Équations différentielles

École Centrale de Pékin

Cours de mathématiques du cycle préparatoire

29 novembre 2020

Table des matières

Chapitre 1 Notion d'équations différentielles

Table des matières du chapitre

Ce premier chapitre est une introduction aux équations différentielles. Il introduit le vocabulaire et les notions fondamentales qui seront utilisés dans les prochains chapitres. Il a pour but de préciser un certain nombre de questions que l'on se pose lorsque l'on étudie une équation différentielle et donne quelques éléments de réponse. Nous allons définir ce qu'est une équation différentielle, une solution d'une telle équation, puis un problème de Cauchy. Nous dresserons un catalogue des équations différentielles que nous étudierons plus précisément dans la suite. Nous verrons enfin sous quelles conditions une solution existe et est unique, et nous en donnerons une interprétation géométrique. Nous n'aborderons pas dans ce chapitre relativement abstrait les méthodes pour trouver la forme explicite des solutions de certaines équations différentielles, elles feront l'objet des chapitres suivants. Notons d'ailleurs qu'en général on ne sait pas se résoudre explicitement les équations différentielles. Cela n'empêche pas de pouvoir donner des conditions d'existence et d'unicité, et de savoir étudier les solutions de ces équations différentielles.

Dans tout ce chapitre, n désigne un entier naturel non nul, $\mathbb{K}$ désigne le corps des nombres réels $\mathbb{R}$ ou celui des nombres complexes $\mathbb{C}$, et enfin E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. En pratique, on a généralement $E = \mathbb{K}^N$, où $N \in \mathbb{N}^*$.

1.1 Définitions

Une équation différentielle est une équation portant sur les dérivées d'une fonction. Plus précisément,

Définition 1
Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, Ω un ouvert E^{n+1} et G une application de $I \times \Omega$ dans E. On dit que la relation

$$G(t, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \qquad (\mathcal{E})$$

est une ***équation différentielle d'ordre*** *n.*

Exemple 2 — *La relation $t^2y'' + y' - 3ty + \cos(t) = 2t - 5$ est une équation différentielle d'ordre 2, où G est l'application $G : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}$; $(t, y_0, y_1, y_2) \longmapsto t^2y_2 + y_1 - 3ty_0 + \cos(t) - 2t + 5$*

Définition 3
On appelle ***solution*** *de $\mathcal{E}$ toute application φ d'un intervalle J de $\mathbb{R}$ à valeurs dans E, n fois dérivable et telle que*

1. *pour tout $t \in J$, $\big(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n)}(t)\big) \in I \times \Omega$,*
2. *pour tout $t \in J$, $G\big(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n)}(t)\big) = 0$.*

Lorsque l'on donne une solution d'une équation différentielle, il ne faut pas oublier de préciser son intervalle de définition.

Remarque 4 — *Lorsque l'on demande de résoudre une équation différentielle sur un intervalle J, cela signifie que l'on cherche les solutions définies sur J.*

Exemples 5

- *Une solution de l'équation différentielle* $t^2y'' + y' - 3ty + \cos(t) = 2t - 5$ *est une application* φ *d'un intervalle* J *de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*, deux fois dérivable, telle que, pour tout* $t \in J$*,*
$$t^2\varphi''(t) + \varphi'(t) - 3t\varphi(t) + \cos(t) = 2t - 5.$$
- *Une solution sur* $\mathbb{R}$ *de l'équation différentielle* $y' = 0$ *est, par exemple, la fonction* $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $x \longmapsto 1$.
- *Des solutions sur* $\mathbb{R}$ *de l'équation différentielle* $y'' + y = 0$ *sont, par exemple, les fonctions sinus ou cosinus définies sur* $\mathbb{R}$.

Les théorèmes que nous énoncerons porteront sur les équations différentielles dites résolues.

Définition 6
Soient I *un intervalle ouvert de* $\mathbb{R}$ *et* U *un ouvert de* E^n. *Une équation différentielle est dite* ***résolue*** *si elle s'écrit sous la forme*
$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \tag{$\mathcal{E}_R$}$$
où f *est une application de* $I \times U$ *à valeurs dans* E.

Une solution d'une telle équation est donc une application φ *d'un intervalle* J *de* $\mathbb{R}$ *à valeurs dans* E*,* n *fois dérivable et telle que*

1. *pour tout* $t \in J$, $\big(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t)\big) \in I \times U$,
2. *pour tout* $t \in J$, $\varphi^{(n)}(t) = f\left(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t)\right)$.

Exemple 7 — *L'équation* $y' = y^2 + 1$ *est une équation différentielle résolue.*

Remarque 8 — *Si* f *est continue alors toute solution* φ *de* $\mathcal{E}_R$ *est de classe* $\mathcal{C}^n$ *puisque* φ *est* n *fois dérivable et* $\varphi^{(n)}$ *est continue par continuité de* f.

Remarque 9 — *Les équations différentielles non résolues de la forme* $h(t)y^{(n)} = g(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ *où* h *est une application de* I *dans* $\mathbb{K}$ *se ramènent à la forme résolue* $\mathcal{E}_R$ *sur les intervalles sur lesquels* h *ne s'annule pas, en divisant par* $h(t)$. *Pour résoudre l'équation* $h(t)y^{(n)} = g(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ *sur un intervalle* I*, l'idée sera donc de résoudre l'équation différentielle résolue sur les intervalles de non annulation de* h*, puis de "recoller" éventuellement les solutions pour trouver les solutions définies sur* I. *On parlera de problèmes de raccordement de solutions.*

1.2 Quelques équations différentielles particulières

Nous dressons dans cette partie un catalogue des différentes équations différentielles que nous rencontrerons dans les chapitres suivants.

1.2.1 Équations différentielles scalaires

On se place dans le cas particulier où $E = \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

On considère I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, U un ouvert de $\mathbb{K}^n$ et f est une application continue de $I \times U$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Définition 10
L'équation différentielle $y^{(n)} = f(t, y, \dots, y^{(n-1)})$ *est appelée* ***équation différentielle scalaire*** *d'ordre* n.

Une solution d'une équation différentielle scalaire d'ordre n est donc en particulier une application n fois dérivable d'un intervalle de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Donnons quelques exemples d'équations différentielles scalaires que l'on étudiera.

1. **Les équations différentielles linéaires scalaires.**
   • Les équations différentielles linéaires scalaires d'ordre n sont de la forme

   $$y^{(n)} = a_0(t)y + a_1(t)y' + \ldots + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + b(t),$$

   où les $a_i : I \longrightarrow \mathbb{K}$ et $b : I \longrightarrow \mathbb{K}$ sont des applications continues. Les a_i sont appelés les **coefficients** de l'équation.
   • L'équation différentielle **homogène** ou **sans second membre** associée à l'équation différentielle précédente est l'équation

   $$y^{(n)} = a_0(t)y + a_1(t)y' + \ldots + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}.$$

   Il s'agit du cas où b est l'application nulle.
   • Si les a_i sont des applications constantes, on dit que l'équation est **à coefficients constants**. Elle s'écrit donc sous la forme

   $$y^{(n)} = a_0 y + a_1 y' + + \ldots + a_{n-1}y^{(n-1)} + b(t),$$

   où pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, $a_i \in \mathbb{K}$ et $b : I \longrightarrow \mathbb{K}$ est une application continue.

   EXEMPLES 11
   - $y' = 5ty + \mathrm{e}^t$ *est une équation différentielle linéaire du premier ordre (ou d'ordre* 1*).*
   - $y' - 4y = \cos(2t)$ *est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants.*
   - $y' = x^2 y$ *est une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre.*
   - $y'' = x^2 y' + \dfrac{1}{x} y + (x+1)\mathrm{e}^{2x}$ *est une équation différentielle linéaire du second ordre (ou d'ordre* 2*).*
   - $y'' = y$ *est une équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants.*
   - $(y')^2 = 2y$ *et* $y' \times y = 1$ *ne sont pas des équations différentielles linéaires.*

2. **Les équations différentielles scalaires à variables séparables**
   Ce sont de les équations différentielles de la forme

   $$y' = g(t)h(y),$$

   où $g : I \longrightarrow \mathbb{K}$ et $h : J \longrightarrow \mathbb{K}$ sont des applications continues.

   EXEMPLE 12 — *L'équation* $y' = \dfrac{1}{x^2}\mathrm{e}^{-y}$ *est une équation différentielle scalaire à variables séparables.*

1.2.2 Équations différentielles vectorielles du premier ordre

On se place dans le cas particulier où $n = 1$.

On considère I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, U un ouvert de E et f une application continue de $I \times U$ à valeurs dans E.

DÉFINITION 13
L'équation différentielle $y' = f(t, y)$ *est appelée* ***équation différentielle vectorielle du premier ordre*** *(ou d'ordre* 1*).*

Une solution d'une équation différentielle vectorielle du premier ordre est donc en particulier une application dérivable d'un intervalle de $\mathbb{R}$ à valeurs dans le $\mathbb{K}$-espace vectoriel E.

Donnons quelques exemples d'équations différentielles vectorielles que l'on étudiera.

1. **Les équations différentielles linéaires vectorielles du premier ordre**

• Les équations différentielles linéaires vectorielles du premier ordre sont de la forme

$$y' = a(t) \cdot y + b(t),$$

où $a : I \longrightarrow \mathcal{L}(E)$ et $b : I \longrightarrow E$ sont des applications continues.

• L'équation différentielle **homogène** ou **sans second membre** associée à l'équation différentielle précédente est l'équation

$$y' = a(t) \cdot y.$$

Il s'agit du cas où b est l'application nulle.

• Si l'application a est constante, on dit que l'équation est **à coefficient constant**. Elle s'écrit donc sous la forme

$$y' = a \cdot y + b(t),$$

où $a \in \mathcal{L}(E)$ et $b : I \longrightarrow E$ est une application continue.

• Soient N la dimension de E et $\mathcal{B}$ une base de E. En notant $A(t) = (a_{i,j}(t))_{\substack{i=1\dots N\\ j=1\dots N}}$ la matrice de $a(t)$ dans la base $\mathcal{B}$ et $B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_N(t) \end{pmatrix}$ le vecteur colonne des composantes de $b(t)$ dans la base $\mathcal{B}$, l'équation différentielle $y' = a(t) \cdot y + b(t)$ s'écrit sous forme matricielle

$$Y' = A(t)Y + B(t).$$

Alors $\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_N \end{pmatrix}$ est solution de $Y' = A(t)Y + B(t)$ si et seulement si $(\varphi_1, \dots, \varphi_N)$ est solution du système différentiel linéaire scalaire du premier ordre suivant

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y_1' & = & a_{11}(t)y_1 + \ldots + a_{1N}(t)y_N + b_1(t) \\ \vdots & & \\ y_N' & = & a_{N1}(t)y_1 + \ldots + a_{NN}(t)y_n + b_N(t). \end{array} \right.$$

Remarque 14 — *En pratique, on a généralement $E = \mathbb{K}^N$ et en considérant la base canonique, on confondra alors l'endomorphisme $a(t) \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^N)$ avec sa représentation matricielle $A(t) \in \mathcal{M}_N(\mathbb{K})$ et le vecteur $b(t) \in \mathbb{K}^N$ avec le vecteur colonne $B(t) \in \mathcal{M}_{N,1}(\mathbb{K})$.*

Exemples 15

• $Y' = \begin{pmatrix} \frac{1}{t} & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} \ln(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *est une équation différentielle linéaire vectorielle du premier ordre.*

• $Y' = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \\ 0 \end{pmatrix}$ *est une équation différentielle linéaire vectorielle du premier ordre à coefficients constants.*

• $Y' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} Y$ *est une équation différentielle linéaire vectorielle homogène du premier ordre à coefficients constants.*

• $\left\{ \begin{array}{l} x' = 5x - y \\ y' = x + 3y \end{array} \right.$ *est un système d'équations différentielles linéaires scalaires du premier ordre.*

2. **Les équations différentielles autonomes**

Ce sont les équations différentielles de la forme

$$y' = f(y),$$

où f est une application de I dans E.

Exemple 16 — *Les équations $y' = \sqrt{y}$ et $Y' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont des équations différentielles autonomes.*

1.2.3 De l'ordre n à l'ordre 1

Les équations différentielles scalaires d'ordre n se ramènent aux équations différentielles vectorielles du premier ordre. Ceci nous permettra en particulier de ramener l'étude de certaines équations différentielles linéaires scalaires d'ordre n à celle des équations différentielles linéaires vectorielles d'ordre 1.

Plus précisément, considérons I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, J un intervalle inclus dans I, U un ouvert de $\mathbb{K}^n$ et $f : I \times U \longrightarrow \mathbb{K}$ une application continue.

Alors l'application

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & \mathcal{D}^n(I,\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{D}^1\left(I,\mathbb{K}^n\right) \\ & \varphi & \longmapsto & \begin{pmatrix} \varphi \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)} \end{pmatrix} \end{array}$$

induit une bijection de l'ensemble $\mathcal{S}_n(J)$ des solutions définies sur J de $y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ sur l'ensemble $\mathcal{S}_1(J)$ des solutions définies sur J de $Y' = F(t, Y)$, où

$$F : I \times U \longrightarrow \mathbb{K}^n \ ; \ \left(t, \begin{pmatrix} y_0 \\ \vdots \\ y_{n-2} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}\right) \longmapsto \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ f(t, y_0, \dots, y_{n-1}) \end{pmatrix}.$$

Preuve — • Soit $\varphi \in \mathcal{S}_n(J)$. L'application $\varphi : J \longrightarrow \mathbb{K}$ est donc une solution de $y^{(n)} = f\left(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}\right)$ sur J. Alors φ est n fois dérivable donc $\Phi(\varphi)$ est dérivable et, pour tout $t \in J$,

$$(\Phi(\varphi))'(t) = \begin{pmatrix} \varphi'(t) \\ \varphi''(t) \\ \vdots \\ \varphi^{(n)}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi'(t) \\ \varphi''(t) \\ \vdots \\ f(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t) \end{pmatrix} = F\left(t, \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \varphi'(t) \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}\right) = F\left(t, \Phi(\varphi)(t)\right).$$

Donc $\Phi(\varphi) : J \longrightarrow \mathbb{K}^N$ est solution de $Y' = F(t, Y)$. D'où, $\Phi(\varphi) \in \mathcal{S}_1(J)$.

Ainsi, $\Phi\left(\mathcal{S}_n(J)\right) \subset \mathcal{S}_1(J)$.

On peut donc considérer l'application induite $\tilde{\Phi} : \mathcal{S}_n(J) \longrightarrow \mathcal{S}_1(J)$.

• L'application $\tilde{\Phi}$ est injective puisque si φ_1 et φ_2 sont des éléments de $\mathcal{S}_n(J)$ tels que $\tilde{\Phi}(\varphi_1) = \tilde{\Phi}(\varphi_2)$ alors par égalité des composantes, on a $\varphi_1 = \varphi_2$.

• Montrons que $\tilde{\Phi}$ est surjective. Soit $\begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \vdots \\ \varphi_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_1(J)$, une solution de $Y' = F(t, Y)$ sur l'intervalle J. Alors pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$, φ_i est dérivable et pour tout $t \in J$, on a

$$\begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \vdots \\ \varphi_{n-2} \\ \varphi_{n-1} \end{pmatrix}'(t) = \begin{pmatrix} \varphi_0'(t) \\ \vdots \\ \varphi_{n-2}'(t) \\ \varphi_{n-1}'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \vdots \\ \varphi_{n-1}(t) \\ f\left(t, \varphi_0(t), \dots, \varphi_{n-1}(t)\right) \end{pmatrix}.$$

Ainsi, pour tout $i \in [\![0, n-2]\!]$, $\varphi_i' = \varphi_{i+1}$ et pour tout $t \in J$, $\varphi_{n-1}'(t) = f(t, \varphi_0(t), \dots, \varphi_{n-1}(t))$.

On en déduit que φ_0 est dérivable, de dérivée φ_1 elle-même dérivable, et ainsi de suite, φ_0 est n fois dérivable. et pour tout $i \in [\![1, n-1]\!]$, $\varphi_i = \varphi_0^{(i)}$.

Donc pour tout $t \in J$,

$$\varphi_0^{(n)}(t) = (\varphi_0^{(n-1)})'(t) = (\varphi_{n-1})'(t) = f\left(t, \varphi_0(t), \dots, \varphi_{n-1}(t)\right) = f(t, \varphi_0(t), \varphi_0'(t), \dots, \varphi_0^{(n-1)}(t)).$$

Donc $\varphi_0 : J \longrightarrow \mathbb{K}$ est une solution définie sur J de $y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$, et donc $\varphi_0 \in \mathcal{S}_n(J)$.

Comme $\tilde{\Phi}(\varphi_0) = \begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \vdots \\ \varphi_{n-1} \end{pmatrix}$, on en déduit que $\tilde{\Phi}$ est surjective.

• L'application $\tilde{\Phi}$ est donc bijective. D'où le résultat. □

On pourra donc retenir que l'équation $y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ $(\mathcal{E}_n)$ est équivalente à l'équation $Y' = F(t, Y)$ $(\mathcal{E}_1)$, dans le sens où si φ est solution de $(\mathcal{E}_n)$ alors $\begin{pmatrix} \varphi \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)} \end{pmatrix}$ est solution de $(\mathcal{E}_1)$ et si $\begin{pmatrix} \varphi_0 \\ \vdots \\ \varphi_{n-1} \end{pmatrix}$ est solution de $(\mathcal{E}_1)$ alors φ_0 est solution de $(\mathcal{E}_n)$.

Exemple 17 — *L'étude de équation différentielle, d'ordre 2, $y'' + 4ty' + 2y = 0$ se ramène à celle de l'équation différentielle, d'ordre 1, $Y' = f(t, Y)$, où*

$$F\left(t, \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y_1 \\ -4ty_1 - 2y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -4t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}.$$

Précisément, φ est solution de l'équation différentielle, d'ordre 2, $y'' + 4ty' + 2y = 0$ si et seulement si $\begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi' \end{pmatrix}$ est solution de l'équation différentielle, d'ordre 1, $Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -4t \end{pmatrix} Y$.

1.3 Problème de Cauchy

Les questions naturelles qui se posent lorsque l'on étudie une équation différentielle sont de savoir trouver des solutions, mais aussi leur intervalle maximal d'existence, de savoir si on a obtenu toutes les solutions, et en particulier d'obtenir éventuellement l'unicité lorsque l'on rajoute des conditions initiales. Nous discutons dans cette partie des questions d'existence, d'unicité et d'intervalles de définition des solutions. Le calcul explicite, s'il est possible, de ces solutions fera l'objet de chapitres plus spécifiques.

Dans cette partie, on considère I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, U un ouvert de E^n et f une application continue de $I \times U$ dans E.

On s'intéresse à l'équation différentielle

$$y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \qquad (\mathcal{E}_R)$$

1.3.1 Définition

Définition 18
*Soit $(t_0, y_0, \dots, y_{n-1}) \in I \times U$. On appelle **problème de Cauchy***

$$\begin{cases} y^{(n)} = f(t, y, y', \dots, y^{(n-1)}), \\ y(t_0) = y_0, \\ y'(t_0) = y_1, \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}, \end{cases}$$

la recherche de la (ou les) solution φ de $\mathcal{E}_R$ définie sur un intervalle J contenant t_0 et telle que $\varphi(t_0) = y_0$, $\varphi'(t_0) = y_1$, … $\varphi^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}$.

On dit qu'une telle solution φ satisfait à la condition initiale $y(t_0) = y_0, \dots, y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}$.

Exemple 19 — *La fonction $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $t \longmapsto 2e^{-t}$ est une solution du problème de Cauchy*

$$\begin{cases} y' + y = 0 \\ y(0) = 2 \end{cases}$$

Remarque 20 — *Si l'équation $\mathcal{E}_R$ décrit la loi d'évolution d'un système physique au cours du temps, résoudre le problème de Cauchy revient à trouver l'évolution du système connaissant son état en t_0.*

1.3.2 Solutions maximales et globales

Pour définir une solution d'une équation différentielle, il faut préciser un intervalle de définition. La fonction $t \longmapsto \mathrm{e}^t$ est une solution de $y' = y$ sur $]1,2[$ mais aussi sur $\mathbb{R}$ et donc sur tout intervalle de $\mathbb{R}$. Il est donc intéressant de fournir le plus grand intervalle possible.

