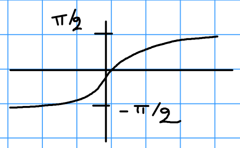
TD7 - Analyse 4

Exercice 2

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \arctan(nx) e^{-x^n}$.

① Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.

② Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+$.



Si $x_0 = 0$, $f_n(x_0) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Si $x_0 \in]0,1[$, $x_0^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

donc $f_n(x_0) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{\pi}{2} \times 1 = \frac{\pi}{2}$.

Si $x_0 = 1$, $f_n(x_0) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{\pi}{2} e^{-1}$

Si $x_0 > 1$, $x_0^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$ donc $f_n(x_0) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{\pi}{2} \times 0 = 0$.

Donc $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers l'application

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \; ; \; x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x_0 = 0 \\ \frac{\pi}{2} & \text{si } x_0 \in]0,1[\\ \frac{\pi}{2} e^{-1} & \text{si } x_0 = 1 \\ 0 & \text{si } x_0 > 1 \end{cases}$$

et f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.

③ Domination : Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|f_n(x)| \leq g(x)$$

$$f_n(x) = \underbrace{\arctan(nx)}_{\leq \frac{\pi}{2}} \underbrace{e^{-x^n}}_{\leq e^{-x} \text{ si } x \geq 1}$$

où $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{si } x \leq 1 \\ \frac{\pi}{2} e^{-x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

et g est intégrable sur $\mathbb{R}_+$ car $\frac{\pi}{2} e^{-x} \underset{x \to +\infty}{=} o\left(\frac{1}{x^2}\right)$

Donc d'après le théorème de convergence dominée, pour tout $n \in \mathbb{N}$

f_n est intégrable et f est intégrable et

$$\int_0^{+\infty} f_n(t)\,dt \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \int_0^1 \frac{\pi}{2}\,dt = \frac{\pi}{2}.$$

Donc $\boxed{\lim_{n \to +\infty} \int_0^{+\infty} \arctan(nx) e^{-x^n}\,dx = \frac{\pi}{2}}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $f_n : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \dfrac{1}{(1+x^2)\sqrt[n]{1+x^n}} \end{array}$.

① Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.

② Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sqrt[n]{1+x_0^n} = (1+x_0^n)^{1/n} = \exp\left(\frac{1}{n}\ln(1+x_0^n)\right)$

Si $x_0 \in [0,1]$, alors $\frac{1}{n}\ln(1+x_0^n) \longrightarrow 0$

donc $\sqrt[n]{1+x_0^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e^0 = 1$.

Si $x_0 > 1$, $\exp\left(\frac{1}{n}\ln(1+x_0^n)\right) = \exp\left(\frac{1}{n}\ln\left(x_0^n\left(1+\frac{1}{x_0^n}\right)\right)\right)$

$$= \exp\left(\frac{1}{n}\ln(x_0^n) + \frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{x_0^n}\right)\right)$$

$$= \underbrace{\exp(\ln(x_0))}_{=x_0} \times \exp\Big(\underbrace{\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{x_0^n}\right)}_{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}\Big)$$

donc $\sqrt[n]{1+x_0^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x_0 e^0 = x_0$.

Donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers l'application

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{1}{1+x^2} & \text{si } x \in [0,1] \\ \dfrac{1}{x(1+x^2)} & \text{si } x > 1 \end{cases} \end{array},$$

et f est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+$.

③ Domination. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$|f_n(x)| \leq \dfrac{1}{1+x^2}$ et $x \longmapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ est positive et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Donc d'après le théorème de convergence dominée, pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est intégrable, et f est intégrable et

$$\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{1}{x(1+x^2)}\,dx.$$

$$= \frac{\pi}{4} + \frac{\ln(2)}{2}.$$

- $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx = [\arctan(x)]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$

- $\displaystyle\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{1+x^2}$, on obtient $a=1$,

$$\frac{1}{x(1+x^2)} - \frac{1}{x} = \frac{1-(1+x^2)}{x(1+x^2)} = \frac{-x}{1+x^2}, \quad \text{donc } b=-1 \text{ et } c=0.$$

