mid x\in\mathbb{R}\}$ *un sous-ensemble de* $E\times F$*.*

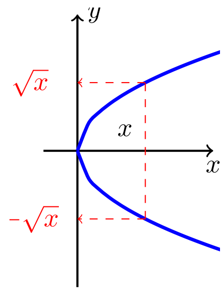
  *Le triplet* $(\mathbb{R},\mathbb{R},\mathcal{G}_1)$ *est une application* $f$ *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*, notée*

$$f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & x^2\end{array}.$$




- *Considérons les ensembles* $E=\mathbb{R}_+$ *et* $F=\mathbb{R}$*. Soit* $\mathcal{G}_2=\{(x^2,x)\mid x\in\mathbb{R}\}$ *un sous-ensemble de* $E\times F$*.*

  *Le triplet* $(\mathbb{R}_+,\mathbb{R},\mathcal{G}_2)$ *vérifie le point 1. mais ne vérifie pas le point 2. de la définition : à chaque élément* $x$ *non nul de* $E=\mathbb{R}_+$*, on ne peut pas associer un unique élément de* $F=\mathbb{R}$ *car les couples* $(x,\sqrt{x})$ *et* $(x,-\sqrt{x})$ *sont éléments de* $\mathcal{G}_2$*. Ce triplet ne définit donc pas une application de* $E$ *dans* $F$*.*



Remarque 5 — *Pour définir une application $f : E \longrightarrow F$, il suffit de préciser comment, à chaque élément $x$ de $E$, est associée son image $f(x)$ dans $F$. C'est le principe de la notation $f : E \longrightarrow F\ ;\ x \longmapsto f(x)$.*

*C'est désormais ainsi que nous définirons et manipulerons les applications.*

Exemples 6

- *Soit $E$ un ensemble. On appelle* **application identité** *de $E$, notée $\mathrm{id}_E$, l'application définie par*
$$\begin{array}{rccc} \mathrm{id}_E : & E & \longrightarrow & E \\ & x & \longmapsto & x \end{array}.$$
- *Soient $E$ et $F$ deux ensembles. Soit $a$ un élément de $F$. On appelle* **fonction constante** *égale à $a$ l'application définie par*
$$\begin{array}{rccc} f : & E & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & a \end{array}.$$
- *Soient $E$ et $F$ deux ensembles tels que $E \subset F$. On appelle* **injection canonique** *de $E$ dans $F$ l'application définie par*
$$\begin{array}{rccc} i : & E & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & x \end{array}.$$
- *Soient $E$ un ensemble non vide et $A$ une partie de $E$. On appelle* **fonction indicatrice de** *$A$, notée $\mathbb{1}_A$ la fonction définie par*
$$\begin{array}{rccc} \mathbb{1}_A : & E & \longrightarrow & \{0,1\} \\ & x & \longmapsto & \begin{cases} 1 \text{ si } x \in A \\ 0 \text{ si } x \notin A \end{cases} \end{array}.$$
- *La fonction exponentielle* $\begin{array}{rccc} \exp : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \mathrm{e}^x \end{array}$ *est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. La fonction logarithme* $\begin{array}{rccc} \ln : & ]0;+\infty[ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \ln x \end{array}$ *est une application de $]0;+\infty[$ dans $\mathbb{R}$.*

Remarque 7 — *Pour vérifier qu'une fonction $f : E \longrightarrow F$ définie par $x \longmapsto f(x)$ est bien définie, il faut vérifier les deux points suivants :*

1. *tout élément de $E$ doit posséder une image et une seule,*
2. *cette image doit être dans $F$.*

Exemples 8

- *La relation $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ n'est pas une application car $0$ n'a pas d'image par $f$. Mais la relation $g : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est bien une application.*
- *La relation $f : \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ z \longmapsto \arg(z)$ n'est pas une application car tout élément de $\mathbb{U}$ possède une infinité d'images car l'argument d'un nombre complexe est défini modulo $2\pi$.*
- *La relation $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+\ ;\ x \longmapsto x^2 + 2x + 1$ est une application car pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x$ a une seule image par $f$, égale à $x^2 + 2x + 1$, et $x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2 \geq 0$ donc $f(x) \in \mathbb{R}_+$.*

Définition 9

*Deux applications $f$ et $g$ sont dites* **égales** *si elles ont :*

1. *le même ensemble de départ $E$,*
2. *le même ensemble d'arrivée $F$,*
3. *le même graphe : pour tout $x \in E$, $f(x) = g(x)$.*

*On note $f = g$.*

Exemple 10 — *Les applications $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ x \longmapsto x^2$ et $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ x \longmapsto x^2$ ne sont pas égales car elles n'ont pas le même ensemble de départ.*

### 2.1.2 Restrictions et prolongements

DÉFINITION 11
*Soient $E$ et $F$ deux ensembles. Soit $A$ une partie de $E$. Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. On appelle* ***restriction*** *de $f$ à $A$, l'application, notée $f_{|A}$, définie par*

$$f_{|A} : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & F \\ x & \longmapsto & f(x) \end{array}.$$

EXEMPLE 12 — *La fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ n'est pas strictement croissante mais la restriction $f_{|\mathbb{R}_+}$ de $f$ à $\mathbb{R}_+$ l'est.*

DÉFINITION 13
*Soient $E$ et $F$ deux ensembles. Soit $A$ une partie de $E$. Soit $f : A \longrightarrow F$ une application. On appelle* ***prolongement*** *de $f$ à $E$, toute application $g$ de $E$ dans $F$ telle que, pour tout élément $x$ de $A$, $g(x) = f(x)$.*

Un tel prolongement vérifie $g_{|A} = f$. Il n'est bien sûr pas unique. On parlera donc **d'un** prolongement et non **du** prolongement.

EXEMPLE 14 — *On peut prolonger l'application $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ sur $\mathbb{R}$ en fixant une valeur en $0$. Par exemple, l'application suivante est un prolongement de $f$ sur $\mathbb{R}$ :*

$$\tilde{f} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \begin{cases} \dfrac{\sin(x)}{x} \text{ si } x \neq 0, \\ 1 \text{ si } x = 0 \end{cases} \end{array}.$$

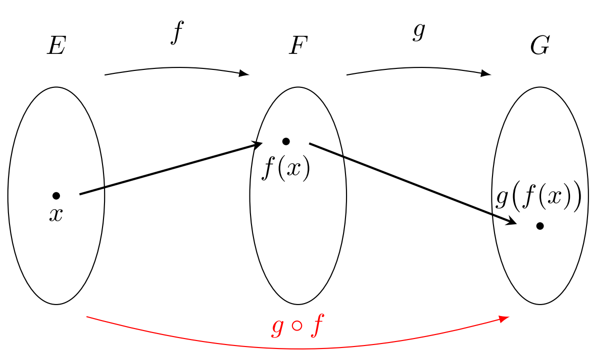
*La valeur choisie en $0$ est $1$. Il s'agit de la limite de $\dfrac{\sin(x)}{x}$ lorsque $x$ tend vers $0$. L'intérêt de ce prolongement parmi les autres est que la fonction $\tilde{f}$ ainsi définie est continue sur $\mathbb{R}$.*

### 2.1.3 Composée d'applications

DÉFINITION 15
*Soient $E$, $F$ et $G$ trois ensembles. Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications. La* ***composée*** *$g \circ f$ \函数$f$和$g$的复合\ est l'application définie par :*

$$g \circ f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & g\big(f(x)\big) \end{array}.$$

On pourra retenir le schéma suivant :



Remarques 16

- *Avec les notations ci-dessus, $g \circ f$ est bien définie mais ce n'est pas forcément le cas de $f \circ g$ : on doit s'assurer que pour tout $x \in F$, $g(x) \in E$ afin de pouvoir appliquer $f$.*
- *Si $E = G$ alors $g \circ f$ et $f \circ g$ sont bien définies mais en général, ces deux applications ne sont pas égales : $g \circ f \neq f \circ g$. On dit que la composition $\circ$ n'est pas commutative.*

On fera donc attention à l'ordre : pour calculer $\big(g \circ f\big)(x)$, on calcule d'abord $f(x)$ puis $g\big(f(x)\big)$.

Exemple 17 — *Soient $f$ et $g$ deux applications définies par*

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array} \quad \text{et} \quad g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x+1 \end{array}.$$

*Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\big(g \circ f\big)(x) = g\big(f(x)\big) = f(x) + 1 = x^2 + 1$*

*et $\big(f \circ g\big)(x) = f\big(g(x)\big) = \big(g(x)\big)^2 = (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$.*

*Donc $g \circ f$ et $f \circ g$ ne sont pas égales.*

Remarque 18 — *Par abus, lorsque l'on a deux applications $f : E \longrightarrow F$ et $g : H \longrightarrow G$ avec seulement $F \subset H$ (au lieu de $F = H$), on utilise aussi la notation $g \circ f$ pour désigner la composée $g_{|F} \circ h$.*

Proposition 19
*Soient $E$, $F$, $G$ et $H$ des ensembles. Soient $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ et $h : G \longrightarrow H$ trois applications. Alors*

- *$\circ$ est associative : $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$.*
- $\mathrm{id}_E \circ f = f \circ \mathrm{id}_E = f$.

**Preuve** —

- Soit $x \in E$. On a $\big((h \circ g) \circ f\big)(x) = (h \circ g)(f(x)) = h\Big(g\big(f(x)\big)\Big) = h\big((g \circ f)(x)\big) = \big(h \circ (g \circ f)\big)(x)$.
  D'où le premier point.
- Soit $x \in E$. On a $\big(\mathrm{id}_E \circ f\big)(x) = \mathrm{id}_E\big(f(x)\big) = f(x) = f\big(\mathrm{id}_E(x)\big) = \big(f \circ \mathrm{id}_E\big)(x)$.
  D'où le second point.

$\square$

Notation Soient $E$ un ensemble non vide et $f$ une application de $E$ dans $E$. On peut composer $f$ avec elle-même autant de fois que l'on veut.

On note ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f^n = \underbrace{f \circ f \ldots \circ f}_{n \text{ fois}}$ et $f^0 = \mathrm{id}_E$.

En général, la composition $\circ$ n'étant pas commutative, si $f$ et $g$ sont deux applications d'un ensemble $E$ dans lui même, $(g \circ f)^n \neq g^n \circ f^n$. Mais si $f$ et $g$ commutent, alors $(g \circ f)^n = g^n \circ f^n$.