DÉFINITION 21
Soient $\varphi_1 : J_1 \longrightarrow E$ et $\varphi_2 : J_2 \longrightarrow E$ deux solutions de $y^{(n)} = f(t, y, \ldots, y^{(n-1)})$. On dit que φ_2 est un ***prolongement*** *de φ_1 si $J_1 \subset J_2$ et si, pour tout $t \in J_1$, $\varphi_1(t) = \varphi_2(t)$.*

EXEMPLE 22 — *La fonction $\varphi_1 :]1,3[\longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \mathrm{e}^t$ est une solution de l'équation différentielle $y' = y$ qui prolonge la fonction $\varphi_2 :]1,2[\longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \mathrm{e}^t$.*

DÉFINITION 23
Une solution $\varphi : J \longrightarrow E$ de $y^{(n)} = f(t, y, \ldots, y^{(n-1)})$ est dite ***maximale*** *si elle n'admet pas de prolongement qui soit solution.*

REMARQUE 24 — *La question de l'unicité dans le problème de Cauchy nécessite de considérer les solutions maximales.*

DÉFINITION 25
On appelle ***solution globale*** *de $\mathcal{E}_R$ toute solution définie sur l'intervalle I tout entier.*

PROPOSITION 26
Une solution globale est une solution maximale. La réciproque est fausse en général.

Preuve — • Une solution globale étant définie sur I en entier, elle ne peut pas être prolongée et elle est donc maximale.

• Donnons l'exemple d'une solution maximale non globale. Considérons le problème de Cauchy $\begin{cases} y' = y^2, \\ y(0) = y_0 > 0 \end{cases}$. On a $f(t,y) = y^2$, définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et $I = \mathbb{R}$. La fonction $\varphi :\ \left]-\infty; \frac{1}{y_0}\right[\longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \dfrac{y_0}{1 - y_0 t}$ est une solution de ce problème de Cauchy sur $\left]-\infty; \frac{1}{y_0}\right[$ (nous verrons par la suite comment trouver une telle solution). Comme φ tend vers l'infini lorsque t tend vers $\dfrac{1}{y_0}$, elle ne peut pas admettre de prolongement continu. Cette solution est donc maximale mais n'est pas globale. □

EXEMPLE 27 — *La fonction $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ x \longmapsto \exp(x)$ est une solution globale, donc maximale, de l'équation différentielle $y' = y$.*

1.3.3 Existence et unicité des solutions

Dans le cas linéaire à coefficients continus, les théorèmes suivants donnent l'existence et l'unicité d'une solution globale avec une condition initiale.

THÉORÈME 28 (Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, cas vectoriel du premier ordre)
Soit $(t_0, y_0) \in I \times E$. Soient $a \in \mathcal{C}(I, \mathcal{L}(E))$ et $b \in \mathcal{C}(I, E)$. Alors il existe une unique solution $\varphi : I \longrightarrow E$ au problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = a(t) \cdot y + b(t), \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

En particulier, φ est une solution globale.

THÉORÈME 29 (Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, cas scalaire d'ordre n)
Soit $(t_0, y_0, \ldots, y_{n-1}) \in I \times \mathbb{K}^n$. Soient a_0, …, a_{n-1} et b des applications continues de I dans $\mathbb{K}$. Alors il

existe une unique solution $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{K}$ au problème de Cauchy

$$\left\{\begin{array}{l} y^{(n)} = a_0(t)y + \ldots + a_{n-1}y^{(n-1)} + b(t), \\ y(t_0) = y_0, \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1}. \end{array}\right.$$

En particulier, φ est une solution globale.

Dans le cas linéaire à coefficients continus, tout problème de Cauchy admet donc une unique solution définie sur I tout entier.

Lorsque l'équation différentielle n'est plus linéaire, on peut encore, sous certaines hypothèses sur la fonction f, assurer l'existence et l'unicité au problème de Cauchy, mais les solutions ne seront pas nécessairement globales.

Théorème 30 (Théorème de Cauchy-Lipschitz)
Soit $(t_0, y_0) \in I \times U$. Supposons f de classe $\mathcal{C}^1$. Alors il existe une unique solution maximale $\varphi_m : J_m \longrightarrow E$ au problème de Cauchy

$$\left\{\begin{array}{l} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0 \end{array}\right.$$

De plus, l'intervalle de définition J_m de φ_m est ouvert et cette solution maximale φ_m est un prolongement de toute autre solution à ce même problème de Cauchy.

Théorème 31 (Théorème de Cauchy-Lipschitz, cas scalaire d'ordre n)
Soit $(t_0, y_0, \ldots, y_{n-1}) \in I \times U$. Supposons f de classe $\mathcal{C}^1$. Alors il existe une unique solution maximale $\varphi_m : J_m \longrightarrow \mathbb{K}$ au problème de Cauchy

$$\left\{\begin{array}{l} y^{(n)} = f(t, y, \ldots, y^{(n-1)}) \\ y(t_0) = y_0 \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t_0) = y_{n-1} \end{array}\right.$$

De plus, l'intervalle de définition J_m de φ_m est ouvert et cette solution maximale φ_m est un prolongement de toute autre solution à ce même problème de Cauchy.

Exemple 32 — *L'application $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ (t, y) \longmapsto y^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, le problème de Cauchy*

$$\left\{\begin{array}{l} y' = y^2, \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R} \end{array}\right.$$

admet une et une seule une solution maximale définie sur un intervalle ouvert.

Remarques 33

- *Sous la seule hypothèse de continuité de f, on n'a pas en général, d'unicité de la solution d'un problème de Cauchy. Par exemple, il n'y a pas unicité au problème de Cauchy $\left\{\begin{array}{l} y' = 3(y^2)^{\frac{1}{3}} \\ y(0) = 0. \end{array}\right.$. L'application nulle et l'application $\varphi_0 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto t^3$ sont, par exemple, deux solutions de ce problème de Cauchy sur $\mathbb{R}$.*
- *Ce théorème est encore vrai avec des hypothèses sur la fonction f un peu plus faibles que $\mathcal{C}^1$, mais l'on rencontre généralement ce cas en pratique. Sous ces hypothèses plus faibles, le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire peut se voir alors comme une conséquence du théorème de Cauchy-Lipschitz.*
- *Ce théorème ne précise pas l'intervalle de définition de la solution maximale.*

Ces théorèmes donnent donc l'existence et l'unicité de solutions sous certaines hypothèses mais ne donnent pas de méthode de résolution. Nous verrons dans les prochains chapitres les techniques de calcul pour trouver la forme explicite des solutions, plus nombreuses dans le cas linéaire que non linéaire.

1.4 Interprétation géométrique

Plaçons-nous dans le cas scalaire du premier ordre : $y' = f(t, y)$ où f est une application à valeurs réelles.

Si φ est une solution de cette équation différentielle et si (t, y) est un point du graphe de φ alors $y = \varphi(t)$ et en ce point, la pente de la tangente est $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t)) = f(t, y)$. À chaque point (t, y) du plan, on associe alors un vecteur dont la direction est donnée par la pente $f(t, y)$, par exemple le vecteur $(1, f(t, y))$. L'ensemble de ces vecteurs d'origine (t, y) est appelé le **champ de vecteurs** associé à l'équation différentielle $y' = f(t, y)$.

Le graphe d'une solution est en tout point tangent au champ de vecteurs.

Définition 34
*On appelle **courbe intégrale** d'une équation différentielle la courbe représentative d'une solution maximale de cette équation différentielle.*

Sous les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz, par un point $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{R}$ du plan, il passe une courbe intégrale et une seule. Ainsi, deux courbes intégrales ne peuvent pas se couper.

Le tracé du champ de vecteurs permet de deviner le comportement des solutions.

Donnons quelques exemples.

Exemples 35

- *Sur la figure 1, on a tracé le champ de vecteurs associé à l'équation différentielle $y' = -\frac{1}{2}y$. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire à coefficient constant donc continu. Le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire nous dit donc que tout problème de Cauchy admet une unique solution globale, définie sur $\mathbb{R}$. Ainsi, à tout point du plan, il passe une unique courbe intégrale.*
  Plusieurs courbes intégrales sont ici tracées. Elles correspondent aux graphes des solutions de $y' = -\frac{1}{2}y$. La courbe mauve passe par le point $(0, 3)$, elle représente donc LA solution qui vérifie de plus la condition initiale $y(0) = 3$. On voit également que les solutions tendent vers 0 en $+\infty$. Enfin, seule la droite $y = 0$ passe par le point $(0, 0)$: l'application nulle est l'unique solution du problème de Cauchy $\left\{ \begin{array}{l} y' = -\frac{1}{2}y, \\ y(0) = 0 \end{array} \right.$.
- *Sur la figure 2, on a tracé le champ de vecteurs associé à l'équation différentielle $y' = 3(y^2)^{\frac{1}{3}}$. Nous avons vu à la remarque 33 que le théorème de Cauchy-Lipschitz ne s'applique pas (on n'est pas dans le cas $\mathcal{C}^1$) et qu'il n'y a pas unicité du problème de Cauchy.*
  Des courbes intégrales passant par le point $(0, 0)$ sont ici tracées. Il existe donc plusieurs, et même une infinité, de courbes intégrales passant par le point $(0, 0)$. Cela traduit le fait que le problème de Cauchy $\left\{ \begin{array}{l} y' = 3(y^2)^{\frac{1}{3}}, \\ y(0) = 0 \end{array} \right.$. admet une infinité de solutions. Il n'y a pas unicité.
- *Sur la figure 3, on a tracé le champ de vecteurs associé à l'équation différentielle $y' = y^2$. La fonction $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ (t, y) \longmapsto y^2$ étant de classe $\mathcal{C}^1$, le théorème de Cauchy-Lipschitz nous dit que tout problème de Cauchy admet une unique solution maximale. Ainsi, à tout point du plan, il passe une et seule courbe intégrale. Cependant, nous avons vu à la proposition 26 qu'une solution maximale n'est pas forcément globale. Nous en avions donné un exemple.*
  Deux courbes intégrales sont ici tracées. Elles admettent une asymptote verticale. Elles représentent donc des solutions maximales mais non globales car elles ne sont pas définies sur $\mathbb{R}$.

Chapitre 2 Équations différentielles scalaires

Dans tout ce chapitre, n désigne un entier naturel non nul, $\mathbb{K}$ désigne le corps des nombres réels $\mathbb{R}$ ou celui des nombres complexes $\mathbb{C}$.

2.1 Équations différentielles linéaires scalaires

Dans cette partie, I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

2.1.1 Résultats généraux

On s'intéresse à l'équation différentielle linéaire scalaire d'ordre n

$$y^{(n)} = a_0(t)y + a_1(t)y' + \ldots + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + b(t), \tag{E}$$

où pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $a_i : I \longrightarrow \mathbb{K}$ et $b : I \longrightarrow \mathbb{K}$ sont des fonctions continues.

On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions maximales de l'équation (E) et $\mathcal{S}_h$ l'ensemble des solutions maximales de l'équation homogène associée

$$y^{(n)} = a_0(t)y + a_1(t)y' + \ldots + a_{n-1}(t)y^{(n-1)}. \tag{E_h}$$

D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire (voir chapitre 1), les solutions des équations (E) et (E_h) sont globales et définies sur I.

Proposition 1
L'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions de l'équation homogène (E_h) est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$.

Preuve — L'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions de (E_h) est le noyau de l'application linéaire

$$\begin{array}{rccl} \ell : & \mathcal{C}^n(I,\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{C}(I,\mathbb{K}) \\ & \varphi & \longmapsto & \varphi^{(n)} - a_0(t)\varphi - \ldots - a_{n-1}(t)\varphi^{(n-1)} \end{array}.$$

$\mathcal{S}_h$ est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$.

□

Proposition 2
L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation (E) est un espace affine dirigé par l'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions de l'équation homogène (E_h) :

$$\mathcal{S} = \varphi_p + \mathcal{S}_h,$$

où $\varphi_p \in \mathcal{S}$.

Preuve — D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, l'ensemble $\mathcal{S}$ est non vide. Il existe donc un élément φ_p de $\mathcal{S}$.

Soit $\varphi \in \mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$. Alors $\varphi \in \mathcal{S}$ si et seulement si, pour tout $t \in I$,

$$\varphi^{(n)}(t) = a_0(t)\varphi(t) + \ldots + a_{n-1}(t)\varphi^{(n-1)}(t) + b(t),$$

soit encore, si et seulement si, pour tout $t \in I$,

$$\begin{aligned}(\varphi - \varphi_p)^{(n)}(t) &= \varphi^{(n)}(t) - \varphi_p^{(n)}(t) = a_0(t)\varphi(t) + \ldots + a_{n-1}(t)\varphi^{(n-1)}(t) + b(t) - \left(a_0(t)\varphi_p(t) + \ldots + a_{n-1}(t)\varphi_p^{(n-1)}(t) + b(t)\right) \\ &= a_0(t)\left(\varphi - \varphi_p\right)(t) + \ldots + a_{n-1}(t)\left(\varphi - \varphi_p\right)^{(n-1)}(t).\end{aligned}$$

Donc $\varphi \in \mathcal{S}$ si et seulement si $\varphi - \varphi_p \in \mathcal{S}_h$.

Donc $\mathcal{S} = \varphi_p + \mathcal{S}_h$. □

On redémontrera ce théorème dans certains cas sans utiliser le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, que nous n'avons pas démontré dans le premier chapitre.

En d'autres termes, si l'on connait une solution particulière φ_p de (E), alors l'ensemble des solutions de (E) est $\mathcal{S} = \varphi_p + \mathcal{S}_h$. Ainsi, pour trouver l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de (E), on cherche l'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions de l'équation homogène associée (E_h) et une solution particulière de (E).

MÉTHODE 3 — *Pour résoudre une équation différentielle linéaire scalaire non homogène (E), on procédera de la façon suivante :*

1. *On identifie le type de l'équation différentielle (E) étudiée.*
2. *On donne l'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions de l'équation homogène associée (E_h).*
3. *On cherche une solution particulière φ_p de l'équation (E)*
4. *On conclut en donnant l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation (E) : $\mathcal{S} = \varphi_p + \mathcal{S}_h$.*

Le principe de superposition des solutions énoncé ci-dessous est très utile en pratique car il permet de rechercher une solution particulière en décomposant le second membre en des membres plus simples.

PROPOSITION 4 (Principe de superposition)
Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ des éléments de $\mathbb{K}$ et $b_1, \ldots, b_N$ des applications continues de I dans $\mathbb{K}$. Supposons que pour tout $i \in [\![1, N]\!]$, φ_i est une solution particulière de l'équation

$$y^{(n)} = a_0(t)y + a_1(t)y' + \ldots + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + b_i(t).$$

Alors $\lambda_1\varphi_1 + \ldots \lambda_N\varphi_N$ est une solution particulière de l'équation

$$y^{(n)} = a_0(t)y + a_1(t)y' + \ldots + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \lambda_1 b_1(t) + \ldots + \lambda_N b_N(t).$$

Preuve — Considérons l'application linéaire

$$\begin{array}{rccl} \ell: & \mathcal{C}^n(I,\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{C}(I,\mathbb{K}) \\ & \varphi & \longmapsto & \varphi^{(n)} - a_0(t)\varphi - \ldots - a_{n-1}(t)\varphi^{(n-1)} \end{array}.$$

Par hypothèse, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on a $\ell(\varphi_i) = b_i$.

Par linéarité de ℓ, on a alors $\ell(\lambda_1\varphi_1 + \ldots + \lambda_N\varphi_N) = \lambda_1\ell(\varphi_1) + \ldots + \lambda_N\ell(\varphi_N) = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_N b_N$.

Donc $\lambda_1\varphi_1 + \ldots + \lambda_N\varphi_N$ est une solution particulière de

$$y^{(n)} = a_0(t)y + a_1(t)y' + \ldots + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \lambda_1 b_1(t) + \ldots + \lambda_N b_N(t).$$

□

EXEMPLE 5 — *Pour trouver une solution particulière sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle*

$$y' + y = \cos(x) + (x+1)\mathrm{e}^{-x},$$

on peut donc chercher une solution particulière φ_1 de l'équation différentielle $y' + y = \cos(x)$ puis une solution particulière φ_2 de l'équation différentielle $y' + y = (x+1)\mathrm{e}^{-x}$, et enfin les additionner. Ainsi, au lieu d'un calcul compliqué, on se ramène à deux calculs plus simples.

2.1.2 Équations différentielles linéaires scalaires du premier ordre

On s'intéresse aux équations différentielles linéaires scalaires du premier ordre de la forme

$$y' = a(t)y + b(t), \tag{E_1}$$

où a et b sont des applications de I dans $\mathbb{K}$ continues.

2.1.2.a. Ensemble des solutions de l'équation homogène

PROPOSITION 6
Soient $a \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$ et A une primitive de a sur I.

1. *L'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions de l'équation homogène $y' = a(t)y$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 1 engendré par l'application $I \longrightarrow \mathbb{K}\ ;\ t \longmapsto \exp(A(t))$:*

$$\mathcal{S}_h = \{I \longrightarrow \mathbb{K}\ ;\ t \longmapsto \lambda \exp(A(t)) \mid \lambda \in \mathbb{K}\}.$$

2. Soient $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$. Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = a(t)y \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

possède une et une seule solution définie sur I, qui est l'application

$$I \longrightarrow \mathbb{K} \; ; \; t \longmapsto y_0 \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\mathrm{d}s\right).$$

Preuve —

1. $\triangleright$ Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Posons $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{K} \; ; \; t \longmapsto \lambda \mathrm{e}^{A(t)}$. Alors, φ est dérivable et pour tout $t \in I$, $\varphi'(t) = \lambda a(t)\mathrm{e}^{A(t)} = a(t)\varphi(t)$.
   Donc φ est solution de $y' = a(t)y$.
   $\triangleleft$ Réciproquement, soit φ une solution de l'équation $y' = a(t)y$. Posons, pour tout $t \in I$, $\psi(t) = \varphi(t)e^{-A(t)}$.
   Alors, φ étant dérivable, ψ l'est aussi et pour tout $t \in I$, $\psi'(t) = e^{-A(t)}\left(\varphi'(t) - a(t)\varphi(t)\right) = e^{-A(t)} \times 0 = 0$.
   Il existe donc $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que pour tout $t \in I$, $\psi(t) = \lambda$.
   Donc pour tout $t \in I$, $\varphi(t)e^{-A(t)} = \lambda$, soit $\varphi(t) = \lambda \mathrm{e}^{A(t)}$.
   D'où le résultat.
2. D'après le premier point, $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{K}$ est solution du problème de Cauchy si et seulement si pour tout $t \in I$, $\varphi(t) = \lambda \mathrm{e}^{A(t)}$ où $\lambda \in \mathbb{K}$ et $\varphi(t_0) = y_0$, soit si et seulement si $\lambda = y_0 \mathrm{e}^{-A(t_0)}$.
   Il existe donc une unique solution au problème de Cauchy, qui est l'application

$$I \longrightarrow \mathbb{K} \; ; \; t \longmapsto y_0 \mathrm{e}^{A(t) - A(t_0)} = y_0 \mathrm{e}^{\int_{t_0}^{t} a(s)\mathrm{d}s}.$$

□

Remarque 7 — *Dans le cas particulier où a est une constante, les solutions de l'équation homogène $y' = ay$ sont les fonctions $I \longrightarrow \mathbb{K} \; ; \; t \longmapsto \lambda e^{at}$, où $\lambda \in \mathbb{K}$.*

Exemples 8

- *Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle*

$$y' = \frac{1}{1+t^2} y., \tag{1}$$

  – Identification : *Il s'agit d'une équation différentielle linéaire homogène scalaire du premier ordre à coefficients continus sur $\mathbb{R}$.*

  –Solutions de l'équation homogène : *L'application $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; t \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ admet comme primitive sur $\mathbb{R}$ l'application*

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; t \longmapsto \arctan(t).$$

  L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de (1) est donc le $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 1 engendré par la fonction $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; t \longrightarrow \exp(\arctan(t))$:

$$\mathcal{S}_h = \{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; t \longmapsto \lambda \exp(\arctan(t)) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

- *Déterminons sur $\mathbb{R}$ la solution du problème de Cauchy* $\begin{cases} y' = \dfrac{1}{1+t^2} y, \\ y(0) = 1. \end{cases}$

  D'après le point précédent, on connaît l'ensemble des solutions de l'équation (1), elles sont de la forme $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; t \longmapsto \lambda \exp(\arctan(t))$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.
  La condition initiale $y(0) = 1$ donne alors $\lambda = 1$.
  Donc l'unique solution de ce problème de Cauchy sur $\mathbb{R}$ est l'application

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; t \longmapsto \exp(\arctan(t)).$$

2.1.2.b. Ensemble des solutions de l'équation avec second membre

PROPOSITION 9
Soient a et b deux éléments de $\mathcal{C}(I,\mathbb{K})$.

