TD 8 - Analyse 4

Exercice 2

Si $\rho_1 = 0$ ou $\rho_2 = 0$ alors $R \geq \rho_1\rho_2 = 0$. Supposons que $\rho_1 \neq 0$, $\rho_2 \neq 0$.

. Montrons que $R \geq \rho_1 \rho_2$. $\quad R = \sup\{ r \geq 0,\ (a_n b_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ bornée}\}$.

Soit $0 \leq r < \rho_1\rho_2$. Montrons que $(a_n b_n r^n)$ est bornée.

Alors $0 \leq \dfrac{r}{\rho_1} < \rho_2$.

$0 \leq r < \rho_1$, $(|a_n| r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée

$0 \leq r < \rho_2$, $(|b_n| r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ bornée.

Soit $r_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\dfrac{r}{\rho_1} < r_0 < \rho_2$.

Alors $\dfrac{r}{r_0} < \rho_1$ et $r = \underbrace{r_0}_{<\rho_2} \times \underbrace{\dfrac{r}{r_0}}_{<\rho_1}$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n b_n r^n = a_n b_n r_0^n \times \left(\dfrac{r}{r_0}\right)^n = a_n \left(\underbrace{\dfrac{r}{r_0}}_{<\rho_1}\right)^n \times b_n \underbrace{r_0}_{<\rho_2}{}^n$.

Or $\left(a_n \left(\dfrac{r}{r_0}\right)\right)^n$ est bornée $\left(\dfrac{r}{r_0} < \rho_1\right)$ et $(b_n r_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée $(r_0 < \rho_2)$.

Donc la suite $(a_n b_n r^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Donc $R \geq \rho_1 \rho_2$.

Non. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$, $b_n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \text{ pair} \\ 1 & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$.

Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n b_n = 0$ donc $\sum a_n b_n z^n = \sum 0 z^n$ a pour rayon $R = +\infty$.

$\sum a_n z^n = \sum_{n\geq 0} z^{2n}$ a pour rayon $\rho_1 = 1$.

et $\sum b_n z^n = \sum_{n\geq 0} z^{2n+1}$ a pour rayon $\rho_2 = 1$.

Donc $\rho_1\rho_2 = 1 \neq R = +\infty$.

Exercice 3

$$\left|\frac{\frac{x^{2(n+1)}}{2(n+1)}}{\frac{x^{2n}}{2n}}\right| = \frac{2n}{2n+2}|x|^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} |x|^2$$

Donc $R = 1$.

$$\frac{x^{2n}}{2n} = \int x^{2n-1} \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

$\sum_{n\geq 1} x^{2n-1}$ a pour rayon $R=1$ et pour somme, pour tout $x \in]-1,1[$,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} x^{2n-1} = x\sum_{n=1}^{+\infty} x^{2n-2} = x\sum_{n=1}^{+\infty} x^{2(n-1)} = x\sum_{n=1}^{+\infty}(x^2)^{n-1}$$
$$= x\sum_{m=0}^{+\infty}(x^2)^m = x \times \frac{1}{1-x^2} = \frac{x}{1-x^2}.$$

Comme $\sum \frac{x^{2n}}{2n}$ est la série primitive de $\sum x^{2n-1}$, nulle en 0,

$\sum \frac{x^{2n}}{2n}$ a pour rayon 1 et $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n} = \int_0^x \frac{t}{1-t^2}\,dt$ $\qquad u = 1-t^2$

$$= \left[-\frac{1}{2}\ln(1-t^2)\right]_0^x$$
$$= -\frac{1}{2}\ln(1-x^2)$$
$$= -\ln\left(\sqrt{1-x^2}\right)$$

- $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$,
  $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x^2)^n}{n} = \frac{1}{2}\times\left(-\ln(1-x^2)\right) = -\ln\left(\sqrt{1-x^2}\right)$.
- " $\frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \int x^{2n}\,dx$ "

$\forall x \in]-1,1[$

$\sum_{n\geq 0} x^{2n}$ a pour rayon $R=1$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n} = \sum_{n=0}^{+\infty}(x^2)^n = \frac{1}{1-x^2}$.