Donc $\displaystyle\frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}.$

Donc pour tout $A \geq 1$,

$$\int_1^A \frac{1}{x(1+x^2)}\,dx = \int_1^A \frac{1}{x}\,dx - \int_1^A \frac{x}{1+x^2}\,dx$$

$$= [\ln(x)]_1^A - \frac{1}{2}[\ln(1+x^2)]_1^A$$

$$= \ln(A) - \frac{1}{2}\ln(1+A^2) + \frac{1}{2}\ln(2)$$

$$= \ln(A) - \frac{1}{2}\ln\left(A^2\left(1+\frac{1}{A^2}\right)\right) + \frac{1}{2}\ln(2)$$

$$= \cancel{\ln(A)} - \cancel{\ln(A)} - \frac{1}{2}\ln\left(1+\frac{1}{A^2}\right) + \frac{1}{2}\ln(2)$$

$$\xrightarrow[A\to+\infty]{} \frac{\ln(2)}{2}.$$

Donc $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(1+x^2)}\,dx = \frac{\ln(2)}{2}.$

Donc $\displaystyle\underline{\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt[n]{1+x^2}} = \frac{\pi}{4} + \frac{\ln(2)}{2}}.$

Exercice 4

Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\dfrac{\sin(x)}{e^x - 1} = \dfrac{\sin(x)}{e^x(1-e^{-x})}$ $\qquad \dfrac{1}{1-u} = \sum_{k=0}^{+\infty} u^k \quad |u| < 1$

$$= e^{-x}\sin(x) \times \frac{1}{1-e^{-x}}$$

$$= e^{-x}\sin(x)\sum_{n=0}^{+\infty}(e^{-x})^n$$

$$= \sin(x)\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx}.$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty}\sin(x)\,e^{-nx}.$$

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin(x)e^{-nx}$.

On veut montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx$.

Vérifions les hypothèses du théorème d'interversion série-intégrale.

① pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, f_n est continue par morceaux sur $\mathbb{R}_+^*$

② Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$. $\sum_{n \geq 1} f_n(x_0)$ converge de somme $\dfrac{\sin(x_0)}{e^{x_0}-1}$.

Donc $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+^*$ vers $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{e^x - 1}$, continue par morceaux.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

③ Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $|f_n(x)| = |\sin(x)|e^{-nx} \underset{x\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ est intégrable en $+\infty$ (d'après le critère de Riemann) donc par comparaison de fonctions positives, f_n est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

④ Montrons que $\sum_{n\geq 1}\int_0^{+\infty}|f_n(x)|\,dx$ converge.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\int_0^{+\infty}|f_n(x)|\,dx = \int_0^{+\infty}|\sin(x)|\,e^{-nx}\,dx \leq \int_0^{+\infty} x\,e^{-nx}\,dx$$

$$\forall A > 0 \quad \int_0^A x\,e^{-nx}\,dx = \left[\frac{x e^{-nx}}{-n}\right]_0^A + \int_0^A \frac{e^{-nx}}{n}\,dx$$

$$= \underbrace{\left[\frac{x e^{-nx}}{-n}\right]_0^A}_{\xrightarrow[A\to+\infty]{} 0} - \underbrace{\left[\frac{e^{-nx}}{n^2}\right]_0^A}_{\xrightarrow[A\to+\infty]{} \frac{1}{n^2}}.$$

$0 \leq \int_0^{+\infty} |f_n(x)|\,dx \leq \frac{1}{n^2}$ et $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ converge d'après le critère de Riemann, donc par comparaison de séries à termes positifs, $\sum_{n\geq 1} \int_0^{+\infty} |f_n(x)|\,dx$ converge.

Donc d'après le théorème d'interversion série-intégrale,

① $x \mapsto \frac{\sin(x)}{e^x - 1}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$

② $\sum_{n\geq 1} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx$ converge

③ $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)\,dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{e^x - 1}\,dx.$

Pour tout $n \geq 1$,
$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} f_n(x)\,dx &= \int_0^{+\infty} \sin(x) e^{-nx}\,dx \\
&= \operatorname{Im}\left(\int_0^{+\infty} e^{(i-n)x}\,dx\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(\left[\frac{e^{(i-n)x}}{i-n}\right]_0^{+\infty}\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(-\frac{1}{i-n}\right) = \operatorname{Im}\left(\frac{1}{n-i}\right) \\
&= \operatorname{Im}\left(\frac{n+i}{n^2+1}\right) = \frac{1}{n^2+1}.
\end{aligned}$$

Donc $\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1} = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{e^x - 1}\,dx.}$