Exemples 20

- *Soit l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $f(x) = x + 1$.*
  *Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $f^n(x) = \Big(\big((x+1)+1\big)+\ldots\Big)+1 = x+n$.*
- *Reprenons l'exemple 17 où $f$ et $g$ sont deux applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $f(x) = x^2$ et $g(x) = x + 1$.*
  *On a vu que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\big(g \circ f\big)(x) = x^2 + 1$, donc $\big(g \circ f\big)^2(x) = \big(g \circ f\big)(x^2+1) = (x^2+1)^2 + 1 = x^4 + 2x^2 + 2$.*
  *De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^2(x) = x^4$ et $g^2(x) = x + 2$. Donc $\big(g^2 \circ f^2\big)(x) = g^2\big(x^4\big) = x^4 + 2$.*
  *Donc $(g \circ f)^2 \neq g^2 \circ f^2$.*

### 2.1.4 Familles

Définition 21
*Soient $E$ et $I$ deux ensembles. On appelle* ***famille d'éléments de*** $E$ ***indexée par*** $I$*, toute application $x : I \longrightarrow E$. On la note $(x_i)_{i\in I}$, où pour tout $i \in I$, $x_i = x(i)$.*

*L'élément $x_i$ de la famille $(x_i)_{i\in I}$ s'appelle le* ***terme d'indice*** $i$*.*

Exemple 22 — *Une famille $(x_1, \dots, x_n)$ d'éléments de $E$ correspond donc à l'application $x : [\![1, n]\!] \longrightarrow E$ telle que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $x(i) = x_i$.*

Définition 23
*Soit $E$ un ensemble. Une* ***suite*** *d'éléments de $E$ est une famille d'éléments de $E$ indexée par $\mathbb{N}$. On la note souvent $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

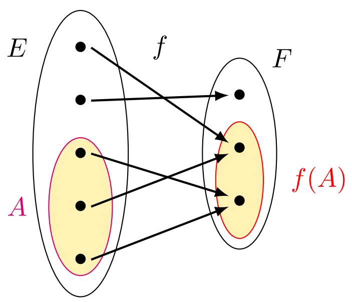
Exemple 24 — *L'ensemble des suites réelles est l'ensemble des applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, noté $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.*

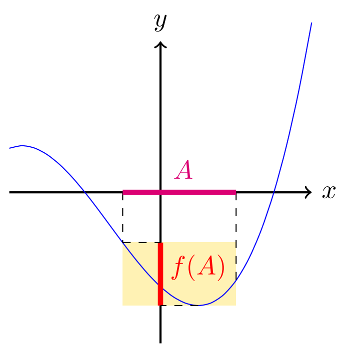
## 2.2 Image directe, image réciproque

### 2.2.1 Image directe

Définition 25
*Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Soit $A$ une partie de $E$.*

- *On appelle* ***image directe*** *de $A$ par $f$* \集合$A$在映射$f$下的像\, *notée $f(A)$, l'ensemble des images par $f$ des éléments de $A$ :*
$$f(A) = \{y \in F \mid \exists\, x \in A, y = f(x)\} = \{f(x) \mid x \in A\}.$$
- *L'image de $E$ tout entier par $f$ est simplement appelée* ***image de*** $f$*. Elle est souvent notée $\mathrm{Im}(f)$ plutôt que $f(E)$.*




L'image de $f$ correspond à l'ensemble des éléments de $F$ qui ont au moins un antécédent par $f$. En général, si $f : E \longrightarrow F$, l'inclusion $\mathrm{Im}(f) \subset F$ est stricte.

$$\boxed{y \in f(A) \Leftrightarrow \exists\, x \in A, y = f(x).}$$

Si $x \in A$ alors $f(x) \in f(A)$ mais la réciproque est fausse : $f(x) \in f(A)$ n'implique pas $x \in A$ (voir le schéma ci-dessus).

Exemples 26

- *L'image de l'application identité* $\mathrm{id}_E$ *est* $E$.
- *Soit* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *l'application définie, pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *par* $f(x) = x^2$.
  *Alors* $f([-2,2]) = [0,4]$, $f([-1,2]) = [0,4]$ *et* $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_+$.
  *Plus généralement, pour déterminer l'ensemble image d'une fonction* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *où* $I$ *est un intervalle de* $\mathbb{R}$, *on étudie les variations de* $f$ *et sa continuité.*
- *Soit* $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ *l'application définie, pour tout* $z \in \mathbb{C}$, *par* $f(z) = \mathrm{Im}(z)^2$. *L'image de* $f$ *est l'ensemble* $\mathbb{R}_+$ : $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}_+$.
  ***Preuve*** *— Montrons ce résultat par double-inclusion.*
  *Pour tout* $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Im}(z) \in \mathbb{R}$ *et donc* $\mathrm{Im}(z)^2 \in \mathbb{R}_+$. *Donc* $\mathrm{Im}(f) \subset \mathbb{R}_+$.
  *Réciproquement, soit* $x \in \mathbb{R}_+$. *Posons* $z = i\sqrt{x} \in \mathbb{C}$. *Alors* $\mathrm{Im(z)} = \sqrt{x}$ *et donc* $f(z) = \left(\sqrt{x}\right)^2 = x$. *Donc* $x \in \mathrm{Im}(f)$.
  *D'où* $\mathbb{R}_+ \subset \mathrm{Im}(f)$. □
- *L'image de* $\pi\mathbb{Z} = \{\pi k, k \in \mathbb{Z}\}$ *par l'application* $\sin : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *est égale à* $\{0\}$. *L'image de* $[0, 2\pi]$ *est* $[-1,1]$, *celle de* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *est aussi* $[-1,1]$.

Définition 27

*Soient* $f : E \longrightarrow F$ *une application et* $B$ *un sous-ensemble de* $F$. *On dit que* $f$ *est* ***à valeurs dans*** $B$ *si l'image de* $f$ *est incluse dans* $B$ : $\mathrm{Im}(f) \subset B$.

*Autrement dit, pour tout* $x \in E$, $f(x) \in B$.

Proposition 28

*Soit* $f : E \longrightarrow F$ *une application. Soient* $A$ *et* $B$ *des parties de* $E$.

1. *Si* $A \subset B$ *alors* $f(A) \subset f(B)$.
2. $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
3. $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.

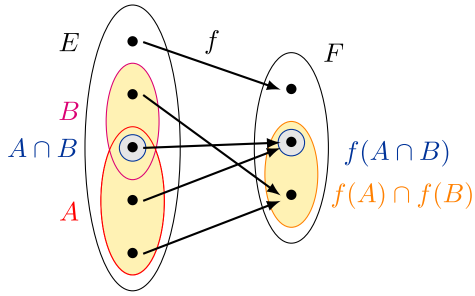
Remarque 29 — *Les propriétés* 2. *et* 3. *se généralisent à une famille quelconque de parties de* $E$.

**Preuve** —

1. Supposons $A \subset B$. Montrons que $f(A) \subset f(B)$. Soit $y \in f(A)$.
   Par définition de $f(A)$, il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$. Or $A \subset B$, donc $x \in B$. Donc $y = f(x) \in f(B)$.
   D'où $f(A) \subset f(B)$.
2. $\triangleright$ Montrons que $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$.
   Soit $y \in f(A \cup B)$. Par définition de $f(A \cup B)$, il existe $x \in A \cup B$ tel que $y = f(x)$.
   1er cas : $x \in A$. Alors $y = f(x) \in f(A)$. Or $f(A) \subset f(A) \cup f(B)$. Donc $x \in f(A) \cup f(B)$.
   2nd cas : $x \in B$. Alors $y = f(x) \in f(B)$. Or $f(B) \subset f(A) \cup f(B)$. Donc $x \in f(A) \cup f(B)$.
   Dans tous les cas, $x \in f(A) \cup f(B)$. Donc $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$.
   $\triangleleft$ Réciproquement, montrons que $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$.
   On a $A \subset A \cup B$ donc, d'après le deuxième point, $f(A) \subset f(A \cup B)$.
   De même, comme $B \subset A \cup B$, $f(B) \subset f(A \cup B)$.
   Donc $f(A \cup B)$ contient $f(A)$ et $f(B)$. Or $f(A) \cup f(B)$ est le plus petit ensemble qui contient $f(A)$ et $f(B)$, donc $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$.
   De ces deux points, on obtient le résultat.
3. Soit $y \in f(A \cap B)$. Par définition de $A \cap B$, il existe $x \in A \cap B$ tel que $y = f(x)$.
   Comme $A \cap B \subset A$, $x \in A$ et $y = f(x) \in f(A)$.
   Comme $A \cap B \subset B$, $x \in B$ et $y = f(x) \in f(B)$.
   Donc $x \in f(A) \cap f(B)$.
   D'où le résultat.

□

Attention, l'inclusion $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ peut être stricte, comme le montre le schéma suivant. On peut également considérer l'exemple suivant : $\sin([0, 2\pi]) \cap \sin([-\pi, \pi]) = [-1, 1]$
et $\sin([0, 2\pi] \cap [-\pi, \pi]) = [0, 1]$.




Remarque 30 — *On ne peut en général rien dire sur* $f\left(\complement_E A\right)$ *et* $\complement_F f(A)$.

Exemple 31 — *Soit* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *l'application définie, pour tout* $x \in \mathbb{R}$*, par* $f(x) = x^2$. *Soit* $A = [-1; 3]$.

*On a* $\complement A = ]-\infty, -1[\ \cup\ ]3, +\infty[$.

*Donc* $f\left(\complement A\right) = ]1, +\infty[$ *et* $\complement f(A) = \complement[0, 9] = ]-\infty, 0[\ \cup\ ]9, +\infty[$. *Il n'y a donc aucune inclusion entre ces ensembles.*

Définition 32
*Soient $E$ un ensemble et $A$ une partie de $E$. Soit $f : E \longrightarrow E$ une application. On dit que $A$ est* ***stable*** *par $f$ si $f(A) \subset A$.*

*Autrement dit, pour tout $x \in A$, $f(x) \in A$.*

Exemple 33 — *L'intervalle* $[-1, 1]$ *est une partie stable par la fonction* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ x \longmapsto x^2$.

### 2.2.2 Image réciproque

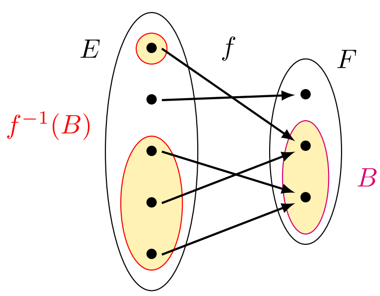
Définition 34
*Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Soit $B$ une partie de $F$. On appelle* ***image réciproque*** *de $B$ par $f$* \集合$B$在映射$f$下的原像\ *, notée $f^{-1}(B)$, l'ensemble*

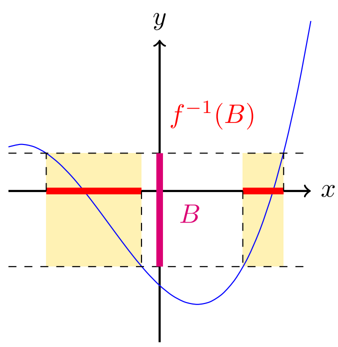
$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}.$$

$f^{-1}(B)$ correspond à l'ensemble des éléments de $E$ dont l'image par $f$ appartient à $B$. C'est aussi l'ensemble des antécédents des éléments de $B$ par $f$.

$$\boxed{x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B.}$$

Remarque 35 — *Si* $f : E \longrightarrow F$*, on a toujours* $f^{-1}(F) = E$.