1. *L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation $y' = a(t)y + b(t)$ (E_1) est un espace affine de dimension 1 dirigé par l'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions de l'équation homogène :*

$$\mathcal{S} = \{I \longrightarrow \mathbb{K} \;;\; t \longmapsto \varphi_p(t) + \lambda \exp(A(t)) \mid \lambda \in \mathbb{K}\} = \varphi_p + \mathcal{S}_h,$$

   où φ_p est une solution particulière de (E_1).

2. *Soient $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{K}$. Le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} y' = a(t)y + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

   possède une et une seule solution définie sur I, qui est l'application

$$I \longrightarrow \mathbb{K} \;;\; t \longmapsto \int_{t_0}^t b(s)\mathrm{e}^{\int_s^t a(\sigma)\mathrm{d}\sigma}\mathrm{d}s + y_0\mathrm{e}^{\int_{t_0}^t a(s)\mathrm{d}s}.$$

Preuve — On démontre ainsi le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire dans le cas linéaire scalaire d'ordre 1.

1. D'après le paragraphe précédent, les solutions de l'équation homogène $y' = a(t)y$ sont de la forme $t \longmapsto \lambda\mathrm{e}^{A(t)}$, où $\lambda \in \mathbb{K}$ et A est une primitive de a sur I.
   La *méthode de variation de la constante* consiste à chercher une solution de l'équation (E_1) sous la forme $\varphi(t) = \psi(t)\mathrm{e}^{A(t)}$, où ψ est une fonction de I dans $\mathbb{K}$. Ce principe de résolution est appelé *méthode de variation de la constante.*
   Soit $t_0 \in I$. Soit φ une fonction de I dans $\mathbb{K}$ dérivable. Posons, pour tout $t \in I$, $\psi(t) = \varphi(t)\mathrm{e}^{-A(t)}$, de sorte que $\varphi(t) = \psi(t)\mathrm{e}^{A(t)}$.
   φ étant dérivable, ψ l'est aussi et pour tout $t \in I$, $\varphi'(t) = a(t)\psi(t)\mathrm{e}^{A(t)} + \psi'(t)\mathrm{e}^{A(t)} = a(t)\varphi(t) + \psi'(t)\mathrm{e}^{A(t)}$.
   Donc $\varphi \in \mathcal{S}$ si et seulement si, pour tout $t \in I$, $\psi'(t)\mathrm{e}^{A(t)} = b(t)$, soit, si et seulement si, pour tout $t \in I$, $\psi'(t) = b(t)\mathrm{e}^{-A(t)}$.
   L'application $t \longmapsto b(t)\mathrm{e}^{-A(t)}$ étant continue sur I, $\varphi \in \mathcal{S}$ si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que pour tout $t \in I$, $\psi(t) = \int_{t_0}^t b(s)\mathrm{e}^{-A(s)}\mathrm{d}s + \lambda$, i.e. $\varphi(t) = \mathrm{e}^{A(t)}\int_{t_0}^t b(s)\mathrm{e}^{-A(s)}\mathrm{d}s + \lambda\mathrm{e}^{A(t)}$.
   Ainsi, $\mathcal{S}$ est l'ensemble des applications de la forme

$$\varphi_\lambda : I \longrightarrow \mathbb{K} \;;\; t \longmapsto \underbrace{\mathrm{e}^{A(t)}\int_{t_0}^t b(s)\mathrm{e}^{-A(s)}\mathrm{d}s}_{\varphi_0 \text{ solution particulière de } (E_1)} + \underbrace{\lambda\mathrm{e}^{A(t)}}_{\in\mathcal{S}_h}.$$

   On en déduit donc le premier point.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$. En reprenant les notations précédentes, φ_λ est solution du problème de Cauchy si et seulement si $\varphi_\lambda(t_0) = \lambda\mathrm{e}^{A(t_0)} = y_0$, soit encore, si et seulement si $\lambda = y_0\mathrm{e}^{-A(t_0)}$.
   Il existe donc une unique solution au problème de Cauchy, qui est l'application

$$I \longrightarrow \mathbb{K} \;;\; t \longmapsto \int_{t_0}^t b(s)\mathrm{e}^{A(t)-A(s)}\mathrm{d}s + y_0\mathrm{e}^{A(t)-A(t_0)} = \int_{t_0}^t b(s)\mathrm{e}^{\int_s^t a(\sigma)\mathrm{d}\sigma}\mathrm{d}s + y_0\mathrm{e}^{\int_{t_0}^t a(s)\mathrm{d}s}.$$

□

En pratique, l'expression de la solution du problème de Cauchy donnée dans la proposition précédente ne sera pas utilisée telle quelle mais la démarche pour l'obtenir pourra être employée. On parle de *méthode de variation de la constante.*

2.1.2.c. Détermination pratique d'une solution particulière

Nous savons résoudre l'équation différentielle homogène associée à (E_1), il reste maintenant à expliquer comment trouver une solution particulière. On rappelle que l'on peut utiliser le principe de superposition des solutions pour simplifier la recherche d'une solution particulière.

Parfois, on connaît une solution particulière, parce qu'elle apparaît de façon évidente ou qu'elle est suggérée dans un énoncé. Dans ce cas, il ne reste plus qu'à appliquer la proposition 9.

Exemple 10 — *Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle*

$$y' + t^2 y = t^2. \tag{2}$$

- Identification : *Il s'agit d'une équation différentielle linéaire scalaire du premier ordre à coefficients et second membre continus sur $\mathbb{R}$.*
- Solutions de l'équation homogène : *L'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à (2) est*

$$\mathcal{S}_h = \{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \lambda \exp\left(-\frac{t^3}{3}\right) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

- Solution particulière de l'équation : *La fonction $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto 1$ est une solution particulière évidente de (2).*
- Conclusion : *L'ensemble des solutions de l'équation (2) est donc*

$$\mathcal{S} = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto 1 + \lambda \exp\left(-\frac{t^3}{3}\right) \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

Si aucune solution évidente n'apparaît, on peut utiliser la méthode de variation de la constante, qui reprend la démonstration du point 1. de la proposition 9.

Méthode 11 (Méthode de variation des constantes) — *Cette méthode permet d'obtenir l'expression d'une solution particulière de l'équation (E_1).*

1. *On sait que les solutions de l'équation homogène associée sont de la forme $t \longmapsto \lambda e^{A(t)}$ où $\lambda \in \mathbb{K}$ et A désigne une primitive de a. On cherche alors une solution particulière sous la forme $\varphi_p(t) = \psi(t)e^{A(t)}$ où ψ est une fonction dérivable de I dans $\mathbb{K}$.*
2. *En remplaçant dans l'équation (E_1) et après simplification, on obtient que φ_p est solution de (E_1) si et seulement si $\psi'(t)e^{A(t)} = b(t)$, soit finalement $\psi'(t) = b(t)e^{-A(t)}$.*
3. *On obtient alors ψ par primitivation, et donc l'expression de φ_p.*

Remarque 12 — *Notons que la méthode de variation de la constante donne en fait plus qu'une simple solution particulière de (E_1), elle donne exactement toutes les solutions.*

Exemple 13 — *Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle*

$$y' + \frac{t}{1+t^2} y = \frac{1}{1+t^2} \tag{3}$$

- Identification : *Il s'agit d'une équation différentielle linéaire scalaire du premier ordre à coefficients et second membre continus sur $\mathbb{R}$.*
- Solutions de l'équation homogène : *Pour tout $t \in \mathbb{R}$,*

$$\int_0^t \frac{-s}{1+s^2} \mathrm{d}s = -\frac{1}{2} \ln\left(1+t^2\right) = \ln\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right).$$

L'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à (3) est donc

$$\mathcal{S}_h = \{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \frac{\lambda}{\sqrt{1+t^2}} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

- Solution particulière : *Appliquons la méthode de variation de la constante.*

  Cherchons une solution particulière φ_p de (3) sous la forme $\varphi_p(t) = \dfrac{\psi(t)}{\sqrt{1+t^2}}$, où ψ est une fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

  Alors φ_p est solution de l'équation si et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\psi'(t)}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{1}{1+t^2},$$

soit encore, si et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\psi'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.
Par exemple, choisissons pour ψ *la fonction* $\psi : t \longmapsto \operatorname{argsh}(t)$.
La fonction $\varphi_p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,;\ t \longmapsto \dfrac{\operatorname{argsh}(t)}{\sqrt{1+t^2}}$ *est alors une solution particulière de (3).*

– Conclusion : *L'ensemble des solutions de (3) est donc*

$$\mathcal{S} = \{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,;\ t \longmapsto \frac{\operatorname{argsh}(t) + \lambda}{\sqrt{1+t^2}} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Enfin, notons que dans le cas particulier où l'équation s'écrit sous la forme

$$y' + a_0 y = P(t)e^{\alpha t},$$

où a_0 et α sont des éléments de $\mathbb{K}$ et P est un polynôme, on peut se passer de la méthode de variation de la constante pour obtenir plus rapidement une solution particulière en utilisant le résultat suivant. Bien sûr, la méthode de variation de la constante peut toujours être utilisée !

Proposition 14
Soient a_0 *et* α *des éléments de* $\mathbb{K}$ *et* P *une application polynomiale. L'équation différentielle*

$$y' + a_0 y = P(t)\mathrm{e}^{\alpha t}$$

admet une solution particulière de la forme

$$I \longrightarrow \mathbb{K}\,;\ t \longmapsto \begin{cases} Q(t)\mathrm{e}^{\alpha t} & \text{si } \alpha \text{ n'est pas racine de } X + a_0 \\ tQ(t)\mathrm{e}^{\alpha t} & \text{sinon,} \end{cases},$$

où Q *est une application polynomiale de même degré que* P.

Exemple 15 — *Résolvons sur* $\mathbb{R}$ *l'équation différentielle*

$$y' - 2y = t\mathrm{e}^t. \tag{4}$$

– Identification : *Il s'agit d'une équation différentielle linéaire scalaire du premier ordre à coefficients constants et second membre continu.*

– Solutions de l'équation homogène : *L'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à (4) est*

$$\mathcal{S}_h = \{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,;\ t \longmapsto \lambda\mathrm{e}^{2t} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

– Solution particulière : *Les coefficients de l'équation (4) sont constants et le second membre est de la forme polynôme-exponentielle. On peut donc chercher une solution particulière de l'équation différentielle* $y' - 2y = t\mathrm{e}^t$ *sous la forme*

$$\varphi_p(t) = (at + b)\mathrm{e}^t$$

(car ici $\alpha = 1$ *n'est pas racine de* $X - 2$ *et* $P(t) = t$ *est de degré 1).*
Alors φ_p *est solution de l'équation si et seulement si, pour tout* $t \in \mathbb{R}$, $\varphi_p'(t) - 2\varphi_p(t) = t\mathrm{e}^t$. *Après calculs, on trouve* $a = b = -1$ *et donc* $\varphi_p(x) = (-t-1)\mathrm{e}^t$.

– Conclusion *L'ensemble des solutions de l'équation est donc*

$$\mathcal{S} = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,;\ t \mapsto (-t-1)\mathrm{e}^t + \lambda\mathrm{e}^{2t} \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

Remarque 16 — *Soient* a_0, β *et* ω *des nombres réels et* P *une application polynomiale à coefficients réels. Si le second membre est de la forme* $t \longmapsto P(t)\mathrm{e}^{\beta t}\cos(\omega t)$ *(resp.* $\longmapsto P(t)\mathrm{e}^{\beta t}\sin(\omega t)$*), on peut chercher une solution particulière complexe de l'équation* $y' + a_0 y = P(t)\mathrm{e}^{(\beta+i\omega)t}$ *puis en prendre sa partie réelle (resp. imaginaire).*

Preuve — *Supposons que* $\varphi_{p,\mathbb{C}}$ *soit une solution particulière complexe de* $y' + a_0 y = P(t)\mathrm{e}^{(\beta+i\omega)t}$.

Alors $\mathrm{Re}(\varphi_{p,\mathbb{C}})' + a_0\mathrm{Re}(\varphi_{p,\mathbb{C}}) = \mathrm{Re}\left(\varphi'_{p,\mathbb{C}} + a_0\varphi_{p,\mathbb{C}}\right) = \mathrm{Re}\left(P(t)\mathrm{e}^{(\beta+i\omega)t}\right) = P(t)\mathrm{e}^{\beta t}\cos(\omega t)$.

Donc $\mathrm{Re}(\varphi_{p,\mathbb{C}})$ *est une solution particulière de* $y' + a_0 y = P(t)\mathrm{e}^{\beta t}\cos(\omega t)$. □

Exemple 17 — *Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle*

$$y' + y = 2\cos(t) + \sin(t). \tag{5}$$

- Identification ; *Il s'agit d'une équation différentielle linéaire scalaire du premier ordre à coefficients constants et second membre continu sur $\mathbb{R}$.*
- Solutions de l'équation homogène : *L'ensemble des solutions de l'équation homogène est*

$$\mathcal{S}_h = \{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \lambda \mathrm{e}^{-t} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

- Solution particulière : *Nous allons utiliser le principe de superposition des solutions.*
  - *Commençons par chercher une solution particulière complexe de $y' + y = \mathrm{e}^{it}$ sous la forme $\varphi_{p,\mathbb{C}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}\ ;\ t \longmapsto c\,\mathrm{e}^{it}$, où $c \in \mathbb{C}$ (car i n'est pas racine de $X+1$ et P est de degré 0). Après calculs, on trouve $c = \dfrac{1}{1+i} = \dfrac{1-i}{2}$ et donc $\varphi_{p,\mathbb{C}}(t) = \dfrac{1-i}{2}\mathrm{e}^{it}$.*
  - *Une solution particulière de $y' + y = \cos(t)$ est donc $\varphi_{p,1} = \mathrm{Re}(\varphi_{p,\mathbb{C}})$, c'est-à-dire*

$$\varphi_{p,1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \frac{1}{2}\cos(t) + \frac{1}{2}\sin(t).$$

  - *Une solution particulière de $y' + y = \sin(t)$ est donc $\varphi_{p,2} = \mathrm{Im}(\varphi_{p,\mathbb{C}})$, c'est-à-dire*

$$\varphi_{p,2} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto -\frac{1}{2}\cos(t) + \frac{1}{2}\sin(t).$$

  - *Par le principe de superposition des solutions, une solution particulière de (5) est donc*

$$\varphi_p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto 2\varphi_{p,1}(t) + \varphi_{p,2}(t) = \frac{1}{2}\cos(t) + \frac{3}{2}\sin(t).$$

- Conclusion : *L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de (5) est donc*

$$\mathcal{S} = \{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \frac{1}{2}\cos(t) + \frac{3}{2}\sin(t) + \lambda \mathrm{e}^{-t} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

2.1.2.d. Raccordements de solutions

Jusqu'ici, nous avons étudié les équations différentielles dites résolues. Voyons comment résoudre celles qui ne sont pas sous forme résolue.

On s'intéresse donc à la résolution des équations différentielles linéaires scalaires du premier ordre de la forme

$$a(t)y' + b(t)y = c(t), \tag{$E_{1,nr}$}$$

où a, b et c sont des applications de I dans $\mathbb{K}$ continues, d'équation différentielle homogène associée

$$a(t)y' + b(t)y = 0. \tag{$E_{1h,nr}$}$$

Soit J un intervalle inclus dans I. On s'intéresse aux solutions de ces équations, définies sur l'intervalle J.

• Premier cas : l'application a ne s'annule pas sur l'intervalle J.

Alors, en divisant par $a(t)$, les équations se ramènent aux équations résolues suivantes, que l'on sait résoudre :

$$y' = -\frac{b(t)}{a(t)}y + \frac{c(t)}{a(t)}$$

et

$$y' = -\frac{b(t)}{a(t)}y.$$

L'ensemble des solutions de ($E_{1h,nr}$) est donc un espace vectoriel de dimension 1 et l'ensemble des solutions de ($E_{1,nr}$) est un espace affine de dimension 1 dirigé par l'ensemble des solutions de l'équation homogène.

• SECOND CAS : l'application a s'annule sur l'intervalle J.

Alors, nous allons voir sur des exemples que les résultats précédents sur les équations résolues, comme le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, peuvent tomber en défaut.

L'ensemble des solutions de l'équation homogène ($E_{1h,nr}$) est un espace vectoriel. Cependant, sa dimension n'est pas nécessairement égale à 1. De plus, l'ensemble des solutions de l'équation ($E_{1,nr}$) est soit le vide, soit un espace affine dirigé par l'ensemble des solutions de l'équation homogène. Là encore, on ne peut rien dire sur sa dimension.

Supposons par exemple que a s'annule en un nombre fini de points t_0, t_1, …, t_N de l'intervalle J. Posons, pour tout $i \in [\![0, N-1]\!]$, $J_i =]t_i, t_{i+1}[$. Alors $\displaystyle\bigcup_{i=0}^{N-1} J_i = J \setminus \{t_0, \ldots, t_N\}$ et l'application a ne s'annule pas sur J_i. Pour résoudre l'équation ($E_{1,nr}$) sur J, nous procéderons de la manière suivante.

MÉTHODE 18 —

1. Résolution de ($E_{1,nr}$) sur les intervalles de non annulation de a : *Pour tout $i \in [\![0, N-1]\!]$, on résout l'équation ($E_{1,nr}$) sur l'intervalle J_i en se ramenant à une équation résolue, puisque a ne s'annule pas sur J_i.*
2. Résolution de ($E_{1,nr}$) sur J : *On cherche ensuite l'ensemble des solutions de ($E_{1,nr}$) sur J.*
   (a) Raccordement des solutions aux points t_i.
   On considère φ une (éventuelle[1]) solution de ($E_{1,nr}$) sur J. Alors, pour tout $i \in [\![0, N-1]\!]$, φ est solution de ($E_{1,nr}$) sur l'intervalle J_i et on en connaît donc son expression explicite sur J_i d'après le premier point : $\varphi = \varphi_i$ où φ_i est solution de ($E_{1,nr}$) sur J_i.
   φ étant solution de ($E_{1,nr}$), elle est continue sur J et on va donc chercher à prolonger par continuité aux points t_0, …, t_N la fonction
   $$J \setminus \{t_0, \ldots, t_N\} \longrightarrow \mathbb{K} \; ; \; t \longmapsto \varphi_i(t) \text{ si } t \in J_i,$$
   qui coïncide avec φ sur $J \setminus \{t_0, \ldots, t_N\}$. On détermine alors les valeurs possibles de φ aux points t_i. On obtient ainsi l'expression de φ sur J.
   (b) *Réciproquement, on vérifie que la fonction φ ainsi obtenue est dérivable sur J, en particulier aux points t_i, et qu'elle vérifie l'équation différentielle ($E_{1,nr}$), en particulier aux points t_i. On obtient ainsi l'ensemble des solutions sur J de l'équation différentielle ($E_{1,nr}$).*

EXEMPLE 19 — *Déterminons l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle*

$$ty' - ky = 0 \tag{6}$$

avec $k = 2$, $k = 1$ ou $k = \dfrac{1}{2}$.