Donc $\sum_{n\geq 0} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ ____________________ et

$\forall x \in]-1,1[$ $\quad \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}\,dt$ $\qquad \frac{1}{1-t^2} = \frac{1}{(1-t)(1+t)}$

$$= \frac{1}{2}\int_0^x \frac{1}{1-t}\,dt + \frac{1}{2}\int_0^x \frac{1}{1+t}\,dt \qquad = \frac{1/2}{1-t} + \frac{1/2}{1+t}$$
$$= \frac{1}{2}\left[-\ln(1-t)\right]_0^x + \frac{1}{2}\left[\ln(1+t)\right]_0^x$$
$$= -\frac{1}{2}\ln(1-x) + \frac{1}{2}\ln(1+x)$$
$$= -\ln\left(\sqrt{1-x}\right) + \ln\left(\sqrt{1+x}\right).$$

$$-\ln(1-x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,

$$\left| \frac{2n(2n+1)}{(2n+2)(2n+3)} x^2 \right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} |x|^2 \quad \text{donc } R = 1.$$

$$\frac{1}{2n(2n+1)} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n+1}, \quad \text{donc } \frac{x^{2n+1}}{2n(2n+1)} = x\frac{x^{2n}}{2n} - \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

Donc pour tout $x \in]-1,1[$

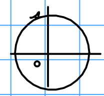
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n(2n+1)} = x\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$= x \times \left(-\ln\left(\sqrt{1-x^2}\right)\right) - \left(-\ln\left(\sqrt{1-x}\right) + \ln\left(\sqrt{1+x}\right) - x\right)$$

$$= -\frac{x}{2}\ln\left((1-x)(1+x)\right) + \frac{1}{2}\ln(1-x) - \frac{1}{2}\ln(1+x) + x$$

$$= \frac{1-x}{2}\ln(1-x) - \frac{1+x}{2}\ln(1+x) + x.$$

Exercice 4



1. $n \geq 1$, $\frac{1}{\sqrt{n}} \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$0 \leq \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$

Or $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}} x^n$ a pour rayon $R = 1$

Donc $\sum_{n\geq 1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n$ a pour rayon $R = 1$.

2. • Si $x = 1$, $\sum_{n\geq1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ diverge (puisque $0 \leq \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$ et $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge car $\frac{1}{2} < 1$).

• Si $x = -1$, $\sum_{n\geq 1} \underbrace{(-1)^n \underbrace{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}_{\geq 0}}_{u_n}$,

$\frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$, par croissance de sin sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, $|u_{n+1}| \leq |u_n|$

$u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Donc d'après le critère spécial des séries alternées, $\sum (-1)^n \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ converge.

3. a) Soit $x \in]0,1[$, $N \in \mathbb{N}$.

$$\sum_{n=1}^{N} \underbrace{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n}_{f_n(x)} \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}_{\geq 0} x^n = f(x)$$

Or f est croissante sur $]0,1[$ car pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est croissante sur $]0,1[$. Donc pour tout $x \in]0,1[$, $f(x) \leq \ell$.

Donc $\sum_{n=1}^{N} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n \leq \ell$.

3. b) . On a $\sum_{n=1}^{N} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n \xrightarrow[x\to 1]{} \sum_{n=1}^{N} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$

Donc $\sum_{n=1}^{N} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leq \ell$. Absurde puisque $\sum_{n\geq 1} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ est une série positive divergente.

Or f est croissante donc f admet une limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Donc $f(x) \xrightarrow[x\to 1^-]{} +\infty$.

4. a) Posons $g_n(x) = \left(\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)\right) x^n$.

Pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \geq 2$,

$$|g_n(x)| \leq \left|\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)\right| = \underbrace{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right) - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}_{a_n}.$$

$\sum_{k=2}^{N} a_k = \sin(1) - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right) \xrightarrow[N\to+\infty]{} \sin(1)$, donc $\sum a_n$ converge.

$\sin(x) = x + O(x^3)$

$(1+x)^\alpha = 1 + O(x)$

ou $0 \leq a_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{1}{\sqrt{n-1}} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) - \frac{1}{\sqrt{N}}$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{n}}} - 1\right) + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-1/2} - 1\right) + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right) + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

$$= O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right).$$

Donc $\sum_{n\geq 2} g_n$ converge normalement sur $[0,1]$.

b) Soit $x \in]0,1[$.

$$(1-x)f(x) = (1-x)\sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n$$

$$= \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^{n+1}$$

$$= \sin(1)x + \sum_{n=2}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n - \sum_{m=2}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{m-1}}\right) x^m$$

$$= \sin(1)x + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right)\right) x^n$$

$$= \underbrace{\sin(1)x}_{\to \sin(1)} + g(x).$$

Or $\sum g_n$ converge normalement donc uniformément sur $[0,1]$, les g_n sont continues sur $[0,1]$, donc g est continue sur $[0,1]$

Donc $g(x) \xrightarrow[x \to 1]{} g(1) = \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n-1}}\right) \right)$

$= -\sin(1)$.

Donc $(1-x)f(x) \xrightarrow[x \to 1^-]{} \sin(1) - \sin(1) = 0$.