Remarques 36

- *Pour chercher l'image réciproque par une application* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *d'un singleton* $\{y\}$*, on résout l'équation* $f(x) = y$ *d'inconnue* $x$*,*
- *Pour chercher l'image réciproque par une application* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *d'un intervalle* $[a, b]$*, on résout l'inéquation* $a \leq f(x) \leq b$*.*

L'image directe d'un singleton est un singleton : $f(\{x\}) = \{f(x)\}$, mais on ne peut rien dire sur l'image réciproque d'un singleton $f^{-1}(\{y\})$, qui correspond à l'ensemble des antécédents de $y$ : cela peut être un singleton, un ensemble à plusieurs éléments, $E$ tout entier (si $f$ est constante égale à $y$) ou encore l'ensemble vide (si $y$ n'a pas d'antécédent).

Exemples 37

- *Soit* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *l'application définie, pour tout* $x \in \mathbb{R}$*, par* $f(x) = x^2$*. Alors* $f^{-1}([0, 4]) = [-2, 2]$*,* $f^{-1}([-2, 4]) = [-2, 2]$*,* $f^{-1}([-2, -1]) = \emptyset, f^{-1}([9, +\infty[) = ]-\infty, 3] \cup [3, +\infty[$*.*
- *L'image réciproque de* $\mathbb{R}_+$ *par l'application* exp *est* $\mathbb{R}$*.*
- *L'image réciproque de* $\{1\}$ *par la fonction* $\sin : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *est l'ensemble* $\frac{\pi}{2} + 2\pi\mathbb{Z}$*. L'image réciproque de* $\{2\}$ *est l'ensemble vide. L'image réciproque de* $[0, 1]$ *est* $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [2k\pi, (2k+1)\pi]$*.*

Proposition 38
*Soit* $f : E \longrightarrow F$ *une application. Soient* $A$ *et* $B$ *des parties de* $F$*.*

1. *Si* $A \subset B$ *alors* $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$*.*
2. $f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$*.*
3. $f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$*.*
4. $f^{-1}\left(\complement_E A\right) = \complement_E f^{-1}(A)$*.*

**Preuve** —

1. Supposons $A \subset B$. Soit $x \in f^{-1}(A)$.
   Alors $f(x) \in A$. Or $A \subset B$, donc $f(x) \in B$. Donc $x \in f^{-1}(B)$.
   Donc $f^{-1}(A) \subset f^{-1}(B)$.
2. Soit $x \in E$.
   $x \in f^{-1}(A \cup B) \Leftrightarrow f(x) \in A \cup B \Leftrightarrow f(x) \in A$ ou $f(x) \in B \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A)$ ou $x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B)$.
   D'où le deuxième point.
3. Soit $x \in E$.
   $x \in f^{-1}(A \cap B) \Leftrightarrow f(x) \in A \cap B \Leftrightarrow f(x) \in A$ et $f(x) \in B \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A)$ et $x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$.
   D'où le troisième point.
4. Soit $x \in E$.
   $x \in f^{-1}(\complement_E A) \Leftrightarrow f(x) \in \complement_E A \Leftrightarrow f(x) \notin A \Leftrightarrow x \notin f^{-1}(A) \Leftrightarrow x \in \complement_E f^{-1}(A)$.
   D'où le quatrième point.

$\square$

Proposition 39
*Soit* $f : E \longrightarrow F$ *une application. Soient* $A$ *une partie de* $E$ *et* $B$ *une partie de* $F$*.*

1. $A \subset f^{-1}(f(A))$*.*
2. $f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B$*.*

**Preuve** —

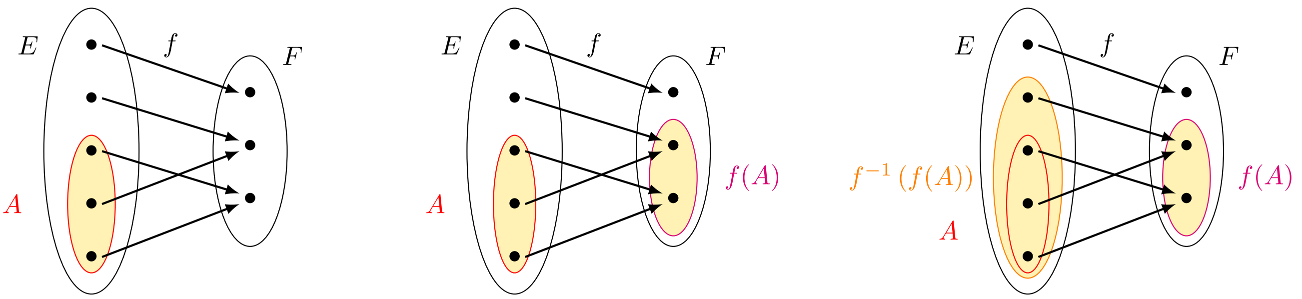
1. Soit $x \in A$. Alors $f(x) \in f(A)$. Donc $x \in f^{-1}(f(A))$. D'où le premier point.
2. Soit $y \in f\left(f^{-1}(B)\right)$. Alors il existe $x \in f^{-1}(B)$ tel que $y = f(x)$. Comme $x \in f^{-1}(B)$, $f(x) \in B$. Donc $y = f(x) \in B$.
   D'où le second point.

$\square$

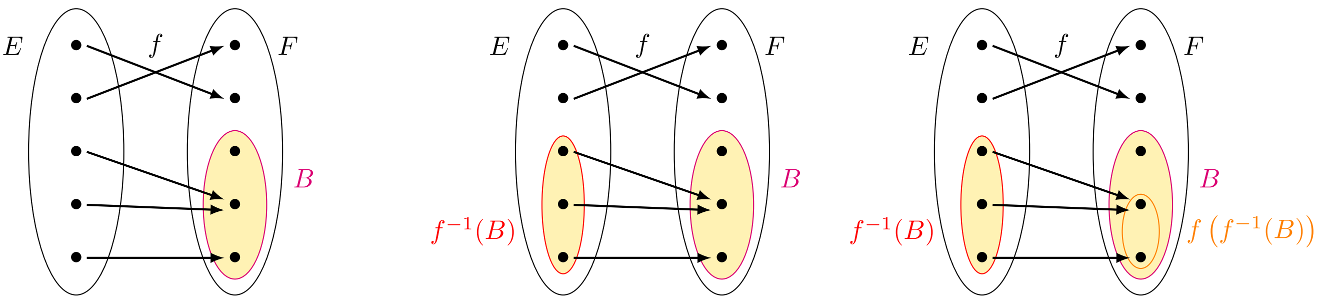
Le deuxième point nous dit que l'image d'un antécédent d'un élément de $B$ est dans $B$.

Les inclusions sont strictes comme on peut le voir sur les schémas suivants.

• $A \subset f^{-1}(f(A))$ et l'inclusion est stricte :




• $f\left(f^{-1}(B)\right) \subset B$ et l'inclusion est stricte :




On peut également prendre les exemples suivants :

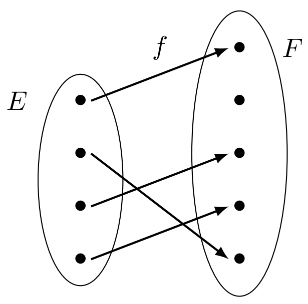
$[0, 2\pi] \subset \mathbb{R} = \cos^{-1}(\cos([0, 2\pi]))$ et $\cos\left(\cos^{-1}(\mathbb{R})\right) = [-1, 1] \subset \mathbb{R}$.

## 2.3 Injectivité, surjectivité et bijectivité

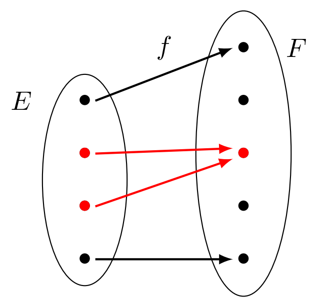
### 2.3.1 Injectivité

Définition 40

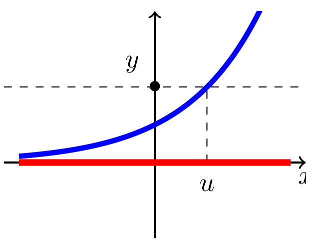
*On dit qu'une application $f : E \longrightarrow F$ est **injective** \单射\ si tout élément de l'ensemble d'arrivée $F$ a au plus \至多\ un antécédent dans $E$ par $f$.*



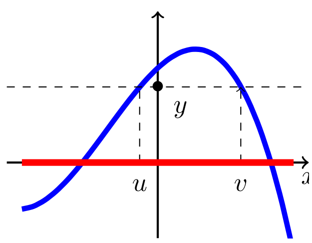

Injective




Non injective




Injective




Non injective

Proposition 41
*Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *$f$ est injective,*
2. *Pour tout $(u, v) \in E^2$, si $f(u) = f(v)$ alors $u = v$,*
3. *Pour tout $(u, v) \in E^2$, si $u \neq v$ alors $f(u) \neq f(v)$.*

**Preuve** — • Supposons $f$ injective. Soit $(u, v) \in E^2$ tel que $f(u) = f(v)$. Posons $y = f(u) = f(v)$. Les éléments $u$ et $v$ sont deux antécédents de $y$. Or, par définition d'une application injective, $y$ a au plus un antécédent par $f$. Donc $u = v$.

• Réciproquement, supposons que pour tout $(u, v) \in E^2$, si $f(u) = f(v)$ alors $u = v$. Soit $y \in F$. Supposons, par l'absurde, que $y$ possède au moins deux antécédents distincts par $f$. Alors il existe deux éléments $u_0$ et $v_0$ de $E$ distincts tels que $y = f(u_0) = f(v_0)$. Donc, par hypothèse, $u_0 = v_0$, ce qui est absurde. Donc $y$ possède au plus un antécédent dans $E$ par $f$. Tout élément de $F$ possède donc au plus un antécédent et $f$ est donc injective.

• Le point 2 est équivalent au point 3 par contraposée. □

Le deuxième point dit que si les images de deux éléments sont égales alors les éléments sont égaux. Le troisième point dit que deux éléments différents ont des images différentes. Cette dernière formulation est plus simple à comprendre mais plus difficile à manipuler en pratique. On privilégiera donc plutôt le deuxième point pour démontrer qu'une application est injective.

Méthode 42 — *Pour montrer qu'une application $f$ n'est* pas *injective, on montre qu'il existe deux éléments $u$ et $v$ de $E$* distincts *tels que $f(u) = f(v)$, en donnant explicitement les éléments $u$ et $v$.*

Exemples 43

- *L'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ n'est pas injective.*
  ***Preuve*** — *En effet, en prenant $u = 1$ et $v = -1$, on a $u \neq v$ et $f(u) = f(v) = 1$.* □
- *L'application $g : \mathbb{C} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{C}$ définie pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ par $g(z) = \dfrac{z + i}{z - 1}$ est injective.*
  ***Preuve*** — *En effet, soit $z_1$ et $z_2$ deux éléments de $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ tels que $g(z_1) = g(z_2)$. Montrons que $z_1 = z_2$.*
  *On a $\dfrac{z_1 + i}{z_1 - 1} = \dfrac{z_2 + i}{z_2 - 1}$, et après calculs, $z_1(1 + i) = z_2(1 + i)$. Donc $z_1 = z_2$.*
  *Donc $g$ est injective.* □
- *Soient $E$ et $F$ deux ensembles tels que $E \subset F$. L'application identité* $\mathrm{id}_E$ *et l'injection $i : E \longrightarrow F$ définie pour tout $x \in E$ par $i(x) = x$ sont injectives.*

Proposition 44
*Soit $I$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une application à valeurs réelles. Si $f$ est strictement monotone sur $I$ alors $f$ est injective.*

**Preuve** — Supposons $f$ strictement monotone. Quitte à considérer $-f$, supposons $f$ strictement croissante. Montrons que $f$ est injective.