- Identification : *Il s'agit d'une équation différentielle linéaire homogène scalaire du premier ordre à coefficients continus, sous forme non résolue dont le coefficient t de y' s'annule en 0.*
- Résolution sur les intervalles de non annulation de t : *Posons $J_1 = \mathbb{R}_+^*$ et $J_2 = \mathbb{R}_-^*$. Soit $i \in \{1, 2\}$.*
  - Identification : *La résolution de l'équation $ty' - ky = 0$ sur J_i se ramène à celle de l'équation $y' = \dfrac{k}{t} y$ sur J_i car t ne s'annule pas sur J_i. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire scalaire homogène du premier ordre à coefficients continus sur J_i.*
  - Résolution de l'équation (homogène) : *Une primitive de $t \longmapsto \dfrac{k}{t}$ est par exemple l'application $t \longmapsto k \ln(|t|) = \ln\left(|t|^k\right)$. Alors $\exp\left(\ln\left(|t|^k\right)\right) = |t|^k$.*
    L'ensemble des solutions sur J_i de l'équation homogène est donc
    $$\mathcal{S}_h = \left\{ J_i \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; t \longmapsto \lambda |t|^k \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

1. Dans le cas de l'équation homogène, on sait qu'il existe des solutions car l'ensemble des solutions de ($E_{1h,nr}$) est un espace vectoriel. Sinon, on n'est pas sûr qu'il en existe

– Résolution de l'équation sur $\mathbb{R}$:
  – Raccordement des solutions au point 0 :
    Soit φ une solution de (6) définie sur $\mathbb{R}$. D'après le point précédent, il existe $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ et $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ tels que

$$\varphi(t) = \begin{cases} \lambda_1 |t|^k \text{ si } t > 0 \\ \lambda_2 |t|^k \text{ si } t < 0 \end{cases} .$$

φ étant continue en 0, on a $\lim_{t \to 0^+} \varphi(t) = \lim_{t \to 0^-} \varphi(t) = \varphi(0)$.
Or $\lim_{t \to 0^+} \varphi(t) = \lim_{t \to 0^+} \lambda_1 |t|^k = 0$ et $\lim_{t \to 0^-} \varphi(t) = \lim_{t \to 0^-} \lambda_2 |t|^k = 0$. On en déduit donc que $\varphi(0) = 0$.
Donc nécessairement, φ est définie par

$$\varphi(t) = \begin{cases} \lambda_1 |t|^k \text{ si } t \geq 0 \\ \lambda_2 |t|^k \text{ si } t < 0 \end{cases} . \tag{7}$$

  – Étude réciproque : *Réciproquement, soient λ_1 et λ_2 des réels et soit $\varphi_{\lambda_1,\lambda_2}$ l'application donnée par (7). Étudions la dérivabilité de $\varphi_{\lambda_1,\lambda_2}$ et regardons si elle vérifie l'équation (6) sur $\mathbb{R}$.*
    La restriction de $\varphi_{\lambda_1,\lambda_2}$ aux intervalles ouverts J_1 et J_2 est dérivable, donc φ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et vérifie l'équation différentielle (6) en tout point de $\mathbb{R}^*$. Regardons au point 0.

    — 1^{er} *cas : $k = 2$.*
    On a

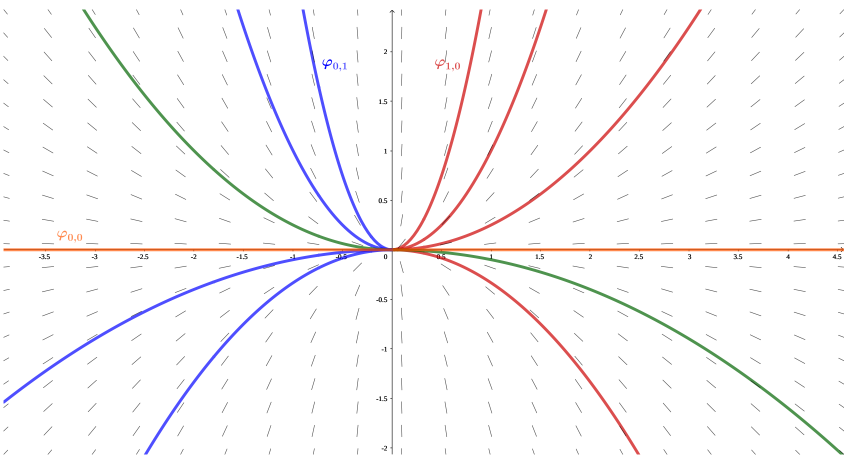
$$\frac{\varphi_{\lambda_1,\lambda_2}(t) - \varphi_{\lambda_1,\lambda_2}(0)}{t} = \begin{cases} \dfrac{\lambda_1 t^2 - 0}{t} = \lambda_1 t \quad \xrightarrow[t \to 0^+]{} 0 \\ \dfrac{\lambda_2 (-t)^2 - 0}{t} = \lambda_2 t \quad \xrightarrow[t \to 0^-]{} 0 \end{cases} .$$

Donc $\varphi_{\lambda_1,\lambda_2}$ est dérivable en 0 de dérivée $\varphi'_{\lambda_1,\lambda_2}(0) = 0$.
De plus, on a $0\varphi'_{\lambda_1,\lambda_2}(0) - 2\varphi_{\lambda_1,\lambda_2}(0) = 0$ donc $\varphi_{\lambda_1,\lambda_2}$ est solution de l'équation (6) en 0 et donc sur $\mathbb{R}$ d'après ce qui précède.
Conclusion :*L'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de $ty' - 2y = 0$ est donc*

$$\mathcal{S} = \left\{ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \,;\, t \longmapsto \varphi_{\lambda_1,\lambda_2}(t) \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Notons que pour tout $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$, on a $\varphi_{\lambda_1,\lambda_2} = \lambda_1 \varphi_{1,0} + \lambda_2 \varphi_{0,1}$, donc $\mathcal{S} = \mathrm{vect}(\varphi_{1,0}, \varphi_{0,1})$ et la famille $(\varphi_{1,0}, \varphi_{0,1})$ est libre. $\mathcal{S}$ est donc un espace vectoriel de dimension 2.

Sur le champ de vecteurs ci-dessous, on a tracé des courbes intégrales de l'équation $ty' - 2y = 0$ définies sur $\mathbb{R}_-^*$ en bleu, sur $\mathbb{R}_+^*$ en rouge, et définies sur tout $\mathbb{R}$ en vert. La fonction nulle, solution sur $\mathbb{R}$, est tracée en orange. Les courbes intégrales définies sur tout $\mathbb{R}$ sont des combinaisons linéaires des fonctions $\varphi_{1,0}$ et $\varphi_{0,1}$.



— $2^{ème}$ *cas :* $k = 1$.

On a

$$\frac{\varphi_{\lambda_1,\lambda_2}(t) - \varphi_{\lambda_1,\lambda_2}(0)}{t} = \begin{cases} \dfrac{\lambda_1 t - 0}{t} = \lambda_1 & \xrightarrow[t\to 0^+]{} \lambda_1 \\ \dfrac{\lambda_2(-t) - 0}{t} = -\lambda_2 & \xrightarrow[t\to 0^-]{} -\lambda_2 \end{cases}.$$

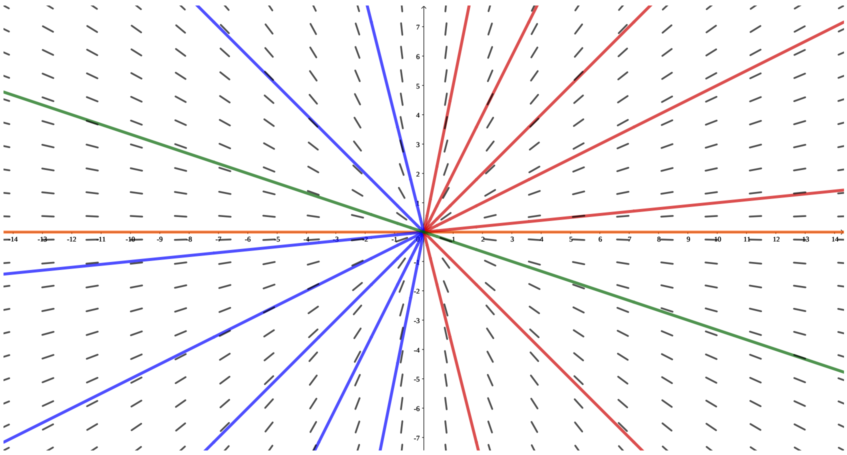
Donc $\varphi_{\lambda_1,\lambda_2}$ *est dérivable en* 0 *si et seulement si* $\lambda_1 = -\lambda_2$*, et dans ce cas,* $\varphi'_{\lambda_1,\lambda_2}(0) = \lambda_1$. *On a alors pour tout* $t \in \mathbb{R}$, $\varphi_{\lambda_1,-\lambda_1}(t) = \lambda_1 t$ *et* $0\varphi'_{\lambda_1,-\lambda_1}(0) - 2\varphi_{\lambda_1,-\lambda_1}(0) = 0$. *Donc* $\varphi_{\lambda_1,-\lambda_1}$ *est solution de (6) en* 0 *et donc sur* $\mathbb{R}$.

Conclusion : *L'ensemble des solutions sur* $\mathbb{R}$ *de* $ty' - y = 0$ *est donc*

$$\mathcal{S} = \{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \lambda_1 t \mid \lambda_1 \in \mathbb{R}\}.$$

$\mathcal{S}$ *est donc un espace vectoriel de dimension* 1.

Sur le champ de vecteurs ci-dessous, on a tracé des courbes intégrales de l'équation $ty' - y = 0$ *définies sur* $\mathbb{R}_-^*$ *en bleu, sur* $\mathbb{R}_+^*$ *en rouge, et définies sur tout* $\mathbb{R}$ *en vert. La fonction nulle, solution sur* $\mathbb{R}$*, est tracée en orange. Les courbes intégrales définies sur* $\mathbb{R}$ *sont des droites.*



— $3^{ème}$ *cas :* $k = \dfrac{1}{2}$.

On a

$$\frac{\varphi_{\lambda_1,\lambda_2}(t) - \varphi_{\lambda_1,\lambda_2}(0)}{t} = \begin{cases} \dfrac{\lambda_1\sqrt{t} - 0}{t} = \dfrac{\lambda_1}{\sqrt{t}} & \xrightarrow[t\to 0^+]{} \begin{cases} +\infty \text{ si } \lambda_1 > 0 \\ 0 \text{ si } \lambda_1 = 0 \\ -\infty \text{ si } \lambda_1 < 0 \end{cases} \\ \dfrac{\lambda_2\sqrt{-t} - 0}{t} = -\dfrac{\lambda_2}{\sqrt{-t}} & \xrightarrow[t\to 0^-]{} \begin{cases} -\infty \text{ si } \lambda_2 > 0 \\ 0 \text{ si } \lambda_2 = 0 \\ +\infty \text{ si } \lambda_2 < 0 \end{cases} \end{cases}.$$

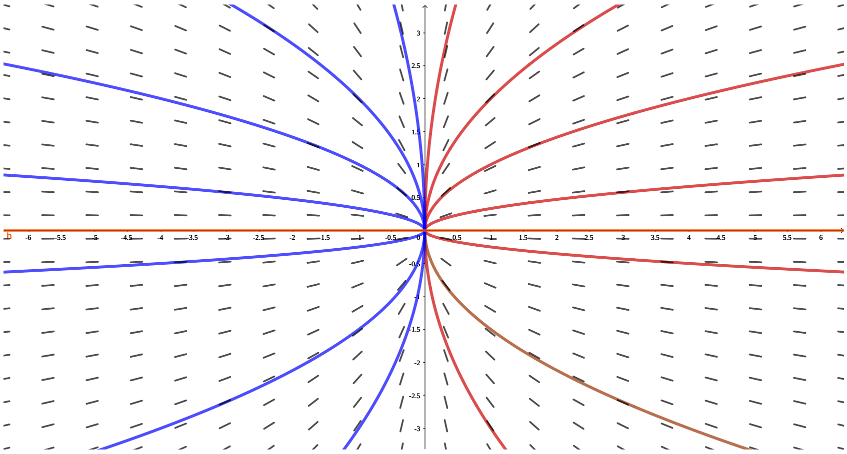
Donc $\varphi_{\lambda_1,\lambda_2}$ *est dérivable en* 0 *si et seulement si* $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$*, soit encore, si et seulement si* $\varphi_{\lambda_1,\lambda_2} = 0$. *Donc* $\varphi_{\lambda_1,\lambda_2}$ *est l'application nulle qui est bien solution sur* $\mathbb{R}$ *de (6).*

Conclusion : *L'ensemble des solutions définies sur* $\mathbb{R}$ *de* $ty' - \dfrac{1}{2}y = 0$ *est donc*

$$\mathcal{S} = \{0_{\mathbb{R}}\}.$$

$\mathcal{S}$ *est donc un espace vectoriel de dimension* 0.

Sur le champ de vecteurs ci-dessous, on a tracé des courbes intégrales de l'équation $ty' - \dfrac{1}{2}y = 0$ *définies sur* $\mathbb{R}_-^*$ *en bleu et sur* $\mathbb{R}_+^*$ *en rouge. Seule la fonction nulle (tracée en orange) est solution sur* $\mathbb{R}$*. Il n'y a pas de raccordement dérivable possible en* 0 *entre les courbes bleues et rouges, et donc pas de courbes intégrales sur* $\mathbb{R}$*.*



Remarque 20 — *De cette étude, on en déduit que le problème de Cauchy* $\left\{ \begin{array}{l} ty' - 2y = 0 \\ y(0) = 0 \end{array} \right.$ *admet une infinité de solutions alors que le problème de Cauchy* $\left\{ \begin{array}{l} ty' - 2y = 0 \\ y(0) = 1 \end{array} \right.$ *n'en admet aucune.*

Le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire tombe donc en défaut en $t = 0$*, point en lequel le coefficient de* y' *s'annule.*

Exemple 21 — *Déterminons l'ensemble des solutions définies sur* $\mathbb{R}$ *de l'équation*

$$t^2y' - ty = 1. \tag{8}$$

- Identification : *Il s'agit d'une équation différentielle linéaire scalaire du premier ordre à coefficients continus, sous forme non résolue dont le coefficient* t^2 *de* y' *s'annule en* 0.
- Résolution de l'équation sur les intervalles de non annulation de t^2 : *Posons* $J_1 = \mathbb{R}_+^*$ *et* $J_2 = \mathbb{R}_-^*$. *Soit* $i \in \{1, 2\}$.
  - Identification : *La résolution de l'équation* $t^2y' - ty = 1$ *sur* J_i *se ramène à celle de l'équation* $y' = \dfrac{1}{t}y + \dfrac{1}{t^2}$ *car* t^2 *ne s'annule pas. Il s'agit d'une équation différentielle linéaire scalaire du premier ordre à coefficients continus sur* J_i.
  - Solutions de l'équation homogène : *L'ensemble des solutions de l'équation homogène sur* J_i *est*
  $$\mathcal{S}_h = \left\{ J_i \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \tilde{\lambda}|t| \mid \tilde{\lambda} \in \mathbb{R} \right\} = \{ J_i \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \lambda t \mid \lambda \in \mathbb{R} \}.$$
  - Solution particulière : *Appliquons la méthode de variation de la constante.*
  Cherchons une solution particulière φ_p *de (8) définie sur* J_i *sous la forme* $\varphi_p(t) = \psi(t)t$ *où* ψ *est une fonction dérivable de* J_i *dans* $\mathbb{R}$.
  Alors φ_p *est solution de (8) si et seulement si, pour tout* $t \in J_i$,
  $$t^3\psi'(t) = 1,$$
  soit encore, si et seulement si, pour tout $t \in J_i$, $\psi'(t) = \dfrac{1}{t^3}$.
  Par exemple, choisissons pour ψ *la fonction* $\psi : t \longmapsto -\dfrac{1}{2t^2}$.
  La fonction $\varphi_p : J_i \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto -\dfrac{1}{2t}$ *est alors une solution particulière de (8).*
  - Conclusion : *L'ensemble des solutions de (8) sur* J_i *est donc*
  $$\mathcal{S} = \left\{ J_i \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \lambda t - \frac{1}{2t} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$
- Résolution de l'équation sur $\mathbb{R}$: *Soit* φ *une éventuelle solution de (8) sur* $\mathbb{R}$. *D'après le point précédent, il existe* $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ *et* $\lambda_2 \in \mathbb{R}$ *tels que*
$$\varphi(t) = \left\{ \begin{array}{ll} \lambda_1 t - \dfrac{1}{2t} & si\ t > 0 \\[2ex] \lambda_2 t - \dfrac{1}{2t} & si\ t < 0 \end{array} \right.$$

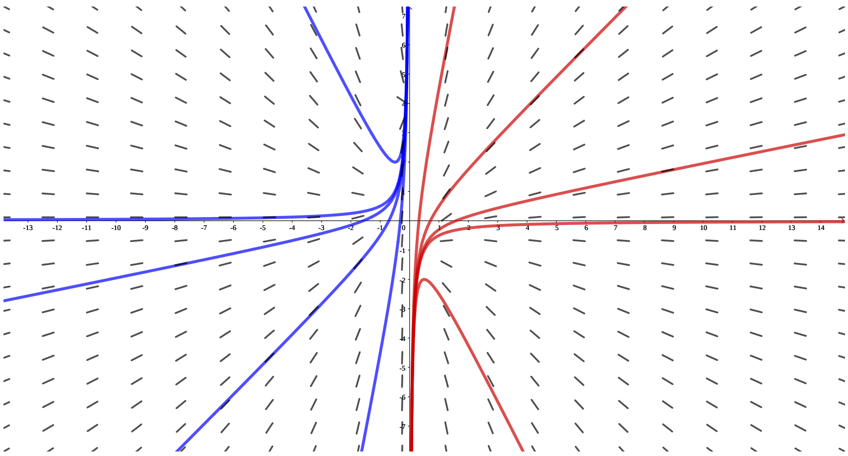
φ étant continue en 0, on doit avoir $\lim_{t\to 0^+} \varphi(t) = \lim_{t\to 0^+} \varphi(t) = \varphi(0)$.

Or $\lim_{t\to 0^+} \varphi(t) = \lim_{t\to 0^+} \lambda_1 t - \dfrac{1}{2t} = -\infty$. Cela contredit alors la continuité de φ en 0.
L'équation (8) n'admet donc pas de solutions sur $\mathbb{R}$.

– Conclusion : *L'ensemble des solutions de (8) sur $\mathbb{R}$ est donc l'ensemble vide :*

$$\mathcal{S} = \emptyset.$$

Sur le champ de vecteurs ci-dessous, on a tracé des courbes intégrales de l'équation $t^2y' - ty = 1$ définies sur $\mathbb{R}_-^*$ en bleu et sur $\mathbb{R}_+^*$ en rouge. Il n'y a pas de raccordement continu possible en 0, et donc pas de courbes intégrales sur $\mathbb{R}$.



2.1.3 Équations différentielles linéaires scalaires du deuxième ordre

On s'intéresse aux équations différentielles linéaires scalaire du deuxième ordre de la forme

$$a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = d(t), \tag{E_2}$$

où a, b, c et d sont des applications de I dans $\mathbb{K}$ continues.

L'étude complète de ces équations sera faite dans le chapitre 3, puisque, rappelons-le, ces équations se ramènent à des équations différentielles vectorielles du premier ordre. Néanmoins, lorsque les coefficients de l'équation sont constants, les résultats peuvent s'obtenir directement, sans utiliser l'outil matriciel.

2.1.3.a. Cas à coefficients constants

On s'intéresse aux équations différentielles linéaires scalaires du deuxième ordre à coefficients constants, de la forme

$$ay'' + by' + cy = d(t), \tag{E_{2c}}$$

où a, b et c sont des éléments de $\mathbb{K}$, avec a non nul et d est une application continue de I dans $\mathbb{K}$, d'équation homogène associée

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{E_{2ch}}$$

On appelle **polynôme caractéristique** associé à (E_{2c}) le polynôme du second degré

$$aX^2 + bX + c.$$

i) Ensemble des solutions de l'équation homogène

PROPOSITION 22
On se place avec $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Notons Δ le discriminant du polynôme caractéristique $P = aX^2 + bX + c$.

- *Si $\Delta \neq 0$ alors, en notant r_1 et r_2 les deux racines complexes distinctes de P, l'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions de (E_{2ch}) est*
$$\mathcal{S}_h = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}\ ;\ t \longmapsto \lambda_1 \mathrm{e}^{r_1 t} + \lambda_2 \mathrm{e}^{r_2 t} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2\right\}.$$
- *Si $\Delta = 0$ alors, en notant r la racine double complexe de P, l'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions de (E_{2ch}) est*
$$\mathcal{S}_h = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}\ ;\ t \longmapsto (\lambda_1 + \lambda_2 t)\mathrm{e}^{rt} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2\right\}.$$

L'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions complexes de l'équation homogène (E_{2ch}) est donc un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension 2.

Preuve — Notons r_1 et r_2 les deux racines complexes du polynôme caractéristique $aX^2 + bX + c$, éventuellement confondues.

Soit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ une application deux fois dérivable. Posons, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\psi(t) = \varphi(t)\mathrm{e}^{-r_1 t}$, de sorte que $\varphi(t) = \psi(t)\mathrm{e}^{r_1 t}$. Alors ψ est deux fois dérivable.

φ est solution de (E_{2ch}) si et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\mathrm{e}^{r_1 t}\left(a\psi''(t) + (2ar_1 + b)\psi'(t) + (ar_1^2 + br_1 + c)\psi(t)\right) = 0,$$
soit encore, si et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\psi''(t) + \left(2r_1 + \frac{b}{a}\right)\psi'(t) = 0.$$
Or $2r_1 + \frac{b}{a} = r_1 + \left(r_1 + \frac{b}{a}\right) = r_1 - r_2$ car $r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}$.