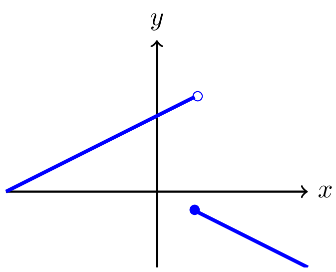
Soient $u$ et $v$ deux éléments de $I$ tels que $f(u) = f(v)$.

Si $u < v$ alors par stricte croissance de $f$, $f(u) < f(v)$, ce qui est absurde.

Si $u > v$ alors par stricte croissance de $f$, $f(u) > f(v)$, ce qui est absurde.

Donc finalement, $u = v$ et l'application $f$ est injective. □

La réciproque est fausse comme le montre la représentation graphique suivante :




Exemple 45 — *La fonction* $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc injective.*

PROPOSITION 46

*Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications.*

- *Si $f$ et $g$ sont injectives alors $g \circ f$ est injective.*
- *Si $g \circ f$ est injective alors $f$ est injective.*

**Preuve** —

- Supposons $f$ et $g$ injectives. Montrons que $g \circ f$ est injective.
  Soient $u$ et $v$ deux éléments de $E$ tels que $(g \circ f)(u) = (g \circ f)(v)$. Alors $g(f(u)) = g(f(v))$. Par injectivité de $g$, on a donc $f(u) = f(v)$, puis par injectivité de $f$, on obtient $u = v$.
  Donc $g \circ f$ est injective.
- Supposons $g \circ f$ injective. Montrons que $f$ est injective.
  Soient $u$ et $v$ deux éléments de $E$ tels que $f(u) = f(v)$. Alors $g(f(u)) = g(f(v))$, soit encore $(g \circ f)(u) = (g \circ f)(v)$. Par injectivité de $g \circ f$, on en déduit que $u = v$.
  Donc $f$ est injective.

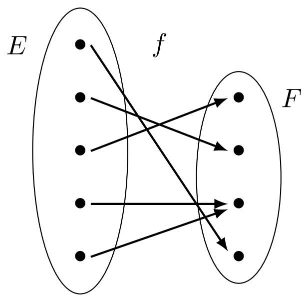
□

Dans le deuxième point, l'application $g$ n'a aucune raison d'être injective. Par exemple, en considérant $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ x \longmapsto \exp(x)$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ x \longmapsto x^2$, l'application $g \circ f$ est injective mais $g$ n'est évidemment pas injective !

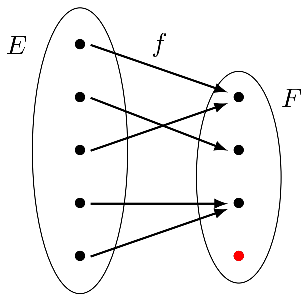
### 2.3.2 Surjectivité

DÉFINITION 47

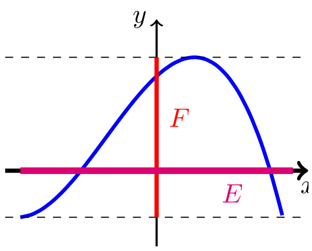
*On dit qu'une application $f : E \longrightarrow F$ est **surjective** \满射\ si tout élément de l'ensemble d'arrivée $F$ a au moins \至少\ un antécédent dans $E$ par $f$.*



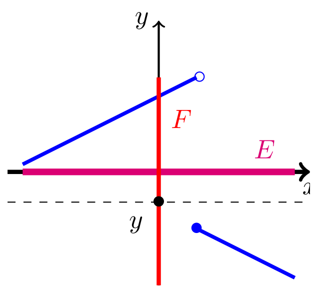

Surjective




Non surjective




Surjective




Non surjective

PROPOSITION 48

*Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *$f$ est surjective,*
2. *Pour tout élément $y$ de $F$, il existe un élément $x$ de $E$ tel que $y = f(x)$,*
3. *$\mathrm{Im}(f) = F$.*

**Preuve** —

- Par définition de la surjectivité, $f$ est surjective si et seulement pour tout élément $y$ de $F$, $y$ admet un antécédent $x \in E$ par $f$, soit si et seulement si pour tout $y \in E$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.
- On a $\mathrm{Im}(f) = \{y \in F \mid \exists x \in E, y = f(x)\}$.
  Donc $\mathrm{Im}(f) = F$ si et seulement pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$.

$\square$

Remarque 49 — *Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. L'application induite par $f$ de $E$ sur $\mathrm{Im}(f)$, définie par $E \longrightarrow \mathrm{Im}(f)$ ; $x \longmapsto f(x)$, est surjective.*

Méthode 50 — *Pour montrer qu'une application $f : E \longrightarrow F$ est surjective, on peut montrer que pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x$ admet au moins une solution dans $E$.*

Exemples 51

- *L'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$ n'est pas surjective car par exemple $-1$ n'a pas d'antécédent par $f$. Mais l'application induite par $f$ de $\mathbb{R}$ sur son image $\mathbb{R}_+$ est surjective.*
- *L'application $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{U}$ définie pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ par $g(\theta) = e^{i\theta}$ est surjective.*
- *Soit $E$ un ensemble. L'application $\mathrm{id}_E$ est surjective.*

Remarque 52 — *Il existe des applications qui ne sont ni surjectives, ni injectives, comme la fonction carré de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.*

Proposition 53
*Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications.*

- *Si $f$ et $g$ sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective.*
- *Si $g \circ f$ est surjective alors $g$ est surjective.*

**Preuve** —

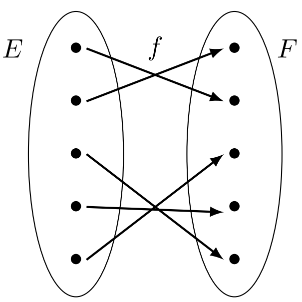
- Supposons $f$ et $g$ surjectives. Montrons que $g \circ f$ est surjective.
  Soit $z \in G$. Par surjectivité de $g$, il existe $y \in F$ tel que $z = g(y)$. Puis, par surjectivité de $f$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. Donc $z = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$.
  On a donc prouvé l'existence d'un élément $x$ dans $E$ tel que $z = (g \circ f)(x)$. L'application $g \circ f$ est donc surjective.
- Supposons $g \circ f$ surjective. Montrons que $g$ est surjective.
  Soit $y \in G$. Par surjectivité de $g \circ f$, il existe $t \in E$ tel que $y = (g \circ f)(t)$, c'est-à-dire $y = g(f(t))$. En posant $x = f(t)$, on a donc $y = g(x)$ avec $x \in F$.
  On a donc prouvé l'existence d'un élément $x$ dans $F$ tel que $y = g(x)$. L'application $g$ est donc surjective.

$\square$

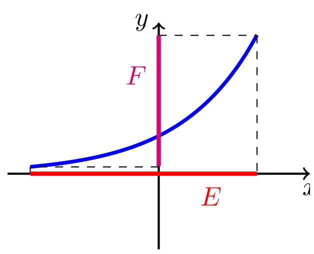
Dans le deuxième point, l'application $f$ n'a aucune raison d'être surjective. Par exemple, en considérant $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ ; $x \longmapsto e^x - 1$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ ; $x \longmapsto x^2$, l'application $g \circ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est surjective mais $f$ n'est évidemment pas surjective.

### 2.3.3 Bijectivité

Définition 54
*Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. On dit que $f$ est **bijective** \双射（一一映射）\ si tout élément de l'ensemble d'arrivée $F$ a un unique \有且仅有一个\ antécédent dans $E$ par $f$.*



Bijective



Bijective

Proposition 55
*Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. *$f$ est bijective,*
2. *pour tout élément $y$ de $F$, il existe un unique élément $x$ de $E$ tel que $y = f(x)$,*
3. *$f$ est injective et surjective.*

Exemples 56

- *L'application $\mathrm{id}_E : E \longrightarrow E$ est bijective.*
- *L'application $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ par $f(x) = x^2$ est injective et surjective, donc bijective.*

Proposition-Définition 57
*Soit $f : E \longrightarrow F$ une application.*

- *L'application $f$ est bijective si et seulement s'il existe une application $g : F \longrightarrow E$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{id}_F$.*
- *Dans ce cas, l'application $g$ est unique. Elle est appelée* ***bijection réciproque*** \f的逆映射\ *de $f$ et est notée $f^{-1}$.*

**Preuve** — • ▷ Supposons $f$ bijective. Nous allons construire une application $g : F \longrightarrow E$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{id}_F$.

Pour tout $y \in F$, il existe un unique élément $x$ de $E$ tel que $y = f(x)$. Posons, pour tout $y \in F$, $g(y) = x$, où $x \in E$ est l'unique antécédent de $y$ par $f$. Alors $g : F \longrightarrow E$ définit bien une application de $F$ dans $E$, la bijectivité assurant l'unicité de l'image.

Soit $y \in F$. Notons $x$ l'unique élément de $E$ tel que $y = f(x)$. Alors $g(y) = x$ et $(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(x) = y$. Donc $f \circ g = \mathrm{id}_F$.

Soit $x \in E$. Posons $y = f(x)$. Alors $g(y) = x$. Donc $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(y) = x$. Donc $g \circ f = \mathrm{id}_E$.

L'application $g$ convient donc.

◁ Réciproquement, supposons qu'il existe une application $g : F \longrightarrow E$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{id}_F$.

De l'égalité $f \circ g = \mathrm{id}_F$, l'application $\mathrm{id}_F$ étant surjective, d'après la proposition 53, $f$ est surjective.

De l'égalité $g \circ f = \mathrm{id}_E$, l'application $\mathrm{id}_E$ étant injective, d'après la proposition 46, $f$ est injective.

Donc $f$ est bijective.

• Montrons que l'application $g$ est unique. Soit $h : F \longrightarrow E$ une autre application vérifiant $h \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ h = \mathrm{id}_F$. En particulier, $\mathrm{id}_F = f \circ g = f \circ h$. Donc pour tout $y \in F$, $f(g(y)) = f(h(y))$, et $f$ étant bijective donc injective, $g(y) = h(y)$. Donc $g = h$. L'application $g$ est donc unique. □

Il ne suffit pas que $g \circ f = \mathrm{id}_E$ ou que $f \circ g = \mathrm{id}_F$ pour que $f$ soit bijective. Considérons par exemple les fonctions $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ et $g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ définies, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $f(n) = n + 1$ et $g(n) = \max(0, n - 1)$. Alors $g \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ mais $f$ n'est pas surjective car 0 n'a pas d'antécédent par $f$. Notons que $f \circ g \neq \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$ car $(f \circ g)(0) = 1 \neq 0$.

Exemples 58

- *La fonction $f : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ \ ;\ x \longmapsto x^2$ et la fonction $g : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+ \ ;\ x \longmapsto \sqrt{x}$ sont bijectives et sont des bijections réciproques l'une de l'autre : pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,*

$$(g \circ f)(x) = \sqrt{x^2} = x \quad \text{et} \quad (f \circ g)(x) = \left(\sqrt{x}\right)^2 = x.$$

- *La fonction $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ et la fonction $\ln : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ sont bijectives et sont des bijections réciproques l'une de l'autre :*

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \exp(\ln(x)) \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R},\ \ln(\exp(x)) = x.$$

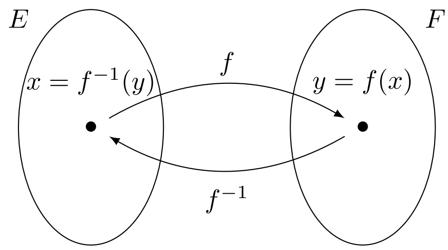
- *L'application $\mathrm{id}_E : E \longrightarrow E$ est bijective, de bijection réciproque $\mathrm{id}_E^{-1} = \mathrm{id}_E$ :*

$$\mathrm{id}_E \circ \mathrm{id}_E = \mathrm{id}_E.$$

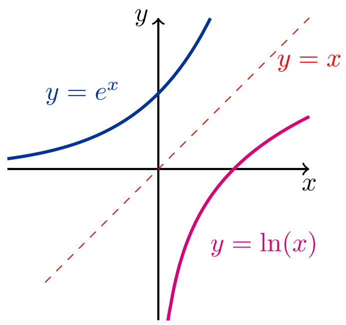
Si $f$ est bijective, la bijection réciproque est l'application qui à un élément $y$ de $F$ associe l'unique antécédent de $y$ par $f$ dans $E$, noté $x$ :

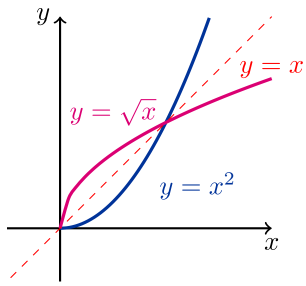
$$f^{-1}: \begin{array}{rcl} F & \longrightarrow & E \\ y & \longmapsto & x \text{ tel que } y = f(x) \end{array}.$$

$$\boxed{\text{Si } f \text{ est bijective : } \quad y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)}$$




Dans le cas d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, cela signifie que les graphes de $f$ et $f^{-1}$ sont symétriques l'un de l'autre par rapport à la droite d'équation $y = x$.




Méthode 59 — *Pour déterminer si une application est bijective,*

- *soit on donne directement l'expression d'une fonction $g$ telle que $g \circ f = \mathrm{id}_E$ et $f \circ g = \mathrm{id}_F$, et dans ce cas, $f$ est bijective, de bijection réciproque $f^{-1} = g$,*
- *soit on résout, pour tout $y \in F$, l'équation $y = f(x)$ d'inconnue $x$. Si, pour tout $y \in F$, cette équation admet une unique solution $x$, alors $f$ est bijective et on a également obtenu l'expression de $f^{-1}$,*
- *soit on montre que $f$ est injective et surjective à l'aide des caractérisations, mais dans ce cas on n'a pas l'expression explicite $f^{-1}$.*

Exemple 60 — *Montrons que l'application* $\mathrm{sh} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ x \longmapsto \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$ *est bijective et déterminons sa bijection réciproque.*

*Soit $y \in \mathbb{R}$. Résolvons l'équation $y = \mathrm{sh}(x)$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,*

$y = \mathrm{sh}(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$ *si et seulement si* $(\mathrm{e}^x)^2 - 2y\mathrm{e}^x - 1 = 0$, *soit encore si et seulement si* $\mathrm{e}^x$ *est une racine strictement positive de* $X^2 - 2yX - 1$, *soit encore si et seulement si* $\mathrm{e}^x = y + \sqrt{y^2+1}$.

*Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y = \mathrm{sh}(x)$ si et seulement si $x = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$.*

*Ainsi, pour tout $y \in \mathbb{R}$, l'équation $y = \mathrm{sh}(x)$ admet une unique solution $x$ sur $\mathbb{R}$, $x = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$.*

*La fonction* sh *est donc bijective, de bijection réciproque* $\mathrm{sh}^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ y \longmapsto \ln\left(y + \sqrt{y^2+1}\right)$.

PROPOSITION 61
*Soient $f : E \longrightarrow F$ et $g : F \longrightarrow G$ deux applications.*

- *Si $f$ est bijective alors $f^{-1}$ est bijective et $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.*
- *Si $f$ et $g$ sont bijectives alors $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.*

**Preuve** —

- Si $f$ est bijective alors d'après la proposition 57, $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_F$ et $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E$ et donc $f^{-1}$ est bijective par la même proposition 57 et $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.
- Supposons $f$ et $g$ bijectives.
  Alors $(g \circ f) \circ \left(f^{-1} \circ g^{-1}\right) = g \circ \left(f \circ f^{-1}\right) \circ g^{-1} = g \circ \mathrm{id}_F \circ g^{-1} = g \circ g^{-1} = \mathrm{id}_G$
  et $\left(f^{-1} \circ g^{-1}\right) \circ (g \circ f) = f^{-1} \circ \left(g^{-1} \circ g\right) \circ f = f^{-1} \circ \mathrm{id}_E \circ f = f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E$.
  Cela montre que $g \circ f$ est bijective de bijection réciproque $f^{-1} \circ g^{-1}$.

□

REMARQUE 62 — *Soient $f : E \longrightarrow F$ une application et $B$ une partie de $F$.*

*Si $f$ est bijective, l'image réciproque de $B$ par $f$, que l'on a notée précédemment $f^{-1}(B)$, est exactement l'image directe de $B$ par $f^{-1}$, qui se note également $f^{-1}(B)$. Il n'y a donc pas d'ambiguïté sur la notation lorsque $f$ est bijective.*

***Preuve*** *— En effet, supposons $f$ bijective et utilisons provisoirement la notation $f^{\leftarrow}(B)$ pour désigner l'image réciproque de $B$ par $f$.*

*Soit $x \in F$. $x \in f^{\leftarrow}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B \Leftrightarrow \exists y \in B \mid f(x) = y \Leftrightarrow \exists y \in B \mid x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(B)$*

*Donc $f^{\leftarrow}(B) = f^{-1}(B)$.* □

*Mais on rappelle que la notation $f^{-1}(B)$ ne suppose pas $f$ bijective.*

*Si $f$ n'est pas bijective, $f$ n'admet pas bijection réciproque $f^{-1}$. L'ensemble $f^{-1}(B)$ ne peut donc en aucun cas désigner l'image directe de $B$ par $f^{-1}$ (puisqu'elle n'existe pas !)*

*On retiendra que $f^{-1}(\{y\})$ existe toujours, que $f$ soit bijective ou non, contrairement à $f^{-1}(y)$ qui n'est défini que si $f$ est bijective.*

PROPOSITION 63
*Si $f : E \longrightarrow F$ est une application injective alors l'application induite de $E$ sur $\mathrm{Im}(f)$ est bijective.*

*En particulier, si $I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application continue strictement monotone, alors $f$ induit une bijection de $I$ sur l'intervalle $f(I)$.*

EXEMPLE 64 — *La fonction $\cos : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue strictement décroissante. Elle induit donc une bijection de $[0, \pi]$ sur $\cos([0, \pi]) = [-1, 1]$.*

DÉFINITION 65
*L'ensemble des applications bijectives de $E$ sur $E$ est noté $S(E)$ et s'appelle l'ensemble des permutations de $E$. Lorsque $E = \{1, \ldots, n\}$ où $n \in \mathbb{N}^*$, on note alors plus simplement $S_n$.*

DÉFINITION 66
*On appelle **involution** toute application $f : E \longrightarrow E$ telle que $f \circ f = \mathrm{id}_E$. Une telle application est bijective, de bijection réciproque $f^{-1} = f$.*

EXEMPLES 67

- *La fonction $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^*$ ; $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ est une involution et est donc bijective, de bijection réciproque elle-même.*
- *L'application $f : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$ ; $A \longmapsto \complement_E A$ est une involution et est donc bijective, de bijection réciproque elle-même.*

# Chapitre 3 Relations binaires

Nous allons étudier dans ce chapitre des relations liant deux éléments d'un même ensemble. Souvent, nous cherchons à comparer des éléments ou à expliquer ce qui les rapproche ou les distingue. Par exemple, on peut comparer l'âge de deux individus, ou dire s'ils habitent dans le même pays, etc. Nous allons définir proprement la notion de relation en mathématiques.

## 3.1 Premières définitions

Définition 1
*Soient $E$ et $F$ deux ensembles. On appelle* ***relation binaire*** \关系\ *entre $E$ et $F$ tout triplet $\mathcal{R} = (E, F, G)$ où $G$ est une partie de $E \times F$. Si $(x, y) \in G$, on note $x\mathcal{R}y$ et on dit que $x$* ***est en relation avec*** *$y$. On parle de la relation $\mathcal{R}$.*

On a donc $G = \{(x, y) \in E \times F \mid x\mathcal{R}y\}$.

L'ordre dans un couple importe donc on peut avoir $x\mathcal{R}y$ mais pas $y\mathcal{R}x$.

Remarque 2 — *Les applications de $E$ dans $F$ sont des cas particuliers de relations binaires : pour tout $(x, y) \in E \times F$, $x\mathcal{R}y$ si $y = f(x)$.*

Dans la suite du cours, nous nous intéresserons plus particulièrement aux relations binaires de $E$ sur lui-même, qui sont les relations les plus utiles en mathématiques. Lorsque $E = F$, la relation $\mathcal{R}$ de $E$ sur lui-même est appelée **relation binaire sur** $E$.

Une relation $\mathcal{R}$ est souvent notée par un symbole $\equiv$, $\leq$, $\sim$, $\subset$...

Exemples 3 *Donnons quelques exemples de relations binaires d'un ensemble sur lui-même :*

- *la relation d'égalité $=$ sur $E$,*
- *les relations d'inégalité $\leq$, $<$ sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{N}$,*
- *la relation d'inclusion $\subset$ sur $\mathcal{P}(E)$,*
- *la relation $\leq$ sur l'espace des fonctions de $E$ dans $\mathbb{R}$, définie par $f \leq g$ si pour tout $x \in E$, $f(x) \leq g(x)$,*
- *la relation de divisibilité $\mid$ sur $\mathbb{Z}$, définie par $m \mid n$ s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $n = mk$.*
- *pour tout $n \in \mathbb{N}$, la relation de congruence modulo $n$ sur $\mathbb{Z}$, notée $\equiv \mod n$, définie par $a \equiv b \mod n$ s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = b + kn$.*
- *pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la relation de congruence modulo $\alpha$ sur $\mathbb{R}$, notée $\equiv \mod \alpha$, définie par $a \equiv b \mod \alpha$ s'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = b + k\alpha$.*
- *la relation « avoir le même signe » sur $\mathbb{R}^*$.*

Une relation binaire peut satisfaire certaines propriétés.