Donc φ est solution de (E_{2ch}) si et seulement si ψ' est solution de l'équation différentielle linéaire du premier ordre
$$y' = -\left(r_1 - r_2\right) y. \tag{9}$$

• 1^{er} cas : $\Delta \neq 0$. Alors $r_1 \neq r_2$ et l'ensemble des solutions de l'équation (9) est
$$\mathcal{S}_1 = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}\ ;\ t \longmapsto \lambda \mathrm{e}^{-(r_1 - r_2)t} \mid \lambda \in \mathbb{C}\right\}.$$
Donc φ est solution de (E_{2ch}) si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\psi'(t) = \lambda \mathrm{e}^{-(r_1 - r_2)t},$$
soit encore si et seulement s'il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\psi(t) = \lambda_1 \mathrm{e}^{-(r_1 - r_2)t} + \lambda_2,$$
soit
$$\varphi(t) = \lambda_1 \mathrm{e}^{r_2 t} + \lambda_2 \mathrm{e}^{r_1 t}.$$

• 2^{nd} cas : $\Delta = 0$. Alors $r_1 = r_2$ et l'ensemble des solutions de l'équation (9) est l'ensemble des fonctions constantes.

Donc φ est solution de (E_{2ch}) si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\psi'(t) = \lambda,$$
soit encore, si et seulement s'il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\psi(t) = \lambda_1 t + \lambda_2,$$
soit
$$\varphi(t) = \left(\lambda_1 t + \lambda_2\right)\mathrm{e}^{r_1 t}.$$

D'où le résultat. □

Exemples 23

- *Résolvons sur $\mathbb{C}$ l'équation*
$$y'' - (2 + 2\mathrm{i})y' + 2\mathrm{i}y = 0.$$
Le polynôme caractéristique associé est $P = X^2 - (2 + 2\mathrm{i})X + 2\mathrm{i}$, de discriminant $\Delta = (2 + 2\mathrm{i})^2 - 4 \times 1 \times 2\mathrm{i} = 0$. P admet une racine double $r = 1 + \mathrm{i}$.
L'ensemble des solutions complexes de l'équation est donc
$$\mathcal{S}_h = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}\ ;\ t \mapsto (\lambda_1 + \lambda_2 t)\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2\right\}.$$

- *Résolvons sur $\mathbb{C}$ l'équation*
$$y'' - 2y' + 2y = 0.$$
Le polynôme caractéristique associé est $P = X^2 - 2X + 2$, de discriminant $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 2 = -4 \neq 0$. P admet donc deux racines complexes conjuguées, $r_1 = 1 + \mathrm{i}$ et $r_2 = 1 - \mathrm{i}$.
L'ensemble des solutions complexes de l'équation est donc
$$\mathcal{S}_h = \left\{ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \; ; \; t \mapsto \lambda_1 \mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})t} + \lambda_2 \mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})t} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2 \right\}.$$

Proposition 24
On se place avec $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Notons Δ le discriminant du polynôme caractéristique $P = aX^2 + bX + c$.

- *Si $\Delta > 0$ alors, en notant r_1 et r_2 les deux racines réelles distinctes de P, l'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions de (E_{2ch}) est*
$$\mathcal{S}_h = \left\{ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; t \longmapsto \lambda_1 \mathrm{e}^{r_1 t} + \lambda_2 \mathrm{e}^{r_2 t} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$
- *Si $\Delta = 0$ alors, en notant r la racine double réelle de P, l'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions de (E_{2ch}) est*
$$\mathcal{S}_h = \left\{ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; t \longmapsto (\lambda_1 + \lambda_2 t) \mathrm{e}^{rt} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$
- *Si $\Delta < 0$ alors, en notant $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ les deux racines complexes conjuguées distinctes de P avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, l'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions de (E_{2ch}) est*
$$\mathcal{S}_h = \left\{ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; t \longmapsto \mathrm{e}^{\alpha t} \big(\lambda_1 \cos(\beta t) + \lambda_2 \sin(\beta t) \big) \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

L'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions réelles de l'équation homogène (E_{2ch}) est donc un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2.

Preuve — • Si $\Delta > 0$ ou $\Delta = 0$, alors le résultat s'obtient de la même façon que dans le cas complexe.

• Traitons le cas où $\Delta < 0$. Le polynôme caractéristique $P = aX^2 + bX + c$ possède alors deux racines complexes conjuguées $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$, avec $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$.

Soit φ une solution réelle de (E_{2ch}). En particulier, φ est une solution complexe de (E_{2ch}). Il existe donc $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{C}^2$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) = \lambda_1 \mathrm{e}^{(\alpha + i\beta)t} + \lambda_2 \mathrm{e}^{(\alpha - i\beta)t}$.

Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$\varphi(t) = \mathrm{e}^{\alpha t} \left(\lambda_1 \mathrm{e}^{i\beta t} + \lambda_2 \mathrm{e}^{-i\beta t} \right) = \mathrm{e}^{\alpha t} \left((\lambda_1 + \lambda_2) \cos(\beta t) + i(\lambda_1 - \lambda_2) \sin(\beta t) \right).$$

Or φ étant à valeurs réelles, $\varphi(0) \in \mathbb{R}$ et $\varphi\left(\dfrac{\pi}{2\beta}\right) \in \mathbb{R}$.

Donc $\lambda_1 + \lambda_2 \in \mathbb{R}$ et $\lambda_1 - \lambda_2 \in i\mathbb{R}$. On en déduit que $\mathrm{Im}(\lambda_1) + \mathrm{Im}(\lambda_2) = 0$ et $\mathrm{Re}(\lambda_1) - \mathrm{Re}(\lambda_2) = 0$. Donc $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$.

Posons $\gamma = \lambda_1 + \lambda_2$ et $\delta = i(\lambda_1 - \lambda_2)$. Alors $\gamma = 2\mathrm{Re}(\lambda_1) \in \mathbb{R}$ et $\delta = -2\mathrm{Im}(\lambda_1) \in \mathbb{R}$.

On a donc, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) = \mathrm{e}^{\alpha t} \left(\gamma \cos(\beta t) + \delta \sin(\beta t) \right)$ avec $(\gamma, \delta) \in \mathbb{R}^2$.

Réciproquement, une telle fonction est bien une solution réelle de (E_{2ch}).

□

Remarque 25 — *Dans le cas où $\Delta < 0$, on peut également donner l'ensemble des solutions sous les formes suivantes :*
$$\mathcal{S}_h = \left\{ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; t \longmapsto A\mathrm{e}^{\alpha t} \cos(\beta t - \varphi) \mid (A, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \right\},$$
ou
$$\mathcal{S}_h = \left\{ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; t \longmapsto A\mathrm{e}^{\alpha t} \sin(\beta t - \varphi) \mid (A, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

Exemples 26

- *Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle linéaire homogène $y'' - 5y' + 6y = 0$.*
Le polynôme caractéristique associé est $P = X^2 - 5X + 6$, de discriminant $\Delta = 5^2 - 4 \times 1 \times 6 = 1 > 0$. P admet donc deux racines réelles, $r_1 = 2$ et $r_2 = 3$.
L'ensemble des solutions réelles de l'équation est donc
$$\mathcal{S}_h = \left\{ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; t \longmapsto \lambda_1 \mathrm{e}^{2t} + \lambda_2 \mathrm{e}^{3t} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

- *Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation*
$$y'' - 2y' + y = 0.$$
Le polynôme caractéristique associé est $P = X^2 - 2X + 1 = (X-1)^2$, de racine double réelle $r = 1$. L'ensemble des solutions réelles de l'équation est donc
$$\mathcal{S}_h = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto (\lambda_1 + \lambda_2 t)\mathrm{e}^t \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

- *Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation*
$$y'' + 2y' + 2y = 0.$$
Le polynôme caractéristique associé est $P = X^2 + 2X + 2$, de discriminant $\Delta = 4 - 8 = -4 < 0$. P admet donc deux racines complexes conjuguées $r_1 = -1 + i$ et $r_2 = -1 - i$.
L'ensemble des solutions réelles de l'équation est donc
$$\mathcal{S}_h = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \mathrm{e}^{-t}\left(\lambda_1 \cos(t) + \lambda_2 \sin(t)\right) \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

ii) Ensemble des solutions de l'équation avec second membre

Proposition 27
Soient a, b et c des éléments de $\mathbb{K}$ et $d \in \mathcal{C}(I, \mathbb{K})$.

1. *L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation $ay'' + by' + cy = d(t)$ (E_{2c}) est un espace affine de dimension 2 dirigé par l'ensemble des solutions de l'équation homogène associée :*
$$\mathcal{S} = \varphi_p + \mathcal{S}_h,$$
où φ_p est une solution particulière de (E_{2c}).
2. *Soient $t_0 \in I$ et $(y_0, y_1) \in \mathbb{K}^2$. Le problème de Cauchy*
$$\begin{cases} ay'' + by' + cy = d(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \end{cases}$$
admet une et une seule solution sur I.

Preuve —

1. On admet l'existence d'une solution particulière φ_p de (E_{2c}). Nous avons vu que l'ensemble des solutions de l'équation homogène est un espace vectoriel de dimension 2. D'après la proposition 2, on a donc le résultat.
2. L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation est
$$\mathcal{S} = \left\{I \longrightarrow \mathbb{K}\ ;\ t \longmapsto \varphi_p(t) + \lambda_1\varphi_1(t) + \lambda_2\varphi_2(t) \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2\right\},$$
où (φ_1, φ_2) forme une base de solutions de l'équation homogène.
Les conditions initiales donnent alors
$$\begin{cases} \lambda_1\varphi_1(t_0) + \lambda_2\varphi_2(t_0) = y_0 - \varphi_p(t_0) \\ \lambda_1\varphi_1'(t_0) + \lambda_2\varphi_2'(t_0) = y_1 - \varphi_p'(t_0) \end{cases}.$$
Le déterminant de ce système d'inconnues λ_1, λ_2 vaut
$$D = \begin{vmatrix} \varphi_1(t_0) & \varphi_2(t_0) \\ \varphi_1'(t_0) & \varphi_2'(t_0) \end{vmatrix} = \varphi_1(t_0)\varphi_2'(t_0) - \varphi_2(t_0)\varphi_1'(t_0).$$
En considérant les bases de solutions obtenues dans la partie précédente, on obtient alors les résultats suivants.
• Si le polynôme caractéristique de l'équation admet deux racines distinctes r_1 et r_2 éléments de $\mathbb{K}$ alors le déterminant du système vaut
$$D = (r_2 - r_1)\mathrm{e}^{(r_1 + r_2)t_0} \neq 0.$$
• Si le polynôme caractéristique de l'équation admet une racine double r alors le déterminant du système vaut
$$D = \mathrm{e}^{2rt_0} \neq 0.$$
• Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et si le polynôme caractéristique de l'équation admet deux racines complexes conjuguées $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$ alors le déterminant du système vaut
$$D = \beta\mathrm{e}^{\alpha t_0} \neq 0.$$
Dans tous les cas, le déterminant du système est non nul. Le système admet donc une unique solution $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$.

□

Exemple 28 — *Déterminons la solution définie sur $\mathbb{R}$ du problème de Cauchy*

$$\begin{cases} y'' + 4y = 2, \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

- *Résolution de l'équation $y'' + 4y = 2$.*
  - Identification : *Il s'agit d'une équation différentielle linéaire scalaire du deuxième ordre à coefficients constants et second membre continu.*
  - Solutions de l'équation homogène : *Le polynôme caractéristique associé à l'équation $y'' + 4y = 0$ est $P = X^2 + 4 = (X - 2i)(X + 2i)$, de racines complexes conjuguées $r_1 = 2i$ et $r_2 = -2i$.*
    L'ensemble des solutions réelles de l'équation homogène $y'' + 4y = 0$ est donc

    $$\mathcal{S}_h = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \,;\, t \longmapsto \lambda_1 \cos(2t) + \lambda_2 \sin(2t) \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

  - Solution particulière : *La fonction $\varphi_p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \,;\, t \longmapsto \dfrac{1}{2}$ est une solution particulière évidente de $y'' + 4y = 2$.*
  - Conclusion : *L'ensemble des solutions de l'équation $y'' + 4y = 2$ est donc*

    $$\mathcal{S} = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \,;\, t \longmapsto \frac{1}{2} + \lambda_1 \cos(2t) + \lambda_2 \sin(2t) \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

- *Une application $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est donc solution du problème de Cauchy si et seulement s'il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi(t) = \dfrac{1}{2} + \lambda_1 \cos(2t) + \lambda_2 \sin(2t)$ avec les conditions initiales $\varphi(0) = 1$ et $\varphi'(0) = 0$.*

On obtient alors $\lambda_1 = \dfrac{1}{2}$ et $\lambda_2 = 0$.

Donc la solution du problème de Cauchy définie sur $\mathbb{R}$ est l'application

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \,;\, t \longmapsto \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2t).$$

iii) Détermination pratique d'une solution particulière

On rappelle que, parfois, une solution particulière apparaît de façon évidente. On peut également utiliser le principe de superposition des solutions pour en trouver une. Comme dans le cas des équations du premier ordre, il existe une méthode de variation des constantes pour trouver une solution particulière. Nous l'étudierons dans le chapitre 3, mais celle-ci est souvent longue et calculatoire. Voyons ici comment trouver, simplement, une solution particulière lorsque le second membre est de la forme polynôme-exponentielle.

On se place donc dans le cas particulier où l'équation s'écrit sous la forme

$$ay'' + by' + cy = P(t)\mathrm{e}^{\alpha t}, \qquad (E_{2c,pol-exp})$$

où a, b, c et α sont des éléments de $\mathbb{K}$ avec a non nul et P est un polynôme.

Le résultat suivant nous indique sous quelle forme chercher une solution particulière.

Proposition 29
L'équation différentielle ($E_{2c,pol-exp}$) admet une solution particulière de la forme

$$I \longrightarrow \mathbb{K} \,;\, t \longmapsto t^m Q(t)\mathrm{e}^{\alpha t},$$

où Q est une application polynomiale de même degré que P et m est l'ordre de multiplicité de α comme racine du polynôme caractéristique ($m = 0$ si α n'est pas racine de $aX^2 + bX + c$, $m = 1$ si α est racine simple et $m = 2$ si α est racine double).

Remarque 30 — *Soient a, b, c, γ et ω des nombres réels et P une application polynomiale à coefficients réels. Comme dans le cas des équations du premier ordre, si le second membre est de la forme $t \longmapsto P(t)\mathrm{e}^{\gamma t}\cos(\omega t)$ (resp. $\longmapsto P(t)\mathrm{e}^{\gamma t}\sin(\omega t)$), on peut chercher une solution particulière complexe de l'équation $ay'' + by' + cy = P(t)\mathrm{e}^{(\gamma + i\omega)t}$ puis en prendre sa partie réelle (resp. imaginaire).*

Exemple 31 — *Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle*

$$y'' + 2y' + 5y = 5t. \tag{10}$$

- Identification *Il s'agit d'une équation différentielle linéaire scalaire du deuxième ordre à coefficients constants et second membre continu.*
- Solutions de l'équation homogène : *Le polynôme caractéristique associé est $X^2 + 2X + 5$, de discriminant $\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 5 = -16 < 0$. Ce polynôme admet donc deux racines complexes conjuguées $r_1 = -1 - 2\mathrm{i}$ et $r_2 = -1 + 2\mathrm{i}$.*
  L'ensemble des solutions de l'équation homogène associée est donc
  $$\mathcal{S}_0 = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \mapsto \mathrm{e}^{-t}(\lambda_1 \cos(2t) + \lambda_2 \sin(2t)) \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$
- Solution particulière : *Les coefficients de l'équation (10) sont constants et le second membre est de la forme polynôme-exponentielle ($5t = 5t\mathrm{e}^{0t}$). On peut donc chercher une solution particulière de (10) sous la forme*
  $$\varphi_p(t) = at + b,\ \text{ avec } (a, b) \in \mathbb{R}^2$$
  (ici $P(t) = 5t$ est de degré 1 et $m = 0$ car $\alpha = 0$ n'est pas racine du polynôme caractéristique).
  Alors φ_p est solution de (10) si et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi_p''(t) + 2\varphi_p'(t) + 5\varphi_p(t) = 5t$. Après calculs, on trouve $a = 1$ et $b = -\dfrac{2}{5}$ et donc une solution particulière est $\varphi_p(t) = t - \dfrac{2}{5}$.
- Conclusion : *L'ensemble des solutions de l'équation (10) est donc*
  $$\mathcal{S} = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \mapsto t - \frac{2}{5} + \mathrm{e}^{-t}(\lambda_1 \cos(2t) + \lambda_2 \sin(2t)) \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Exemple 32 — *Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle*

$$y'' + y = t \sin t. \tag{11}$$

- Identification : *Il s'agit d'une équation différentielle linéaire scalaire du deuxième ordre à coefficients constants et second membre continu.*
- Solutions de l'équation homogène : *Le polynôme caractéristique associé est $X^2 + 1 = (X - i)(X + i)$. Ce polynôme admet donc deux racines complexes conjuguées $r_1 = \mathrm{i}$ et $r_2 = -\mathrm{i}$.*
  L'ensemble des solutions de l'équation homogène associée est donc
  $$\mathcal{S}_h = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \mapsto \lambda_1 \cos(t) + \lambda_2 \sin(t) \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$
- Solution particulière :
  - *Commençons par chercher une solution particulière complexe de $y'' + y = t\mathrm{e}^{it}$ sous la forme $\varphi_{p,\mathbb{C}}(t) = t(at + b)\mathrm{e}^{it}$, où $(a, b) \in \mathbb{C}^2$ (ici $P(t) = t$ est de degré 1 et $m = 1$ car i est racine de $X^2 + 1$).*
    Après calculs, $\varphi_{p,\mathbb{C}}$ est solution de (11) si et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}$,
    $$e^{it}(4iat + 2(ib + a)) = te^{it},$$
    soit encore, si et seulement si $a = \dfrac{1}{4i} = -\dfrac{i}{4}$ et $b = \dfrac{1}{4}$.
    Une solution particulière de l'équation $y'' + y = t\mathrm{e}^{it}$ est donc $\varphi_{p,\mathbb{C}}(t) = \dfrac{1}{4}\left(-it^2 + t\right)e^{it}$.
  - *Une solution particulière de $y'' + y = t\sin(t)$ est donc $\varphi_{p,\mathbb{R}} = \mathrm{Im}(\varphi_{p,\mathbb{C}})$, c'est-à-dire*
    $$\varphi_{p,\mathbb{R}}(t) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \frac{1}{4}\left(-t^2 \cos t + t \sin t\right)$$
- Conclusion : *L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de (11) est donc*
  $$\mathcal{S} = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \frac{1}{4}\left(-t^2 \cos t + t \sin t\right) + \lambda_1 \cos(t) + \lambda_2 \sin(t) \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

2.1.3.b. Résultats généraux

On revient à l'étude de l'équation différentielle linéaire scalaire du deuxième ordre sous forme résolue

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t), \tag{$E_{2,r}$}$$

où a, b et c sont des applications de I dans $\mathbb{K}$ continues, d'équation homogène associée

$$y'' + a(t)y' + b(t) = 0 \tag{$E_{2,rh}$}$$

On rappelle le théorème (admis) de Cauchy-Lipschitz linéaire 29 dans le cas de l'ordre 2.

Proposition 33
Soient $t_0 \in I$ et $(y_0, y_1) \in \mathbb{K}^2$. Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t) \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \end{cases}$$

admet une et une seule solution sur I.

On en déduit le théorème suivant.

Proposition 34
1. *L'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions définies sur I de l'équation homogène ($E_{2,rh}$) est un espace vectoriel de dimension 2.*
2. *L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions définies sur I de l'équation ($E_{2,r}$) est un espace affine de dimension 2 dirigé par l'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions de l'équation homogène associée :*

$$\mathcal{S} = \varphi_p + \mathcal{S}_h,$$

où φ_p est une solution particulière de ($E_{2,r}$).

Preuve —
1. $\mathcal{S}_h$ est un espace vectoriel d'après la proposition 1.
   Soit $t_0 \in I$. Considérons l'application linéaire $\Phi_{t_0} : \mathcal{S}_h \longrightarrow \mathbb{K}^2 \ ; \ \varphi \longmapsto \begin{pmatrix} \varphi(t_0) \\ \varphi'(t_0) \end{pmatrix}$.
   Soit $(y_0, y_1) \in \mathbb{K}^2$. Les applications a et b étant continues, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, il existe une unique solution φ au problème de Cauchy
   $$\begin{cases} y'' + a(t)y' + b(t)y = 0 \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \end{cases},$$
   c'est-à-dire telle que $\varphi \in \mathcal{S}_h$ et $\Phi_{t_0}(\varphi) = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}$. Ainsi, Φ_{t_0} est bijective.
   Donc $\mathcal{S}_h$, isomorphe à $\mathbb{K}^2$, est de dimension 2.
2. Le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire donne l'existence d'une solution particulière φ_p de ($E_{2,r}$). D'après ce qui précède, $\mathcal{S}_h$ est de dimension 2 et de la proposition 2, on en déduit le résultat.