Définition 4
*Soit $E$ un ensemble. Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur $E$.*

- *$\mathcal{R}$ est dite* ***réflexive*** \自反性\ *si, pour tout $x \in E$, $x\mathcal{R}x$,*
- *$\mathcal{R}$ est dite* ***symétrique*** \对称性\ *si, pour tout $(x, y) \in E^2$, si $x\mathcal{R}y$ alors $y\mathcal{R}x$,*
- *$\mathcal{R}$ est dite* ***antisymétrique*** \反对称性\ *si, pour tout $(x, y) \in E^2$, si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$ alors $x = y$,*
- *$\mathcal{R}$ est dite* ***transitive*** \传递性\ *si, pour tout $(x, y, z) \in E^3$, si $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$ alors $x\mathcal{R}z$.*

Exemples 5

- *La relation d'égalité $=$ sur $E$ est réflexive, symétrique, antisymétrique et transitive. On notera qu'une relation peut donc être symétrique et antisymétrique.*
- *La relation $\leq$ sur $\mathbb{R}$ est réflexive, antisymétrique et transitive. Elle n'est pas symétrique car par exemple $2 \leq 3$ mais $3 \nleq 2$.*
- *La relation $<$ sur $\mathbb{R}$ est symétrique et transitive. Elle n'est ni réflexive, ni antisymétrique. Par exemple, $1 \nless 1$.*
- *La relation de divisibilité sur $\mathbb{Z}$ est réflexive et transitive. Elle n'est ni symétrique, ni antisymétrique. En effet, on a $1|2$ mais $2 \nmid 1$, et $1|-1$ et $-1|1$ mais $1 \neq -1$.*
- *La relation d'inclusion $\subset$ sur $\mathcal{P}(E)$ est réflexive, antisymétrique et transitive. Elle n'est pas symétrique car par exemple $\{1\} \subset \{1,2\}$ mais $\{1,2\} \not\subset \{1\}$.*
- *La relation « avoir le même signe » sur $\mathbb{R}^*$ est réflexive, symétrique et transitive. Elle n'est pas antisymétrique car par exemple, $1\mathcal{R}2$ et $2\mathcal{R}1$ mais $1 \neq 2$.*

## 3.2 Relations d'équivalence

Nous définissons dans cette partie un premier type de relation, celle d'équivalence. Une telle relation permet d'identifier sous une même étiquette les éléments qui sont en relation et de ne plus les distinguer. Par exemple, on identifie les individus à leur nationalité.

### 3.2.1 Définition et exemples

Définition 6

*Soit $E$ un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire sur $E$. On dit que $\mathcal{R}$ est une **relation d'équivalence** \等价关系\ sur $E$ si $\mathcal{R}$ est réflexive, symétrique et transitive.*

Une relation d'équivalence est souvent notée $\equiv$ , ou $\sim$, ...

Exemples 7

- *La relation d'égalité $=$ sur $E$ est une relation d'équivalence.*
- *La relation « avoir le même signe » sur $\mathbb{R}^*$ est une relation d'équivalence.*
- *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la relation de congruence modulo $n$ sur $\mathbb{Z}$ est une relation d'équivalence.*

  ***Preuve*** — *Soit $n \in \mathbb{N}$.*
  - ***Réflexivité :*** *Soit $p \in \mathbb{Z}$. On a $p = p + 0 \times n$ et $0 \in \mathbb{Z}$ donc $p \equiv p \mod n$. Donc la relation de congruence modulo $n$ est réflexive.*
  - ***Symétrie :*** *Soit $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$. Supposons que $p \equiv q \mod n$. Alors il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $p = q + kn$. Donc $q = p - kn = p + (-k)n$ et $-k \in \mathbb{Z}$. Donc $q \equiv p \mod n$. Donc la relation de congruence modulo $n$ est symétrique.*
  - ***Transitivité :*** *Soit $(p,q,r) \in \mathbb{Z}^3$. Supposons que $p \equiv q \mod n$ et $q \equiv r \mod n$. Montrons que $p \equiv r \mod n$. Il existe $k_1 \in \mathbb{Z}$ tel que $p = q + k_1 n$ et il existe $k_2 \in \mathbb{Z}$ tel que $q = r + k_2 n$. Donc $p = r + k_2 n + k_1 n = r + (k_1 + k_2)n$ et $(k_1 + k_2) \in \mathbb{Z}$. Donc $p \equiv r \mod n$. Donc la relation de congruence modulo $n$ est transitive.*

  *De ces trois points, il vient que la relation de congruence modulo $n$ est une relation d'équivalence.* □
- *Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la relation de congruence modulo $\alpha$ sur $\mathbb{R}$ est une relation d'équivalence.*

  ***Preuve*** — *Analogue à la preuve précédente.* □
- *Si $(A_i)_{i \in I}$ est une partition de $E$, la relation d'appartenance au même sous-ensemble $A_i$ est une relation d'équivalence.*

Remarque 8 — *Les écritures $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$ sont équivalentes car $\mathcal{R}$ est symétrique.*

### 3.2.2 Classes d'équivalence et ensemble quotient

DÉFINITION 9
*Soient $E$ un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur $E$. Soit $x$ un élément de $E$. On appelle* ***classe d'équivalence*** *de $x$* \x的等价类\ *pour la relation $\mathcal{R}$ (ou plus simplement classe de $x$), notée $\mathrm{Cl}(x)$ ou $\overline{x}$, l'ensemble des éléments $y$ de $E$ qui sont en relation avec $x$ :*

$$\mathrm{Cl}(x) = \{y \in E \mid x\mathcal{R}y\}.$$

EXEMPLES 10

- *La classe d'équivalence de 1 pour la relation d'équivalence « avoir le même signe » sur $\mathbb{R}^*$ est l'ensemble des nombres réels non nuls de même signe que 1, c'est-à-dire l'ensemble des nombres réels strictement positifs : $\mathrm{Cl}(1) = \mathbb{R}_+^*$.*
- *Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $r \in \mathbb{Z}$. La classe d'équivalence de $r$ pour la relation de congruence modulo $n$ dans $\mathbb{Z}$ est*

$$\begin{aligned}\mathrm{Cl}(r) &= \{p \in \mathbb{Z} \mid p \equiv r \bmod n\}\\ &= \{p \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z}, p = r + kn\}\\ &= \{r + kn \mid k \in \mathbb{Z}\}\\ &= n\mathbb{Z} + r\end{aligned}$$

PROPOSITION 11
*Soient $E$ un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur $E$. Pour tout $(x,y) \in E^2$, $\mathrm{Cl}(x) = \mathrm{Cl}(y)$ si et seulement si $x\mathcal{R}y$.*

**Preuve** — Soit $(x,y) \in E^2$.

$\triangleright$ Supposons que $\mathrm{Cl}(x) = \mathrm{Cl}(y)$. Comme $\mathcal{R}$ est réflexive, on a $y\mathcal{R}y$ donc $y \in \mathrm{Cl}(y)$. Or, par hypothèse, $\mathrm{Cl}(x) = \mathrm{Cl}(y)$, donc $y \in \mathrm{Cl}(x)$. Donc par définition d'une classe d'équivalence, $x\mathcal{R}y$.

$\triangleleft$ Supposons que $x\mathcal{R}y$. Soit $z \in \mathrm{Cl}(x)$. Alors $x\mathcal{R}z$. Comme $x\mathcal{R}y$, on a, par symétrie de $\mathcal{R}$, $y\mathcal{R}x$. Donc par transitivité de $\mathcal{R}$, comme $y\mathcal{R}x$ et $x\mathcal{R}z$, on a $y\mathcal{R}z$. Donc $z \in \mathrm{Cl}(y)$. D'où $\mathrm{Cl}(x) \subset \mathrm{Cl}(y)$. Par symétrie des rôles de $x$ et $y$, on a de la même manière $\mathrm{Cl}(y) \subset \mathrm{Cl}(x)$. Finalement, $\mathrm{Cl}(x) = \mathrm{Cl}(y)$.

□

Notons donc que si $y \in \mathrm{Cl}(x)$ alors $\mathrm{Cl}(y) = \mathrm{Cl}(x)$.

DÉFINITION 12
*Soient $E$ un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur $E$. Soit $C$ une classe d'équivalence. On appelle* ***représentant*** *de la classe d'équivalence $C$ tout élément $x$ de $C$.*

EXEMPLE 13 — *Nous avons vu que $\mathbb{R}_+^*$ est une classe d'équivalence (celle de 1) pour la relation d'équivalence « avoir le même signe » sur $\mathbb{R}^*$. Tout élément de $\mathbb{R}_+^*$ est un représentant de cette classe. Des représentants de cette classe sont donc par exemple 1, ou $\pi$, ou $\sqrt{2}$... Ainsi, $\mathbb{R}_+^* = \mathrm{Cl}(1) = \mathrm{Cl}(\pi) = \mathrm{Cl}(\sqrt{2})$...*

PROPOSITION 14
*Soient $E$ un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur $E$. L'ensemble des classes d'équivalence de $E$ forme une partition de $E$, c'est-à-dire :*

- *Elles sont non vides,*
- *Elle sont deux à deux disjointes,*
- *Leur réunion est égale à $E$.*

**Preuve** —

- Une classe d'équivalence $C$ est toujours la classe d'équivalence d'un élément $x$ de $E$ : $C = \mathrm{Cl}(x)$. Comme $x \in \mathrm{Cl}(x)$ puisque $x\mathcal{R}x$ par réflexivité de $\mathcal{R}$, on a $x \in C$ et $C$ est non vide.

- Soient $C_1$ et $C_2$ deux classes d'équivalence. Supposons $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$. Soient $x_1$ un représentant de $C_1$ et $x_2$ un représentant de $C_2$. Ainsi, $C_1 = \mathrm{Cl}(x_1)$ et $C_2 = \mathrm{Cl}(x_2)$. Par hypothèse, il existe $x \in C_1 \cap C_2$. En particulier, $x \in C_1$ donc $x\mathcal{R}x_1$ et $x \in C_2$ donc $x\mathcal{R}x_2$. Par symétrie et transitivité de $\mathcal{R}$, $x_1\mathcal{R}x_2$. Donc d'après la proposition précédente, $\mathrm{Cl}(x_1) = \mathrm{Cl}(x_2)$, soit $C_1 = C_2$. Ainsi, deux classes sont soit égales soit disjointes.
- Soit $x \in E$. Alors $x \in \mathrm{Cl}(x)$ donc $x$ appartient à la réunion des classes d'équivalence. Donc $E$ est inclus dans la réunion des classes d'équivalence. L'inclusion réciproque étant évidente puisque une classe d'équivalence est une partie de $E$, la réunion est égale à $E$.

De ces trois points, il vient que l'ensemble des classes d'équivalence de $E$ forme une partition de $E$. □

Exemples 15

- *La relation « avoir le même signe » sur $\mathbb{R}^*$ a exactement deux classes d'équivalence : $\mathbb{R}^*_+$ et $\mathbb{R}^*_-$. Ces deux classes d'équivalence forment bien une partition de $\mathbb{R}^*$.*

  ***Preuve*** — *Soit $C$ une classe d'équivalence et considérons $x$ un représentant de $C$. Si $x$ est positif, alors $C = \mathrm{Cl}(x) = \mathbb{R}^*_+$. Si $x$ est négatif, alors $C = \mathrm{Cl}(x) = \mathbb{R}^*_-$. Les classes $\mathbb{R}^*_+$ et $\mathbb{R}^*_-$ sont bien sûr distinctes.* □
- *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la relation de congruence modulo $n$ sur $\mathbb{Z}$ possède exactement $n$ classes d'équivalence : les ensembles $n\mathbb{Z} + r = \{nk + r \mid k \in \mathbb{Z}\}$ avec $r \in \{0, \dots, n-1\}$. On les note souvent $\overline{0}$, $\overline{1}$, …, $\overline{n-1}$. On a choisi comme représentant des différentes classes les entiers 0, 1, …, $n-1$.*

  ***Preuve*** — *Soit $C$ une classe d'équivalence et considérons $p$ un représentant de $C$. Comme $p \in \mathbb{Z}$, on peut effectuer la division euclidienne de $p$ par $n$. Il existe donc $k \in \mathbb{Z}$ et $r \in \{0, \dots, n-1\}$ tel que $p = kn + r$. Donc $p \equiv r \mod n$. Donc $C = \mathrm{Cl}(r) = n\mathbb{Z} + r$. De plus, les $n$ classes d'équivalence $n\mathbb{Z} + r$ où $r \in \{0, \dots, n-1\}$ deux à deux disjointes car si $r_1$ et $r_2$ sont deux éléments distincts de $\{0, \dots, n-1\}$ alors $r_1$ n'est pas congru à $r_2$ modulo $n$.* □

Définition 16
*Soient $E$ un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur $E$. L'ensemble des classes d'équivalence de $E$ pour la relation $\mathcal{R}$ s'appelle **l'ensemble quotient de $E$ par $\mathcal{R}$**. On le note $E/\mathcal{R}$. C'est un sous-ensemble de $\mathcal{P}(E)$.*

Exemples 17

- *L'ensemble quotient de $\mathbb{R}^*$ par la relation « avoir le même signe » est l'ensemble $\{\mathbb{R}^*_-, \mathbb{R}^*_+\}$.*
- *Soit $n \in \mathbb{Z}$. L'ensemble quotient de $\mathbb{Z}$ par la relation de congruence modulo $n$ est l'ensemble $\{n\mathbb{Z}, n\mathbb{Z}+1, \dots, n\mathbb{Z}+n-1\} = \{\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{n-1}\}$. On note cet ensemble $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.*

## 3.3 Relations d'ordre et ensembles ordonnés

Nous définissons dans cette dernière partie la notion de relation d'ordre. Une telle relation permet intuitivement de hiérarchiser, d'ordonner les éléments. Cela généralise l'ordre naturel sur les nombres.

### 3.3.1 Définitions et exemples

Définition 18
*Soient $E$ un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation binaire sur $E$. On dit que $\mathcal{R}$ est une **relation d'ordre** \偏序\ sur $E$ si $\mathcal{R}$ est réflexive, antisymétrique et transitive. Dans ce cas, on dit que $(E, \mathcal{R})$ est un **ensemble ordonné**.*

Remarques 19 *Une relation d'ordre est souvent notée $\preccurlyeq$, ou $\leq$,…. Les écritures $x \preccurlyeq y$ et $y \succcurlyeq x$ sont équivalentes.*

*Souvent, $x \preccurlyeq y$ se lit « $x$ plus petit que $y$ » mais cela n'est qu'une convention.*

*La notation $x \preccurlyeq y \preccurlyeq z$ signifie $x \preccurlyeq y$ et $y \preccurlyeq z$.*

Exemples 20

- *La relation $\leq$ sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}$ ou $\mathbb{N}$ est une relation d'ordre.*
- *La relation d'inclusion $\subset$ sur $\mathcal{P}(E)$ est une relation d'ordre.*

- *La relation $\leq$ sur l'espace des fonctions de $E$ dans $\mathbb{R}$ est une relation d'ordre.*
- *La relation $<$ n'est pas une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$ car elle n'est pas réflexive. En effet, $1 \not< 1$.*
- *La relation de divisibilité sur $\mathbb{N}$ est une relation d'ordre.*

  ***Preuve** —*
  - ***Réflexivité :** Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $n = n \times 1$ donc $n|n$. Donc la relation de divisibilité sur $\mathbb{N}$ est réflexive.*
  - ***Antisymétrie :** Soit $(p, q) \in \mathbb{N}^2$. Supposons que $p|q$ et $q|p$. Alors il existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tel que $p = k_1 \times q$ et il existe $k_2 \in \mathbb{N}$ tel que $q = k_2 \times p$. Donc $p = k_1 \times k_2 \times p$. Donc $p(1 - k_1k_2) = 0$.*
    *Si $p = 0$ alors $q = k_2 \times p = k_2 \times 0 = 0$ donc $p = q = 0$.*
    *Sinon, $k_1k_2 = 1$ et comme $k_1$ et $k_2$ sont des entiers naturels, on a $k_1 = k_2 = 1$. Donc $p = k_1 \times q = q$. Donc la relation de divisibilité sur $\mathbb{N}$ est antisymétrique.*
  - ***Transitivité :** Soit $(m, n, p) \in \mathbb{N}^3$ tel que $m|n$ et $n|p$. Montrons que $m|p$. Il existe $k_1 \in \mathbb{N}$ tel que $n = k_1 \times n$ et il existe $k_2 \in \mathbb{N}$ tel que $p = k_2 \times n$. Donc $p = k_2 \times k_1 \times m$ et $k_1 \times k_2 \in \mathbb{N}$. Donc $m|p$. Donc la relation de divisibilité sur $\mathbb{N}$ est transitive.*

  *De ces trois points, il vient que la relation de divisibilité sur $\mathbb{N}$ est une relation d'ordre.* □
- *Mais la relation de divisibilité sur $\mathbb{Z}$ n'est pas une relation d'ordre car elle n'est pas antisymétrique.*

Dans $\mathbb{R}$ muni de l'ordre usuel $\leq$, on peut comparer deux à deux tous les éléments (on a toujours $x \leq y$ ou $y \leq x$), mais ce n'est pas toujours le cas, par exemple pour l'inclusion sur $\mathcal{P}(E)$. Nous introduisons donc la définition suivante.

DÉFINITION 21
*Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné.*

- *On dit que l'ordre $\preccurlyeq$ est **total** \全序\ si, pour tout $(x, y) \in E^2$, on a $x \preccurlyeq y$ ou $y \preccurlyeq x$. L'ensemble $(E, \preccurlyeq)$ est alors appelé **ensemble totalement ordonné**.*
- *Sinon, on dit que l'ordre est **partiel** et l'ensemble $(E, \preccurlyeq)$ est appelé **ensemble partiellement ordonné**.*

Lorsque $x \preccurlyeq y$ ou $y \preccurlyeq x$, on dit que les éléments $x$ et $y$ sont **comparables**.

EXEMPLES 22

- *L'ensemble $(\mathbb{R}, \leq)$ est un ensemble totalement ordonné.*
- *Si $E$ contient plus de deux éléments, l'ensemble $(\mathcal{P}(E), \subset)$ est un ensemble partiellement ordonné. En effet, si $a$ et $b$ sont des éléments distincts de $E$, alors on a $\{a\} \not\subset \{b\}$ et $\{b\} \not\subset \{a\}$.*
- *La relation de divisibilité sur $\mathbb{N}$ est une relation d'ordre partiel. Par exemple, $2 \nmid 3$ et $3 \nmid 2$.*

DÉFINITION 23
*Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné. La relation $\prec$ sur $E$ associée à $\preccurlyeq$, appelée **relation d'ordre strict** associée à $\preccurlyeq$, est définie, pour tout $(x, y) \in E^2$, par $x \prec y$ si, par définition, $x \preccurlyeq y$ et $x \neq y$.*

PROPOSITION 24
*Soit $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné. La relation d'ordre strict $\prec$ est antisymétrique et transitive.*

**Preuve** —

- **Antisymétrie :** Soit $(x, y) \in E^2$. Supposons que $x \prec y$ et $y \prec x$. Alors $x \preccurlyeq y$ et $y \preccurlyeq x$, donc par antisymétrie de $\preccurlyeq$, $x = y$. Donc $\prec$ est antisymétrique.
- **Transitivité :** Soit $(x, y, z) \in E^3$. Supposons que $x \prec y$ et $y \prec z$. Alors $x \preccurlyeq y$ et $y \preccurlyeq z$ donc $x \preccurlyeq z$. Il reste à montrer que $x \neq z$. Supposons par l'absurde que $x = z$. Alors $x \preccurlyeq y$ et comme $y \preccurlyeq z$, on a aussi $y \preccurlyeq x$. Donc par antisymétrie de $\preccurlyeq$, on a $x = y$, contredisant $x \prec y$. Donc $x \neq z$. D'où $x \prec z$. Donc $\prec$ est transitive.

□

EXEMPLE 25 — *La relation $<$ sur $\mathbb{R}$ est la relation d'ordre strict de $\leq$.*

La négation de $x \preccurlyeq y$ est, $x$ et $y$ ne sont pas comparables ou $x$ et $y$ sont comparables et $y \prec x$.

### 3.3.2 Majorant et minorant

Définition 26
*Soient $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné et $A$ une partie de $E$.*

- *Soit $M \in E$. On dit que $M$ est un* ***majorant*** \上界\ *de $A$ si, pour tout $a \in A$, $a \preccurlyeq M$.*
- *Soit $m \in E$. On dit que $m$ est un* ***minorant*** \下界\ *de $A$ si, pour tout $a \in A$, $m \preccurlyeq a$.*

Exemples 27

- *Dans $(\mathbb{R}, \leq)$, l'ensemble $\mathbb{R}_-$ est l'ensemble des minorants de $\mathbb{R}_+$. $\mathbb{R}_+$ n'admet pas de majorant.*

  ***Preuve*** — *En effet, supposons que $M$ soit un majorant de $\mathbb{R}_+$. Alors, comme $M+1 \in \mathbb{R}_+$, on a $M+1 \leq M$, ce qui est absurde.* □

- *Pour la relation d'inclusion, $\emptyset$ est un minorant de $\mathcal{P}(E)$ et $E$ est un majorant de $\mathcal{P}(E)$.*
- *Pour la relation de divisibilité sur $\mathbb{N}$, l'ensemble $\{1, 2\}$ est l'ensemble des minorants de l'ensemble $\{4, 6\}$ et l'ensemble des multiples de 12 est l'ensemble des majorants.*

  ***Preuve*** —
  - *Soit $m$ un minorant de $\{4, 6\}$. Alors $m|4$ et $m|6$ donc $m|6-4=2$. Donc $m=1$ ou $m=2$. 1 et 2 divisent évidemment 4 et 6. Donc l'ensemble des minorants est $\{1, 2\}$.*
  - *Soit $M$ un majorant de $\{4, 6\}$. Alors $4|M$ et $6|M$ donc $12 = \mathrm{ppcm}(4, 6)|M$. Donc $M$ est un multiple de 12. 4 et 6 divisent évidemment tout multiple de 12. Donc l'ensemble des majorants est $\{12n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.*