□

Puisque l'espace vectoriel $\mathcal{S}_h$ est de dimension 2, si l'on dispose de deux solutions φ_1 et φ_2 de l'équation homogène ($E_{2,rh}$), il reste donc à savoir si elles sont indépendantes. Si c'est le cas, on sait alors que

$$\mathcal{S}_h = \text{vect}(\varphi_1, \varphi_2) = \left\{ I \longrightarrow \mathbb{K} \ ; \ t \longmapsto \lambda_1\varphi_1(t) + \lambda_2\varphi_2(t) \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2 \right\}.$$

L'outil suivant permet de déterminer si deux solutions forment une base de l'ensemble des solutions de l'équation homogène, que l'on appelle également un système fondamental de solutions.

Définition 35
*Soient φ_1 et φ_2 deux solutions de ($E_{2,rh}$). On appelle **wronskien** de (φ_1, φ_2) l'application*

$$w : I \longrightarrow \mathbb{K} \ ; \ t \longmapsto \begin{vmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) \end{vmatrix}.$$

Proposition 36
Soient φ_1 et φ_2 deux solutions de ($E_{2,rh}$). Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. *(φ_1, φ_2) forme une base de l'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions de l'équation homogène,*
2. *pour tout $t \in I$, $w(t) \neq 0$,*
3. *il existe $t_0 \in I$ tel que $w(t_0) \neq 0$.*

Preuve — Soit $t_0 \in I$. L'application $\Phi_{t_0} : \mathcal{S}_h \longrightarrow \mathbb{K}^2$; $\varphi \longmapsto \begin{pmatrix} \varphi(t_0) \\ \varphi'(t_0) \end{pmatrix}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Ainsi, (φ_1, φ_2) est une base de $\mathcal{S}_h$ si et seulement si $(\Phi_{t_0}(\varphi_1), \Phi_{t_0}(\varphi_2)) = \left(\begin{pmatrix} \varphi_1(t_0) \\ \varphi_1'(t_0) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varphi_2(t_0) \\ \varphi_2'(t_0) \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathbb{K}^2$, soit si et seulement si $w(t_0) \neq 0$.

□

Récapitulons. Pour connaître l'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions de l'équation homogène, il faut connaître deux solutions indépendantes φ_1 et φ_2 de l'équation homogène. D'après la partie précédente, nous savons les déterminer lorsque les coefficients de l'équation sont constants. Dans les autres cas, on ne peut plus introduire de polynôme caractéristique et il n'y a aucune méthode systématique. Toutefois, si l'on dispose d'une solution de l'équation homogène ($E_{2,rh}$) qui ne s'annule pas, la technique d'abaissement de l'ordre permet d'obtenir l'ensemble des solutions de l'équation ($E_{2,r}$). Nous présentons donc dans ce qui suit cette technique, puis quelques méthodes permettant parfois, mais pas toujours, d'obtenir au moins une solution de l'équation homogène. La méthode de variation des constantes permettant de déterminer une solution particulière de l'équation ($E_{2,r}$), connaissant deux solutions indépendantes de l'équation homogène, sera présentée dans le chapitre 3.

2.1.3.c. Technique d'abaissement de l'ordre

Expliquons comment déterminer l'ensemble des solutions de l'équation ($E_{2,r}$) connaissant une solution de l'équation homogène ($E_{2,rh}$) qui ne s'annule pas sur I. C'est une technique qui permet de se ramener à une équation différentielle scalaire linéaire du premier ordre et donc de trouver toutes les autres solutions.

Supposons donc disposer d'une solution φ_1 de l'équation homogène ($E_{2,rh}$) qui ne s'annule pas sur I.

Soit $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une application deux fois dérivable. Posons, pour tout $t \in I$, $\psi(t) = \dfrac{\varphi(t)}{\varphi_1(t)}$ de sorte que $\varphi(t) = \psi(t)\varphi_1(t)$. ψ est bien définie car φ_1 ne s'annule pas sur I et ψ est deux fois dérivable comme quotient de fonctions deux fois dérivables.

On a donc, pour tout $t \in I$,

$$\varphi'(t) = \psi'(t)\varphi_1(t) + \psi(t)\varphi_1'(t)$$

et

$$\varphi''(t) = \psi''(t)\varphi_1(t) + 2\psi'(t)\varphi_1'(t) + \psi(t)\varphi_1''(t).$$

Donc φ est solution de ($E_{2,r}$) si et seulement si, pour tout $t \in I$,

$$\varphi_1(t)\psi''(t) + (2\varphi_1'(t) + a(t)\varphi_1(t))\,\psi'(t) + (\varphi_1''(t) + a(t)\varphi_1'(t) + b(t)\varphi_1(t))\,\psi(t) = c(t).$$

Comme φ_1 est solution de ($E_{2,rh}$), on en déduit que φ est solution de ($E_{2,r}$) si et seulement si, pour tout $t \in I$,

$$\varphi_1(t)\psi''(t) + (2\varphi_1'(t) + a(t)\varphi_1(t))\,\psi'(t) = c(t).$$

Ainsi, φ est solution sur I de ($E_{2,r}$) si et seulement si ψ' est solution sur I de l'équation différentielle scalaire linéaire du premier ordre

$$\varphi_1(t)y' + (2\varphi_1'(t) + a(t)\varphi_1(t))\,y = c(t),$$

équation équivalente, puisque φ_1 ne s'annule pas sur I par hypothèse, à l'équation sous forme résolue

$$y' + \frac{2\varphi_1'(t) + a(t)\varphi_1(t)}{\varphi_1(t)} y = \frac{c(t)}{\varphi_1(t)}. \tag{12}$$

L'ensemble des solutions de (12) est

$$\mathcal{S}_{12} = \left\{ I \longrightarrow \mathbb{K} \; ; \; t \longmapsto \lambda \mathrm{e}^{-A(t)} + \varphi_p(t) \mid \lambda \in \mathbb{K} \right\},$$

où A désigne une primitive de $t \longmapsto \dfrac{2\varphi_1'(t) + a(t)\varphi_1(t)}{\varphi_1(t)}$ et φ_p une solution particulière de (12).

Notons P_1 une primitive de $t \longmapsto \mathrm{e}^{-A(t)}$ et P_2 une primitive de φ_p.

Alors φ est solution de ($E_{2,r}$) si et seulement si $\psi' \in \mathcal{S}_{12}$, soit encore si et seulement s'il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$ tel que pour tout $t \in I$,

$$\psi(t) = \lambda_1 P_1(t) + P_2(t) + \lambda_2.$$

L'ensemble des solutions est donc

$$\mathcal{S} = \left\{ I \longrightarrow \mathbb{K} \; ; \; t \longmapsto \underbrace{\lambda_2\varphi_1(t) + \lambda_1 P_1(t)\varphi_1(t)}_{\in \mathcal{S}_h} + \underbrace{P_2(t)\varphi_1(t)}_{\text{solution particulière}} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2 \right\}.$$

Pour appliquer cette méthode, on doit connaître une solution de l'équation homogène. Disposer d'une solution de l'équation avec second membre ne permet pas d'obtenir l'ensemble des solutions de l'équation avec second membre.

EXEMPLE 37 — *Résolvons sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle*

$$t^2 y'' - 2y = t^4. \tag{13}$$

- Identification : *Il s'agit d'une équation différentielle linéaire scalaire du deuxième ordre à coefficients et second membre continus sur $\mathbb{R}_+^*$, le coefficient de y'' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$.*
  On va chercher une solution particulière φ_1 de l'équation homogène puis appliquer la technique d'abaissement de l'ordre.
- Solution particulière de l'équation homogène : *Les coefficients de l'équation étant polynômiaux, on peut commencer par chercher une solution sous forme d'un monôme. Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $\varphi_1(t) = t^n$. Alors φ_1 est solution de l'équation homogène si et seulement $n(n-1)t^2 - 2t^2 = 0$ soit encore, si et seulement si $n(n-1) - 2 = n^2 - n - 1 = 0$. En prenant $n = 2$ [2], on obtient donc une solution particulière $\varphi_1(t) = t^2$ de l'équation homogène associée à (13).*
- Ensemble des solutions de l'équation avec second membre (13) : *Appliquons la méthode d'abaissement de l'ordre.*
  Soit $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{K}$ une application deux fois dérivable. Posons, pour tout $t \in I$, $\psi(t) = \dfrac{\varphi(t)}{\varphi_1(t)}$, de sorte que $\varphi(t) = \psi(t)\varphi_1(t) = \psi(t)t^2$. ψ est bien définie car φ_1 ne s'annule pas sur I et est deux fois dérivable.
  On a donc, pour tout $t \in I$,

  $$\varphi'(t) = \psi'(t)t^2 + 2t\psi(t)$$

  et

  $$\varphi''(t) = \psi''(t)t^2 + 4\psi'(t)t + 2\psi(t).$$

  Donc φ est solution de (12) si et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,

  $$\psi''(t)t^4 + 4\psi'(t)t^3 = t^4,$$

  soit encore, si et seulement si ψ' est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation

  $$ty' + 4y = t. \tag{14}$$

  Déterminons l'ensemble des solutions de l'équation (14) linéaire scalaire du premier ordre à coefficients et second membre continus sur $\mathbb{R}_+^*$, le coefficient de y' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Remarquons que $n = -1$ fournit également une autre solution de l'équation homogène indépendante de la première.

– Solutions de l'équation homogène associée à (14) : *Une primitive sur* $\mathbb{R}_+^*$ *de* $t \longmapsto -\frac{4}{t}$ *est* $t \longmapsto -4\ln(t) = \ln\left(\frac{1}{t^4}\right)$.
L'ensemble des solutions de l'équation homogène associée à (14) est donc

$$\mathcal{S}_{h,14} = \left\{\mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \;;\; t \longmapsto \lambda\frac{1}{t^4} \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

– Solution particulière de (14) : *Cherchons une solution particulière sous la forme* $f_p(t) = \frac{f(t)}{t^4}$ *où* $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ *est une fonction deux fois dérivable.*
Alors f_p *est solution de (14) si et seulement si, pour tout* $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$t\frac{f'(t)}{t^4} = t,$$

soit encore, si et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(t) = t^4$.
Par exemple, choisissons pour f *la fonction* $f : t \longmapsto \frac{t^5}{5}$.
La fonction $f_p : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \;;\; t \longmapsto \frac{t}{5}$ *est alors une solution particulière de (14).*

– Conclusion : *L'ensemble des solutions de (14) est donc*

$$\mathcal{S}_{14} = \left\{\mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \;;\; t \longmapsto \lambda\frac{1}{t^4} + \frac{t}{5} \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

On déduit de cette étude que φ *est solution de (13) si et seulement si* $\psi' \in \mathcal{S}_{14}$, *soit encore, après primitivation, si et seulement s'il existe* $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ *tel que, pour tout* $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\psi(t) = \lambda_1\frac{1}{t^3} + \frac{t^2}{10} + \lambda_2,$$

soit

$$\varphi(t) = \lambda_1\frac{1}{t} + \frac{t^4}{10} + \lambda_2 t^2.$$

– Conclusion : *L'ensemble des solutions de (13) est donc*

$$\mathcal{S}_{13} = \left\{\mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \;;\; t \longmapsto \lambda_1\frac{1}{t} + \lambda_2 t^2 + \frac{t^4}{10} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

On retrouve la base de solutions de l'équation homogène obtenue avec $n = 2$ *et* $n = -1$.

Remarques 38

- *Cette technique se généralise à l'ordre* n *et permet d'obtenir une équation d'ordre* $n-1$ *sur* ψ'.
- *Lorsque l'on dispose d'une base de solutions de l'équation homogène, on privilégie plutôt la méthode de variation des constantes (vue ultérieurement) pour trouver une solution particulière et donc l'ensemble des solutions de l'équation avec second membre, plutôt que d'appliquer la technique d'abaissement de l'ordre à une des deux solutions. En effet, cette dernière technique demande de calculer deux primitives successives et est donc davantage source d'erreurs que la première, qui demande de calculer deux primitives indépendantes.*

2.1.3.d. Détermination pratique de solutions de l'équation homogène

Pour résoudre l'équation ($E_{2,r}$), il est donc nécessaire de connaître au moins une solution de l'équation homogène ($E_{2,rh}$), en vue d'appliquer soit la méthode de variation des constantes si l'on a deux solutions indépendantes, soit la technique d'abaissement de l'ordre si l'on en a qu'une. Comme dit précédemment, contrairement au cas des équations à coefficients constants, il n'y a pas de méthode systématique pour trouver des solutions de l'équation homogène et c'est ce qui rend difficile la résolution de ces équations à coefficients non constants. Nous présentons quelques méthodes qui peuvent être tentées pour espérer obtenir une solution.

i) Recherche de solutions polynomiales

Si les coefficients de l'équation homogène sont polynômiaux, on peut essayer de trouver une solution sous la forme d'un monôme ou d'un polynôme. On peut commencer par essayer de déterminer le degré du polynôme par un argument sur le coefficient dominant, puis remplacer dans l'équation différentielle pour trouver les valeurs des coefficients qui conviendraient.

Exemple 39 — *Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle*

$$(t^2+2t+2)y''-2(t+1)y'+2y=0. \tag{15}$$

- Identification : *Il s'agit d'une équation différentielle linéaire scalaire homogène d'ordre 2 à coefficients continus sur $\mathbb{R}$, le coefficient de y' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.*
- Recherche de solutions particulières : *Les coefficients étant polynomiaux, cherchons une solution particulière sous forme polynomiale (ici la forme monomiale échoue).*
  Soit φ une fonction polynomiale unitaire de degré n. Alors le coefficient dominant de
  $$(t^2+2t+2)\varphi_1''(t)-2(t+1)\varphi_1'(t)+2\varphi_1(t)$$
  est égal à $n(n-1)-2n+2=n^2-3n+2=(n-1)(n-2)$.
  Donc si φ est solution de (15) alors nécessairement $n=1$ ou $n=2$.
  On cherche donc φ sous la forme $\varphi(t)=at^2+bt+c$ où $(a,b)\in\mathbb{R}^2$.
  Alors φ est solution de (15) si et seulement si, pour tout $t\in\mathbb{R}$,
  $$2a(t^2+2t+2)-2(t+1)(2at+b)+2(at^2+bt+c)=0,$$
  soit encore si et seulement si $c=b-2a$.
  Ainsi, en prenant par exemple $(a,b)=(1,0)$ et $(a,b)=(0,1)$, on obtient deux solutions particulières $\varphi_{1,0}(t)=t^2-2$ et $\varphi_{0,1}(t)=t+1$, indépendantes puisque $\begin{vmatrix}\varphi_{1,0}(0) & \varphi_{0,1}(0)\\ \varphi_{1,0}'(0) & \varphi_{0,1}'(0)\end{vmatrix}=-2\neq 0$.
- Conclusion : *Donc, d'après la proposition 34, l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (15) est*
  $$\mathcal{S}=\left\{\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\ ;\ t\longmapsto\lambda_1(t^2-2)+\lambda_2(t+1)\mid(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$

Remarque 40 — *Dans cet exemple, nous avons trouvé deux solutions indépendantes de l'équation homogène et nous avons donc pu conclure directement. Mais ce n'est pas toujours le cas.*

ii) Changement de fonction inconnue

Résoudre une équation différentielle par changement de fonction inconnue consiste à choisir une fonction φ_1 qui ne s'annule pas sur I puis montrer que toute application φ est solution de l'équation initiale si et seulement si l'application $\psi=\dfrac{\varphi}{\varphi_1}$ est solution d'une nouvelle équation, plus simple à résoudre.

La technique d'abaissement de l'ordre est un cas particulier de changement de fonction inconnue, où l'on choisit pour φ_1 une solution de l'équation homogène.

Exemple 41 — *Résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation*

$$(1+t^2)y''+4ty'+(1-t^2)y=0. \tag{16}$$

- Identification : *Il s'agit d'une équation différentielle scalaire linéaire homogène du deuxième ordre à coefficients continus sur $\mathbb{R}$, le coefficient de y' ne s'annule pas sur $\mathbb{R}_+^*$.*
- Changement de fonction inconnue : *Cherchons un changement de fonction inconnue qui conduit à une équation à coefficients constants.*
  Soit $\varphi_1:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ une application deux fois dérivable qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Soit $\varphi:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ une application deux fois dérivable.

Posons, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\psi(t) = \dfrac{\varphi(t)}{\varphi_1(t)}$ *de sorte que* $\varphi(t) = \psi(t)\varphi_1(t)$. ψ *est bien définie et est deux fois dérivable comme quotient de deux fonctions deux fois dérivables.*
Alors

$$\varphi'(t) = \psi'(t)\varphi_1(t) + \psi(t)\varphi_1'(t)$$

et

$$\varphi''(t) = \psi''(t)\varphi_1(t) + 2\psi'(t)\varphi_1'(t) + \psi(t)\varphi_1''(t).$$

Donc φ *est solution de (16) si et seulement si, pour tout* $t \in \mathbb{R}$,

$$(1+t^2)\varphi_1(t)\psi''(t)+\left(2(1+t^2)\varphi_1'(t)+4t\varphi_1(t)\right)\psi'(t)+\left((1+t^2)\varphi_1''(t)+4t\varphi_1'(t)+(1-t^2)\varphi_1(t)\right)\psi(t)=0.$$

Choisissons alors pour φ_1 *la fonction* $\varphi_1(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$, *fonction qui ne s'annule pas sur* $\mathbb{R}$.
Alors

$$(1+t^2)\varphi_1(t) = 1,$$
$$2(1+t^2)\varphi_1'(t) + 4t\varphi_1(t) = 0,$$

et

$$(1+t^2)\varphi_1''(t) + 4t\varphi_1'(t) + (1-t^2)\varphi_1(t) = -1.$$

Donc φ *est solution de (16) si et seulement si* ψ *est solution de l'équation différentielle linéaire scalaire homogène du deuxième ordre à coefficients constants*

$$y'' - y = 0.$$

L'ensemble des solutions de l'équation $y'' - y = 0$ *est*

$$\mathcal{S}_h = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \lambda_1 \mathrm{e}^{-t} + \lambda_2 \mathrm{e}^{t} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Ainsi, φ *est solution de (16) si et seulement s'il existe* $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ *tel que, pour tout* $t \in \mathbb{R}$,

$$\psi(t) = \lambda_1 \mathrm{e}^{-t} + \lambda_2 \mathrm{e}^{t},$$

soit

$$\varphi(t) = \lambda_1 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+t^2} + \lambda_2 \frac{\mathrm{e}^{t}}{1+t^2}.$$

– Conclusion : *L'ensemble des solutions de (16) est donc*

$$\mathcal{S}_{16} = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \lambda_1 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+t^2} + \lambda_2 \frac{\mathrm{e}^{t}}{1+t^2} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

iii) Changement de variables

Résoudre une équation différentielle par changement de variables consiste à choisir une fonction χ bijective sur I de classe $\mathcal{C}^2$ et de bijection réciproque de classe $\mathcal{C}^2$ (on parle de $\mathcal{C}^2$-difféomorphisme), puis montrer que toute application φ est solution de l'équation initiale si et seulement si l'application $\psi = \varphi \circ \chi^{-1}$ est solution d'une nouvelle équation, plus simple à résoudre. Cela revient à faire le changement de variables « $x = \chi(t)$ ».

Exemple 42 — *Résolvons sur* $\mathbb{R}_+^*$ *l'équation différentielle*

$$t^2 y'' + 3ty' + y = 0. \tag{17}$$

– Identification : *Il s'agit d'une équation différentielle linéaire scalaire homogène du deuxième ordre à coefficients continus sur* $\mathbb{R}_+^*$, *le coefficient de* y'' *ne s'annule pas sur* $\mathbb{R}_+^*$.