  □

Remarque 28 — *Un majorant ou un minorant, s'ils existent, ne sont pas uniques comme on vient de le voir.*

Définition 29

- *On dit que $A$ est une partie* ***majorée*** *si $A$ admet au moins un majorant $M$. Autrement dit, $A$ est majorée s'il existe $M \in E$ tel que pour tout $a \in A$, $a \preccurlyeq M$.*
  *On dit aussi que $M$ majore $A$ ou que $A$ est majorée par $M$.*
- *On dit que $A$ est une partie* ***minorée*** *si $A$ admet au moins un minorant $m$. Autrement dit, $A$ est minorée s'il existe $m \in E$ tel que pour tout $a \in A$, $m \preccurlyeq a$.*
  *On dit aussi que $m$ minore $A$ ou que $A$ est minorée par $m$.*
- *On dit que $A$ est* ***bornée*** *si $A$ est majorée et minorée. Autrement dit, $A$ est bornée s'il existe $(m, M) \in E^2$ tel que pour tout $a \in A$, $m \preccurlyeq a \preccurlyeq M$.*

Exemples 30

- *Pour la relation $\leq$ sur $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$ est une partie minorée, par exemple par 0. $\mathbb{R}_+$ n'est pas majorée car elle n'admet pas de majorant.*
- *Pour la relation d'inclusion, $\mathcal{P}(E)$ est minorée (par $\emptyset$) et majorée (par $E$). $\mathcal{P}(E)$ est donc une partie bornée pour l'inclusion.*
- *Pour la relation de divisibilité sur $\mathbb{N}$, l'ensemble $\{4, 6\}$ est minoré, par exemple par 2, et majoré, par exemple par 12. C'est donc une partie bornée pour la relation de divisibilité.*

### 3.3.3 Maximum et minimum

Définition 31
*Soient $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné et $A$ une partie de $E$.*

- *On dit que $A$ admet un* ***maximum*** \最大值\ *s'il existe $M \in A$ tel que pour tout $a \in A$, $a \preccurlyeq M$.*
- *On dit que $A$ admet un* ***minimum*** \最小值\ *s'il existe $m \in A$ tel que pour tout $a \in A$, $m \preccurlyeq a$.*

Remarque 32 — *Un maximum (resp. minimum) de $A$ est donc un majorant (resp. minorant) de $A$ qui appartient à $A$.*

PROPOSITION 33

- *Si $A$ admet un maximum alors celui-ci est unique, et est noté* $\max(A)$*.*
- *Si $A$ admet un minimum alors celui-ci est unique, et est noté* $\min(A)$*.*

**Preuve** —

- Supposons que $A$ admette deux maximums $M_1$ et $M_2$. Montrons que $M_1 = M_2$. Par définition du maximum, $M_1$ et $M_2$ sont des éléments de $A$ et sont des majorants de $A$. Comme $M_1$ est un majorant de $A$ et $M_2 \in A$, on a $M_2 \preccurlyeq M_1$. De même, $M_2$ étant un majorant de $A$ et $M_1 \in A$, on a $M_1 \preccurlyeq M_2$. Donc par antisymétrie de $\preccurlyeq$, on en déduit que $M_1 = M_2$. Donc, si $A$ admet un maximum alors celui-ci est unique.
- La preuve est analogue au cas précédent.

$\square$

REMARQUE 34 — *S'ils existent, on peut donc parler* DU *maximum et* DU *minimum, mais on parle toujours d'*UN *majorant et d'*UN *minorant.*

EXEMPLES 35

- *$0$ est le minimum de $\mathbb{R}_+$. $\mathbb{R}_+$ n'admet pas de maximum.*
- *$\emptyset$ est le minimum de $\mathcal{P}(E)$ et $E$ le maximum pour la relation d'inclusion.*
- *Dans $(\mathbb{N}, |\ )$, l'ensemble $\{4,6\}$ n'admet pas de minimum ni de maximum. En effet, aucun des minorants $\{1,2\}$ et aucun des majorants $\{12n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ n'appartient à $\{4,6\}$.*
- *Dans $(\mathbb{R}, \leq)$, soit $I = [0,1[$. Le minimum de $I$ est $0$ et $I$ n'admet pas de maximum.*

  ***Preuve*** — *Supposons que $I$ admette un maximum $M$. Alors $M \in [0,1[$ donc $M < 1$. Posons $M' = \dfrac{M+1}{2}$. Alors $M' \in [0,1[$ et $M < M'$, contredisant la maximalité de $M$. Donc $I$ n'admet pas de maximum.* $\square$
- *Dans $(\mathbb{R}, \leq)$, soit $A = \left\{\dfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$. Le maximum de $A$ est $1$ et $A$ n'admet pas de minimum.*

  ***Preuve*** —

  - *On a $1 = \dfrac{1}{1}$ donc $1 \in A$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{n} \leq 1$ donc $A$ admet un maximum et $\max(A) = 1$.*
  - *Supposons que $A$ admette un minimum $m$. Alors $m \in A$ et il existe $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $m = \dfrac{1}{n_0}$. $m$ étant un minorant, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $m \leq \dfrac{1}{n}$. En particulier, pour $n = n_0 + 1$, on a $\dfrac{1}{n_0} \leq \dfrac{1}{n_0+1}$, ce qui est absurde. Donc $A$ n'admet pas de minimum.*

  $\square$

Citons trois propriétés fondamentales de $\mathbb{N}$.

PROPOSITION 36
*Dans l'ensemble ordonné $(\mathbb{N}, \leq)$,*

- *Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un minimum,*
- *Toute partie non vide majorée de $\mathbb{N}$ admet un maximum,*
- *$\mathbb{N}$ n'a pas de maximum.*

### 3.3.4 Borne supérieure et borne inférieure

DÉFINITION 37
*Soient $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné et $A$ une partie de $E$.*

- *On appelle **borne supérieure** \上确界\ de $A$, si elle existe, le plus petit des majorants de $A$. On la note alors* $\sup(A)$*.*
- *On appelle **borne inférieure** \下确界\ de $A$, si elle existe, le plus grand des minorants de $A$. On la note alors* $\inf(A)$*.*

REMARQUE 38 — *La borne supérieure (resp. inférieure) n'existe pas nécessairement mais, si elle existe, elle est unique par unicité du minimum des majorants de $A$ (resp. maximum des minorants).*

MÉTHODE 39 — *Pour démontrer que $A$ admet une borne supérieure (resp. inférieure) égale à $M$ (resp. $m$),*

1. *on commence par montrer que $M$ (resp. $m$) est un majorant (resp. minorant) de $A$ :*
   *pour tout $a \in A$, $a \preccurlyeq M$ (resp. $m \preccurlyeq a$),*
2. *puis on montre que tout majorant (resp. minorant) de $A$ est supérieur (resp. inférieur) à $M$ (resp. $m$) : en considérant un majorant $M'$ (resp. un minorant $m'$), on montre que $M \preccurlyeq M'$ (resp. $m' \preccurlyeq m$).*

*On montre ainsi que $M$ est le plus petit des majorants (resp. $m$ est le plus grand des minorants).*

La différence entre $\max(A)$ et $\sup(A)$ est que $\max(A)$ est un élément de $A$ alors que $\sup(A)$ n'est pas nécessairement un élément de $A$.

On dispose tout de même du résultat suivant.

PROPOSITION 40
*Soient $(E, \preccurlyeq)$ un ensemble ordonné et $A$ une partie de $E$.*

- *Si $A$ possède un maximum alors $A$ possède une borne supérieure et* $\max(A) = \sup(A)$.
- *Si $A$ possède un minimum alors $A$ possède une borne inférieure et* $\min(A) = \inf(A)$.

**Preuve** —

- Supposons que $A$ possède un maximum $M$. Alors $M$ est un majorant de $A$. De plus, comme $M \in A$, pour tout majorant $M'$ de $A$, on a $M \preccurlyeq M'$.
  Donc $M$ est le plus petit des majorants. Donc $A$ admet une borne supérieure et $M = \sup(A)$.
- Preuve analogue à la précédente.

□

EXEMPLES 41

- $0$ *est le minimum donc la borne inférieure de $\mathbb{R}_+$. $\mathbb{R}_+$ n'admet pas de borne supérieure car $\mathbb{R}_+$ n'est pas majoré.*
- *Pour la relation d'inclusion sur $\mathcal{P}(E)$, $\emptyset$ est le minimum donc la borne inférieure de $\mathcal{P}(E)$, $E$ est le maximum donc la borne supérieure de $\mathcal{P}(E)$.*
- *Pour la relation de divisibilité, la borne inférieure de $\{4, 6\}$ est $2$ et la borne supérieure est $12$.*
  ***Preuve** — Nous avons vu que l'ensemble des minorants est $\{1, 2\}$. Donc le plus grand des minorants existe et vaut $2$. Donc $\sup(\{4, 6\}) = 2$. L'ensemble des majorants est $\{12n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$. Donc le plus petit des majorants existe et vaut $12$. Donc $\inf(\{4, 6\}) = 12$.* □
- *Dans $(\mathbb{R}, \leq)$, $[0, 1[$ n'admet pas de maximum mais admet une borne supérieure égale à $1$. Sa borne inférieure est égale à son minimum, $0$.*
  ***Preuve** — Nous avons déjà vu que $[0, 1[$ n'admet pas de maximum.*
  *Montrons que $[0, 1[$ admet une borne supérieure égale à $1$.*
  *Pour tout $x \in [0, 1[$, on a $x \leq 1$. Donc $1$ majore $[0, 1[$.*
  *Montrons que $1$ est le plus petit des majorants. Soit $M$ un majorant de $[0, 1[$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $1 - \dfrac{1}{n} \in [0, 1[$, donc $1 - \dfrac{1}{n} \leq M$. En laissant tendre $n$ vers $+\infty$, on en déduit que $1 \leq M$.*
  *Donc $1$ est le plus petit des majorants de $[0, 1[$ et $\sup(A) = 1$.* □
- *Dans $(\mathbb{R}, \leq)$, l'ensemble $A = \left\{\dfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\right\}$ n'admet pas de minimum mais admet une borne inférieure égale à $0$. Sa borne supérieure est égale à son maximum, $1$.*
  ***Preuve** — Nous avons déjà vu que $A$ n'admet pas de minimum.*
  *Montrons que $A$ admet une borne inférieure égale à $0$.*
  *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq \dfrac{1}{n}$. Donc $0$ est un minorant de $A$.*
  *Montrons que $0$ est le plus grand des minorants. Soit $m$ un minorant de $A$. Comme $m$ minore $A$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $m \leq \dfrac{1}{n}$. En laissant tendre $n$ vers $+\infty$, on obtient $m \leq 0$.*
  *Donc $0$ est le plus grand des minorants de $A$ et $\inf(A) = 0$.* □

D'après les deux derniers exemples, une partie $A$ peut donc admettre une borne supérieure (resp. inférieure) sans admettre de maximum (resp. minimum).