– Changement de variables : *Soit* χ *un* $\mathcal{C}^2$ *difféomorphisme de* $\mathbb{R}_+^*$ *sur* $\chi(\mathbb{R}_+^*)$. *Soit* $\varphi : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ *une application deux fois dérivable. Posons, pour tout* $x \in \chi(\mathbb{R}_+^*)$, $\psi(x) = \varphi\left(\chi^{-1}(x)\right)$ *de sorte que, pour tout* $t \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi(t) = \psi(\chi(t))$. ψ *est bien définie et est deux fois dérivables comme* φ *et* χ^{-1} *le sont. (On fait le changement de variables « $x = \chi(t)$ ».)*
Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,
$$\varphi'(t) = \chi'(t)\psi'(\chi(t))$$
et
$$\varphi''(t) = \chi''(t)\psi'(\chi(t)) + \chi'(t)^2\psi''(\chi(t)).$$
Donc φ *est solution sur* $\mathbb{R}_+^*$ *de (17) si et seulement si, pour tout* $t \in \mathbb{R}_+^*$,
$$t^2\left(\chi'(t)\right)^2\psi''(\chi(t)) + \left(t^2\chi''(t) + 3t\chi'(t)\right)\psi'(\chi(t)) + \psi(\chi(t)) = 0.$$
Choisissons par exemple pour χ *la fonction* $\chi : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$; $t \longrightarrow \ln(t)$. *Alors* χ *définit un* $\mathcal{C}^2$*-difféomorphisme de* $\mathbb{R}_+^*$ *sur* $\chi(\mathbb{R}_+^*) = \mathbb{R}$ *(sa bijection réciproque est l'application* $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$*).*
On a alors, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,
$$t^2\left(\chi'(t)\right)^2 = 1,$$
$$t^2\chi''(t) + 3t\chi'(t) = 2.$$
Donc φ *est solution sur* $\mathbb{R}_+^*$ *de (17) si et seulement si* ψ *est solution sur* $\mathbb{R}$ *de l'équation différentielle scalaire linéaire du deuxième ordre à coefficients constants*
$$y'' + 2y' + y = 0,$$
soit encore, si et seulement s'il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2$ *tel que, pour tout* $x \in \mathbb{R}$,
$$\psi(x) = (\lambda_1 x + \lambda_2)\mathrm{e}^{-x},$$
soit, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,
$$\varphi(t) = (\lambda_1 \ln(t) + \lambda_2)\frac{1}{t}.$$

– Conclusion : *L'ensemble des solutions de (17) est donc*
$$\mathcal{S} = \left\{\mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; t \longmapsto \lambda_1\frac{\ln(t)}{t} + \lambda_2\frac{1}{t} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

Remarque 43 — *Les équations du type* $at^2y'' + bty' + cy = 0$, *et plus généralement*
$$t^n y^{(n)} + a_{n-1}t^{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_1 t y' + a_0 y = 0,$$
où a_0, …, a_{n-1} *sont des constantes, s'appellent les* ***équations d'Euler****. On peut les résoudre soit par le changement de variables « $x = \ln(|t|)$ », soit en étudiant les solutions sous la forme* $t \longmapsto t^\alpha$ *où* $\alpha \in \mathbb{R}$.

Par exemple, dans le cas de l'ordre 2, on obtient que $t \longmapsto t^\alpha$ *est solution si et seulement si* α *est racine d'un polynôme de degré 2. Si ce polynôme admet deux racines distinctes, on obtient alors rapidement deux solutions indépendantes de l'équation homogène, qui forment donc une base de solutions. Cela se généralise à l'ordre* n.

Ainsi, dans l'exemple 37, l'équation homogène associée $t^2y'' - 2y = 0$ *est une équation d'Euler et la recherche de solutions sous la forme* $t \longmapsto t^\alpha$ *donne directement deux solutions,* $\varphi_1(t) = t^2$ *et* $\varphi_2(t) = \dfrac{1}{t}$.
Comme $\omega(1) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$, *les solutions* φ_1 *et* φ_2 *sont indépendantes et forment donc une base de solutions de l'équation homogène :* $\mathcal{S}_h = \mathrm{vect}(\varphi_1, \varphi_2)$.

Cependant, dans l'exemple précédent, l'application $t \longmapsto t^\alpha$ *est solution de* $t^2y'' + 3ty' + y = 0$ *si et seulement si* $\alpha(\alpha - 1) + 3\alpha + 1 = (\alpha + 1)^2 = 0$. *Donc seul* $\alpha = -1$ *convient. Cela ne permet donc pas d'obtenir directement deux solutions indépendantes. On utilise donc plutôt le changement de variables pour obtenir l'ensemble des solutions. On pourrait aussi utiliser la technique d'abaissement de l'ordre avec la solution* $t \longmapsto \dfrac{1}{t}$.

iv) Recherche de solutions développables en séries entières

On peut également essayer de chercher des solutions développables en séries entières (voir les cours d'Analyse 4 pour les séries entières). Nous y reviendrons ultérieurement.

2.1.3.e. Raccordements des solutions

Terminons par un dernier mot sur les raccordements des solutions lorsque l'équation n'est pas sous forme résolue et que le coefficient de y'' s'annule. La méthode est la même que pour le cas de l'ordre 1, simplement il faut vérifier que l'application obtenue est, cette fois-ci deux fois dérivable puisqu'on est dans le cas de l'ordre 2.

Exemple 44 — *Reprenons l'exemple 37 et résolvons sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle*

$$t^2y'' - 2y = t^4. \tag{13}$$

- Identification : *Il s'agit d'une équation différentielle linéaire salaire du deuxième ordre à coefficients et second membre continus, sous forme non résolue dont le coefficient t^2 de y'' s'annule en 0.*
- Résolution de l'équation sur les intervalles de non annulation de t^2 : *Nous avons vu à l'exemple 37 que l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}_+^*$ de (13) est*

  $$\mathcal{S}_{\mathbb{R}_+^*} = \left\{\mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \frac{\lambda_1}{t} + \lambda_2 t^2 + \frac{t^4}{10} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

  Par parité de $t \longmapsto t^2$ et $t \longmapsto t^4$, une application $\varphi : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}$ est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ de (13) si et seulement si l'application $\tilde{\varphi} : \mathbb{R}_-^* \longrightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $t \in \mathbb{R}_-^*$ par $\tilde{\varphi}(t) = \varphi(-t)$ est solution sur $\mathbb{R}_-^*$ de (13). On en déduit que l'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}_-^*$ de (13) est

  $$\mathcal{S}_{\mathbb{R}_-^*} = \left\{\mathbb{R}_-^* \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \frac{\lambda_3}{t} + \lambda_4 t^2 + \frac{t^4}{10} \mid (\lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

- Résolution de l'équation sur $\mathbb{R}$:
  - Raccordement au point 0 : *Soit φ une éventuelle solution de (13) sur $\mathbb{R}$. D'après le point précédent, il existe donc $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ tel que*

    $$\varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{\lambda_1}{t} + \lambda_2 t^2 + \dfrac{t^4}{10} & \text{si } t > 0, \\ \dfrac{\lambda_3}{t} + \lambda_4 t^2 + \dfrac{t^4}{10} & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

    φ étant continue en 0, on a $\lim\limits_{t\to 0^+} \varphi(t) = \lim\limits_{t\to 0^-} \varphi(t) = \varphi(0)$.

    Or

    $$\varphi(t) = \begin{cases} \dfrac{\lambda_1}{t} + \lambda_2 t^2 + \dfrac{t^4}{10} & \xrightarrow[t\to 0^+]{} \begin{cases} +\infty \text{ si } \lambda_1 > 0 \\ 0 \text{ si } \lambda_1 = 0 \\ -\infty \text{ si } \lambda_1 < 0 \end{cases} \\ \dfrac{\lambda_3}{t} + \lambda_4 t^2 + \dfrac{t^4}{10} & \xrightarrow[t\to 0^-]{} \begin{cases} -\infty \text{ si } \lambda_3 > 0 \\ 0 \text{ si } \lambda_3 = 0 \\ +\infty \text{ si } \lambda_3 < 0 \end{cases} \end{cases}.$$

    Donc φ est continue en 0 si et seulement si $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$, et dans ce cas, $\varphi(0) = 0$.
    Donc nécessairement, φ est définie par

    $$\varphi(t) = \begin{cases} \lambda_2 t^2 + \dfrac{t^4}{10} & \text{si } t \geq 0, \\ \lambda_4 t^2 + \dfrac{t^4}{10} & \text{si } t < 0. \end{cases} \tag{18}$$

  - Étude réciproque : *Réciproquement, soient λ_2 et λ_4 des réels et soit $\varphi_{\lambda_2,\lambda_4}$ l'application donnée par (18). Étudions la dérivabilité à l'ordre 1 et 2 de $\varphi_{\lambda_2,\lambda_4}$ et regardons si elle vérifie l'équation (13) sur $\mathbb{R}$. La restriction de $\varphi_{\lambda_2,\lambda_4}$ aux intervalles ouverts $\mathbb{R}_+^*$ et $\mathbb{R}_-^*$ est dérivable à l'ordre 2, donc $\varphi_{\lambda_2,\lambda_4}$ est dérivable à l'ordre 2 sur $\mathbb{R}^*$ et vérifie l'équation différentielle (13) en tout point de $\mathbb{R}^*$.*
    On a

    $$\varphi'_{\lambda_2,\lambda_4}(t) = \begin{cases} 2\lambda_2 t + \dfrac{4}{10}t^3 & \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0 \\ 2\lambda_4 t + \dfrac{4}{10}t^3 & \xrightarrow[t\to 0^-]{} 0 \end{cases}.$$

Donc, les deux limites étant égales, $\varphi_{\lambda_2,\lambda_4}$ *est dérivable en* 0*, de dérivée* $\varphi'_{\lambda_2,\lambda_4}(0) = 0$.
On a également

$$\varphi''_{\lambda_2,\lambda_4}(t) = \begin{cases} 2\lambda_2 + \dfrac{6}{5}t^2 & \xrightarrow[t\to 0^+]{} 2\lambda_2 \\ 2\lambda_4 + \dfrac{6}{5}t^2 & \xrightarrow[t\to 0^-]{} 2\lambda_4 \end{cases}.$$

Donc $\varphi_{\lambda_2,\lambda_4}$ *est deux fois dérivable en* 0 *si et seulement si* $\lambda_2 = \lambda_4$*, et dans ce cas,* $\varphi''_{\lambda_2,\lambda_4}(0) = \lambda_2$.

On a alors pour tout $t \in \mathbb{R}$*,* $\varphi_{\lambda_2,\lambda_2}(t) = \lambda_2 t^2 + \dfrac{t^4}{10}$ *et* $0^4\varphi''_{\lambda_2,\lambda_2}(0) - 2\varphi_{\lambda_2,\lambda_4}(0) = 0^4$*. Donc* $\varphi_{\lambda_2,\lambda_2}$ *est solution en* 0 *et donc sur* $\mathbb{R}$.

– Conclusion : *L'ensemble des solutions sur* $\mathbb{R}$ *de* $t^2y'' - 2y = t^4$ *est donc*

$$\mathcal{S} = \left\{ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \lambda t^2 + \frac{t^4}{10} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

2.2 Exemples de résolution d'équations différentielles non linéaires scalaires du premier ordre

Dans cette partie, I désigne un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et J un ouvert de $\mathbb{R}$.

Nous nous intéressons aux équations différentielles non linéaires scalaires du premier ordre de la forme

$$y' = f(t, y),$$

où $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application continue. On cherche donc les solutions définies sur un intervalle inclus dans I et à valeurs dans J de cette équation.

Remarque 45 — *Plus généralement, on peut remplacer l'ensemble de définition de* f *par un ouvert* Ω *de* $\mathbb{R}^2$.

Dans ce cas, on appelle solution de $y' = f(t, y)$ *une application* φ *d'un intervalle* $\tilde{I}$ *à valeurs dans* $\mathbb{R}$*, dérivable telle que*

1. *pour tout* $t \in \tilde{I}$*,* $(t, \varphi(t)) \in \Omega$*,*
2. *pour tout* $t \in \tilde{I}$*,* $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$.

Le théorème de Cauchy-Lipschitz s'énonce alors comme suit.

Soit $(t_0, y_0) \in \Omega$*. Supposons* f *de classe* $\mathcal{C}^1$*. Alors il existe une unique solution maximale* $\varphi_m : I_m \longrightarrow \mathbb{R}$ *au problème de Cauchy*

$$\begin{cases} y' = f(t, y) \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$

De plus, l'intervalle de définition I_m *de* φ_m *est ouvert et contient* t_0.

D'après les résultats du chapitre 1, nous n'appliquerons le théorème de Cauchy-Lipschitz que si la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Parfois ces équations peuvent se résoudre par changement de fonction inconnue ou par changement de variables, opérations qui peuvent ramener l'équation à une équation différentielle linéaire. Dans ce qui suit, nous traitons certains types d'équations différentielles.

Remarque 46 — *Contrairement aux équations différentielles linéaires, ee n'est pas le domaine de définition de* f *qui limite l'intervalle de définition des solutions maximales et on ne peut rien dire* a priori *sur l'intervalle de définition des solutions, qui dépend de la condition initiale du problème de Cauchy. Ainsi, pour une condition initiale donnée, on peut chercher l'intervalle de définition de la solution maximale correspondante et pour un intervalle donné, on peut chercher les conditions initiales possibles. Nous le verrons sur des exemples.*

2.2.1 Équations à variables séparables

Les équations différentielles scalaires du premier ordre à variables séparables sont les équations de la forme

$$y' = g(t)h(y), \tag{$\mathcal{E}_{sep}$}$$

où $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $h : J \longrightarrow \mathbb{R}$ sont des applications continues.

On se trouve donc dans le cas de l'équation $y' = f(t, y)$ avec $f : I \times J \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto g(t)h(y)$.

Remarquons que si h s'annule en un point $y^* \in J$ alors la fonction constante $t \longmapsto y^*$ est solution sur I de l'équation. En particulier, si le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique, une solution de l'équation ($\mathcal{E}_{sep}$) est soit constante égale à y^*, soit ne prend jamais la valeur y^*. On dit que y^* est un **point stationnaire**.

Preuve — Supposons que le théorème de Cauchy-Lipschitz s'applique. Soit φ une solution de l'équation ($\mathcal{E}_{sep}$). Supposons que φ prenne la valeur y^* en un point t_0. Alors φ est solution du problème de Cauchy $\begin{cases} y' = g(t)h(y) \\ y(t_0) = y^* \end{cases}$. La fonction $t \longmapsto y^*$ étant également solution, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, par unicité de la solution du problème de Cauchy, φ est la fonction constante égale à y^*. □

Esquissons une méthode de résolution de ces équations.

Soit $(t_0, y_0) \in I \times J$. Soit φ une éventuelle solution maximale, définie sur un intervalle I_m contenant t_0, de l'équation ($\mathcal{E}_{sep}$) vérifiant $\varphi(t_0) = y_0$.

Alors pour tout $t \in I_m$,

$$\varphi'(t) = g(t)h(\varphi(t)).$$

En supposant que $h \circ \varphi$ ne s'annule pas sur I_m, on a alors pour tout $t \in I_m$,

$$\frac{\varphi'(t)}{h(\varphi(t))} = g(t).$$

Donc par intégration, pour tout $t \in I_m$,

$$\int_{t_0}^{t} \frac{\varphi'(s)}{h(\varphi(s))} \mathrm{d}s = \int_{t_0}^{t} g(s) \mathrm{d}s,$$

soit par changement de variables « $u = \varphi(s)$ », φ étant de classe $\mathcal{C}^1$,

$$\int_{y_0}^{\varphi(t)} \frac{1}{h(u)} \mathrm{d}u = \int_{t_0}^{t} g(s) \mathrm{d}s.$$

En calculant les deux intégrales, on obtient une relation entre t et $\varphi(t)$ et il ne reste plus qu'à exprimer $\varphi(t)$ en fonction de t.

Exemple 47 — *Résolvons l'équation différentielle*

$$\mathrm{e}^{t+y} y' + 1 = 0. \tag{19}$$

– Identification : *Il s'agit d'une équation différentielle scalaire non linéaire du premier ordre. Remarquons que l'application $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ (t, y) \longmapsto -\mathrm{e}^{-t-y}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, donc d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, tout problème de Cauchy admet une unique solution maximale définie sur un intervalle ouvert.*
– Résolution par séparation des variables : *Soit φ une application d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dérivable.*
φ est solution sur I de (19) si et seulement si, pour tout $t \in I$,

$$\mathrm{e}^{t+\varphi(t)} \varphi'(t) + 1 = 0,$$

soit encore si et seulement si pour tout $t \in I$,

$$\varphi'(t)\mathrm{e}^{\varphi(t)} = -\mathrm{e}^{-t}.$$

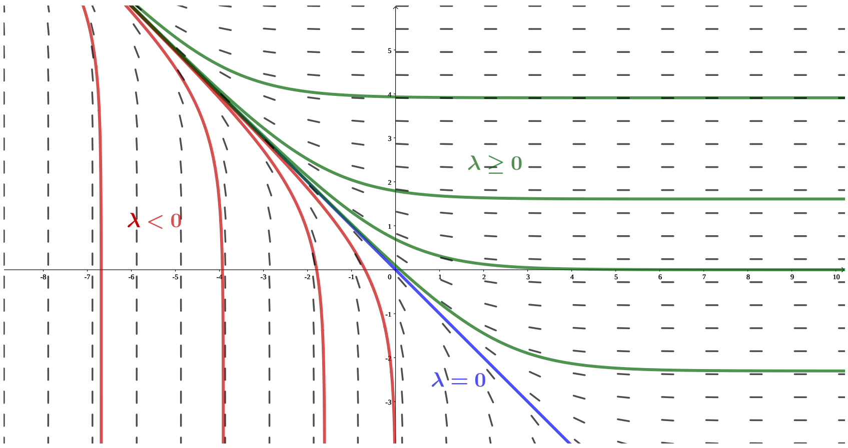
Par intégration, φ est donc solution sur I si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in I$,

$$\mathrm{e}^{\varphi(t)} = \mathrm{e}^{-t} + \lambda.$$

Comme pour tout $t \in I$, $\mathrm{e}^{\varphi(t)} > 0$, on en déduit que φ est solution si et seulement si, pour tout $t \in I$, $\mathrm{e}^{-t} + \lambda > 0$ et $\varphi(t) = \ln\left(\mathrm{e}^{-t} + \lambda\right)$.

– Recherche des solutions maximales :
  • ***1*** ^{er} ***cas :*** $\lambda \geq 0$. *Alors, pour tout* $t \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-t} + \lambda > 0$.
  Posons alors $\varphi_\lambda^+ : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $t \longmapsto \ln\left(\mathrm{e}^{-t} + \lambda\right)$, *solution globale donc maximale.*
  • ***2*** nd ***cas :*** $\lambda < 0$. *Alors* $\mathrm{e}^{-t} + \lambda > 0$ *si et seulement si* $t \in \left]-\infty, -\ln(-\lambda)\right[$.
  Posons alors $\varphi_\lambda^- : \left]-\infty, -\ln(-\lambda)\right[\longrightarrow \mathbb{R}$; $t \longmapsto \ln\left(\mathrm{e}^{-t} + \lambda\right)$, *solution maximale car elle tend vers* $-\infty$ *en* $-\ln(-\lambda)$.
  Ainsi, l'ensemble des solutions maximales de l'équation (19) est

$$\{\varphi_\lambda^+, \lambda \in \mathbb{R}_+\} \cup \{\varphi_\lambda^-, \lambda \in \mathbb{R}_-^*\}.$$



2.2.2 Équations autonomes

Les équations différentielles scalaires du premier ordre autonomes sont les équations de la forme

$$y' = h(y) \qquad (\mathcal{E}_a)$$

où $h : J \longrightarrow \mathbb{R}$ est une application continue.

Il s'agit d'un cas particulier d'équations à variables séparables avec $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $t \longmapsto 1$ et $I = \mathbb{R}$. Elles se résolvent de la même manière. Une équation autonome ne dépend donc pas du temps. Détaillons cela.

Proposition 48
Soit $a \in \mathbb{R}$. *L'application* φ *est solution sur un intervalle* I *de* $\mathbb{R}$ *de l'équation* $(\mathcal{E}_a)$ *si et seulement l'application* $\varphi_a : -a + I \longrightarrow \mathbb{R}$; $t \longmapsto \varphi(a+t)$ *est solution sur* $-a + I$ *de l'équation* $(\mathcal{E}_a)$.

En particulier, pour tout $(t_0, y_0) \in I \times J$, φ *est solution du problème de Cauchy*

$$\begin{cases} y' = h(y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

si et seulement si φ_{t_0} *est solution du problème de Cauchy*

$$\begin{cases} y' = h(y) \\ y(y_0) = 0 \end{cases}.$$

Preuve — Cela découle des égalités $\varphi_a'(t) = \varphi'(t-a)$ et $\varphi_{t_0}(0) = \varphi(t_0)$. □

Remarque 49 — *Par translation, tout problème de Cauchy peut se ramener à un problème de Cauchy en* $t_0 = 0$.

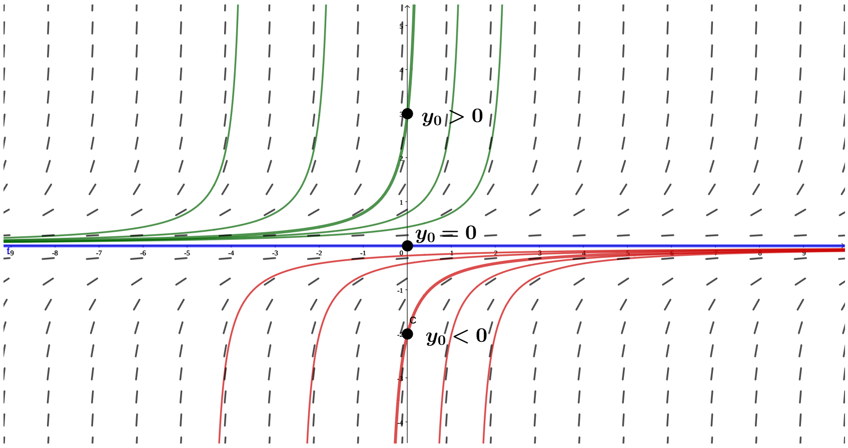
Exemple 50 — *Soit* $y_0 \in \mathbb{R}$. *Résolvons le problème de Cauchy*

$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = y_0 \end{cases} \qquad (20)$$

Notons (E) l'équation différentielle $y' = y^2$.

- Identification : *Il s'agit d'une équation différentielle autonome d'ordre* 1.
  L'application $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $(t, y) \longmapsto y^2$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *donc d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, le problème de Cauchy (20) admet une unique solution maximale définie sur un intervalle ouvert.*
- Résolution par séparation des variables : *Soit* φ_m *la solution maximale définie sur un intervalle* I_m *contenant* 0 *de ce problème de Cauchy.*
  D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, si φ_m *s'annule en un point* t_1 *alors* φ_m *est la solution du problème de Cauchy* $\begin{cases} y' = y^2 \\ y(t_1) = 0 \end{cases}$ *, donc est l'application nulle, par unicité de la solution. Donc, soit* φ_m *est l'application nulle, soit* φ_m *ne s'annule pas.*
  Si $y_0 = 0$*, alors* φ_m *s'annule en* y_0 *et est donc l'application nulle, définie de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{R}$*.*
  Supposons donc que $y_0 \neq 0$*. Alors* φ_m *ne s'annule pas. Pour tout* $t \in I_m$*, on a*
  $$\varphi'(t) = \varphi_m^2(t),$$
  soit, puisque $\varphi_m^2(t) \neq 0$,
  $$\frac{\varphi_m(t)}{\varphi_m^2(t)} = 1.$$
  Donc par intégration, pour tout $t \in I_m$,
  $$\int_0^t \frac{\varphi_m'(s)}{\varphi_m^2(s)} \mathrm{d}s = t.$$
  Donc pour tout $t \in I_m$,
  $$\left[\frac{-1}{\varphi_m(s)}\right]_0^t = t,$$
  soit
  $$\frac{1}{\varphi_m(t)} = \frac{1}{y_0} - t$$
  et $\dfrac{1}{y_0} - t$ *est nécessairement non nul.*
  Donc, pour tout $t \in I_m$,
  $$\varphi_m(t) = \frac{1}{\frac{1}{y_0} - t}.$$
  Réciproquement, si $y_0 > 0$ *alors* $0 \in \left]-\infty, \frac{1}{y_0}\right[$ *et on vérifie facilement que l'application*
  $$\varphi : \left]-\infty, \frac{1}{y_0}\right[\longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; t \longmapsto \frac{1}{\frac{1}{y_0} - t}$$
  est solution de l'équation (E) et satisfait la condition initiale $y(0) = y_0$*. Comme* $\varphi(t)$ *tend vers* $+\infty$ *lorsque* t *tend vers* $\dfrac{1}{y_0}$*, il s'agit d'une solution maximale du problème de Cauchy (20). Par unicité de la solution maximale, on en déduit que* $\varphi_m = \varphi$ *et* $I_m = \left]-\infty, \frac{1}{y_0}\right[$.
  Si $y_0 < 0$ *alors* $0 \in \left]\frac{1}{y_0}, +\infty\right[$ *et l'application* $\varphi : \left]\frac{1}{y_0}, +\infty\right[\longrightarrow \mathbb{R}$; $t \longmapsto \dfrac{1}{\frac{1}{y_0} - t}$ *est solution de l'équation (E) et vérifie la condition initiale* $y(0) = y_0$*. Comme* $\varphi(t)$ *tend vers* $-\infty$ *lorsque* t *tend vers* $\dfrac{1}{y_0}$*, il s'agit d'une solution maximale du problème de Cauchy (20). Par unicité de la solution maximale, on en déduit que* $\varphi_m = \varphi$ *et* $I_m = \left]\frac{1}{y_0}, +\infty\right[$.

De ce résultat, on déduit par translation que pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$*, la solution du problème de Cauchy*
$$\begin{cases} y' = y^2 \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$
est l'application $t \longmapsto \varphi(t - t_0)$.



2.2.3 Se ramener au cas linéaire : l'exemple des équations différentielles de Bernoulli

Les équations différentielles de Bernoulli sont les équations différentielles de la forme

$$y' + a(t)y = b(t)y^\alpha, \tag{$\mathcal{B}$}$$

où $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ et $a : I \longrightarrow \mathbb{K}$ et $b : I \longrightarrow \mathbb{K}$ sont des applications continues.

Il s'agit donc d'une équation différentielle non linéaire scalaire du premier ordre $y' = f(t, y)$ avec

$$f(t, y) = -a(t)y + b(t)y^\alpha.$$

Remarque 51 — *Si $\alpha = 0$ ou $\alpha = 1$, il s'agit d'une équation différentielle linéaire scalaire du premier ordre que l'on sait résoudre.*

On peut résoudre cette équation différentielle par un changement de fonction inconnue qui ramène l'équation à une équation différentielle linéaire.

Pour déterminer les solutions définies sur un intervalle $\tilde{I}$ inclus dans I de l'équation ($\mathcal{B}$), l'idée est d'effectuer le changement de fonction inconnue $\psi(t) = \varphi(t)^{1-\alpha}$ où φ est une solution de ($\mathcal{B}$) sur $\tilde{I}$. Pour assurer la bonne définition de ψ et sa dérivabilité, des contraintes sont souvent nécessaires sur φ (application dérivable qui ne s'annule pas, ou à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, etc.)

Si ψ est dérivable, on obtient pour tout $t \in \tilde{I}$,

$$\psi'(t) = (1 - \alpha)\varphi(t)^{-\alpha}\varphi'(t).$$

Donc si φ est solution sur $\tilde{I}$ de ($\mathcal{B}$) alors pour tout $t \in \tilde{I}$,

$$\psi'(t) = (1 - \alpha)\varphi(t)^{-\alpha} \left(-a(t)\varphi(t) + b(t)\varphi(t)^\alpha\right) = a(t)(\alpha - 1)\psi(t) + (1 - \alpha)b(t).$$

Donc ψ est solution sur $\tilde{I}$ de l'équation différentielle scalaire linéaire du premier ordre

$$y' = (\alpha - 1)a(t)y + (1 - \alpha)b(t). \tag{$\mathcal{B}_l$}$$

On en déduit alors l'expression de φ, avec des contraintes sur les constantes apparaissant dans l'expression de ψ. On vérifie que réciproquement les applications obtenues sont solutions. On peut également raisonner par équivalence.

Illustrons cela sur un exemple.

Exemple 52 — *Déterminons les solutions maximales de l'équation différentielle*

$$y' + ty = ty^3, \tag{21}$$

- Identification : *L'équation différentielle $y' + ty = ty^3$ est une équation différentielle scalaire du premier ordre non linéaire. Il s'agit d'une équation de Bernoulli avec $\alpha = 3$.*
  Remarquons que l'on a $y' = f(t, y)$ avec $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $(t, y) \longmapsto ty^3 - ty$ et f est de classe $\mathcal{C}^1$. Donc d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, tout problème de Cauchy admet une unique solution maximale définie sur un intervalle ouvert.

- Changement de fonction inconnue : *Notons que l'application nulle est solution sur $\mathbb{R}$ de cette équation. Du théorème de Cauchy-Lipschitz, on sait que toute solution non nulle de l'équation (21) ne s'annule pas et par continuité, est de signe constant.*

  Soit φ une application d'un intervalle J de $\mathbb{R}$ dérivable qui ne s'annule pas. Posons, pour tout $t \in J$, $\psi(t) = \dfrac{1}{\varphi(t)^2}$. ψ est bien défini car φ ne s'annule pas, ψ est à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ et ψ est dérivable car φ l'est sur J et $t \longmapsto \dfrac{1}{t^2}$ l'est sur $\mathbb{R}^*$.

  Alors φ est solution sur J de l'équation si et seulement si, pour tout $t \in J$,

$$\psi'(t) = -2\frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)^3} = 2t\frac{\varphi(t)}{\varphi(t)^3} - 2t\frac{\varphi(t)^3}{\varphi(t)^3} = 2t\psi(t) - 2t,$$

  soit encore, si et seulement si ψ est solution à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle linéaire du premier ordre

$$y' = 2ty - 2t.$$

  L'ensemble des solutions de l'équation homogène $y' = 2ty$ est

$$\mathcal{S}_h = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \lambda e^{t^2} \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

  L'application $t \longrightarrow 1$ est une solution particulière évidente de $y' = 2ty - 2t$.

  On en déduit que l'ensemble des solutions de l'équation $y' = 2ty - 2t$ est

$$\mathcal{S}_l = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \lambda e^{t^2} + 1 \mid \lambda \in \mathbb{R}\right\}.$$

  Donc φ est solution sur J de l'équation si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $t \in J$, $\psi(t) = \lambda e^{t^2} + 1$ et ψ est à valeurs strictement positives.

- Recherche des solutions maximales :
  - ***1**[er] **cas :** $\lambda \geq 0$. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\psi(t) > 0$.*

    Posons alors

$$\varphi_{\lambda_+}^{+} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda e^{t^2}}}$$

    solution globale donc maximale, et

$$\varphi_{\lambda_+}^{-} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto -\frac{1}{\sqrt{1 + \lambda e^{t^2}}},$$

    solution globale donc maximale.
  - ***2**[ème] **cas :** $\lambda \in]-1, 0[$. Alors $\psi(t) > 0$ si et seulement si $t \in]-\alpha_\lambda, \alpha_\lambda[$ où $\alpha_\lambda = \sqrt{\ln\left(-\dfrac{1}{\lambda}\right)}$.*

    Posons alors

$$\varphi_{\lambda_-}^{+} :]-\alpha_\lambda, \alpha_\lambda[\longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \frac{1}{\sqrt{1 + \lambda e^{t^2}}},$$

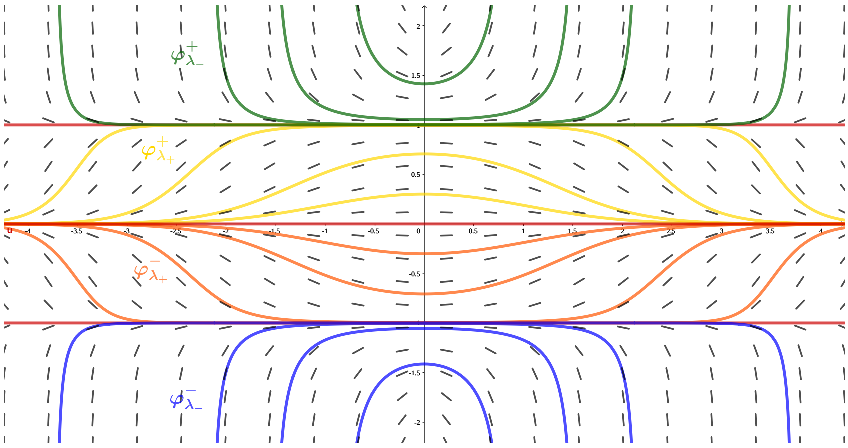
    et

$$\varphi_{\lambda_-}^{-} :]-\alpha_\lambda, \alpha_\lambda[\longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto -\frac{1}{\sqrt{1 + \lambda e^{t^2}}}.$$

    Ces solutions sont maximales car tendent vers l'infini en $\pm\alpha_\lambda$.
  - ***3**[ème] **cas :** $\lambda \leq -1$. Alors pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\psi(t) \leq 0$.*

  Ainsi, l'ensemble des solutions maximales de l'équation (21) est

$$\{0_{\mathbb{R}}\} \cup \left\{\varphi_{\lambda_+}^{+}, \lambda \in \mathbb{R}_+\right\} \cup \left\{\varphi_{\lambda_+}^{-}, \lambda \in \mathbb{R}_+\right\} \cup \left\{\varphi_{\lambda_-}^{+}, \lambda \in]-1, 0[\right\} \cup \left\{\varphi_{\lambda_-}^{-}, \lambda \in]-1, 0[\right\}.$$



2.3 Étude qualitative d'équations différentielles non linéaires

Pour la plupart des équations différentielles du type $y' = f(t,y)$, on ne sait pas (et parfois même, on ne peut pas) trouver de formule explicite pour exprimer les solutions. Nous avons étudié dans la partie précédente quelques exemples d'équations pour lesquelles il existe des méthodes permettant d'en trouver les solutions. Dans cette dernière partie, on s'intéresse à l'étude de propriétés qualitatives des solutions d'équations différentielles non linéaires scalaires du premier ordre, comme l'intervalle de définition et l'allure des solutions maximales, mais qui ne nécessitent pas la résolution explicite des équations.

Dans cette partie, Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Le résultat suivant est très utile en pratique pour démontrer qu'une solution maximale est en fait globale.

Proposition 53 (Théorème des bouts)
Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. Soit φ une solution définie sur un intervalle $]a,b[$ de l'équation différentielle

$$y' = f(t,y).$$

Supposons que $b < +\infty$ et que φ admette en b une limite finie ℓ telle que $(b,\ell) \in \Omega$. Alors l'application

$$\psi :]a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; t \longmapsto \begin{cases} \varphi(t) \;\; si \; t \in]a,b[\\ \ell \;\; si \; t = b, \end{cases}$$

est une solution de l'équation qui prolonge φ. En particulier, φ n'est pas une solution maximale.

Preuve — Considérons l'application $\psi :]a,b] \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; t \longmapsto \begin{cases} \varphi(t) \text{ si } t \in]a,b[\\ \ell \text{ si } t = b. \end{cases}$

Vérifions que ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ et solution de l'équation $y' = f(t,y)$.

φ étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'ouvert $]a,b[$, ψ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]a,b[$ et est solution de l'équation sur cet ouvert.

Par hypothèse $\varphi(t) \xrightarrow[t \to l^-]{} \ell$ donc $\psi(t) = \varphi(t) \xrightarrow[t \to b^-]{} \ell = \psi(b)$. Donc ψ est continue en b.

Comme $(b,\ell) \in \Omega$ et que f est de classe $\mathcal{C}^1$ donc continue sur Ω, f est continue en (b,ℓ).

Or $\psi(t) \xrightarrow[t \to b^-]{} \psi(b) = \ell$, donc $f(t,\psi(t)) \xrightarrow[t \to b^-]{} f(b,\psi(b))$.

Or pour tout $t \in]a,b[$, $\psi'(t) = \varphi'(t) = f(t,\varphi(t)) = f(t,\psi(t))$. Donc $\psi'(t) \xrightarrow[t \to b^-]{} f(b,\psi(b))$.

Donc ψ est dérivable en b et $\psi'(b) = f(b,\psi(b))$.

Donc ψ est dérivable sur $]a,b]$ et est solution de l'équation sur $]a,b]$.

Ainsi, ψ est une solution qui prolonge φ et φ n'est donc pas maximale.

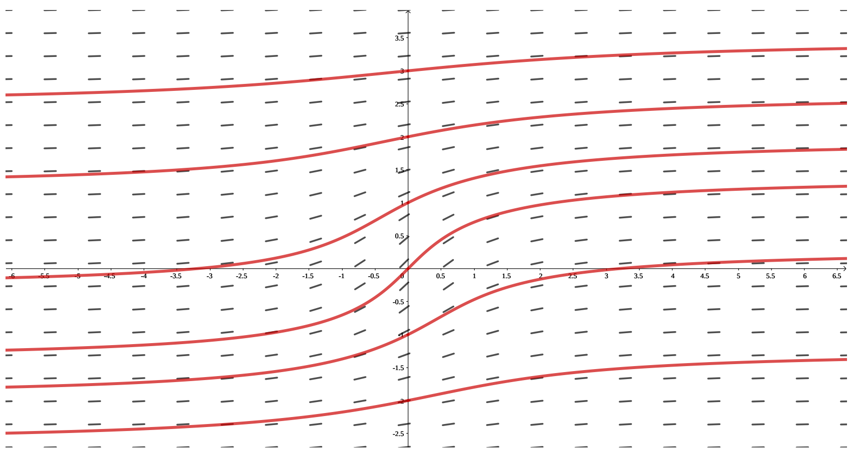
□

Remarque 54 — *On dispose du résultat analogue pour la borne a. On retiendra donc que si φ admet une limite finie ℓ à une extrémité finie m de son intervalle de définition telle que $(m,\ell) \in \Omega$ alors φ n'est pas une solution maximale.*

Exemple 55 — *Déterminons l'intervalle de définition des solutions maximales de l'équation différentielle*

$$y' = \frac{1}{1+t^2+y^2}.$$

- Identification : *Il s'agit d'une équation différentielle non linéaire du premier ordre.*
  L'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$; $(t,y) \longmapsto \dfrac{1}{1+t^2+y^2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe donc une unique solution maximale définie sur un intervalle ouvert à tout problème de Cauchy.
- *Soit φ une solution maximale de cette équation définie sur un intervalle $I =]a,b[$ de $\mathbb{R}$.*
  Supposons que $b < +\infty$.
  Pour tout $t \in I$, $\varphi'(t) = \dfrac{1}{1+t^2+\varphi(t)^2} \geq 0$, donc φ est croissante.
  Soit $t_0 \in I$. Par intégration, pour tout $t \in [t_0, b[$,
  $$\varphi(t) - \varphi(t_0) = \int_{t_0}^{t} \frac{\mathrm{d}s}{1+s^2+\varphi(s)^2} \leq \int_{t_0}^{t} 1\mathrm{d}s = t - t_0 \leq b - t_0.$$
  Donc l'application φ est croissante et majorée sur $[t_0, b[$, elle admet donc une limite ℓ finie en b. D'après le théorème des bouts, comme $(b,\ell) \in \mathbb{R}^2$, φ est donc une solution prolongeable en b et n'est donc pas une solution maximale, ce qui est absurde. Donc $b = +\infty$.
  On montrerait de même que $a = -\infty$.
  Donc $I = \mathbb{R}$ et φ est définie sur $\mathbb{R}$.
  Ainsi, les solutions maximales de l'équation sont globales et définies sur $\mathbb{R}$.



Exemple 56 — *On s'intéresse au problème de Cauchy*

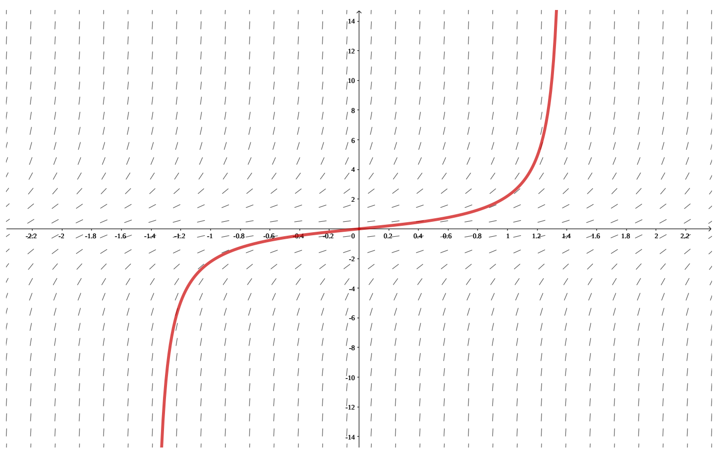
$$\begin{cases} y' = 1 + t^2y^2 \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

- Identification : *Il s'agit d'une équation différentielle non linéaire du premier ordre.*
  L'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$; $(t,y) \longmapsto 1 + t^2y^2$ est de classe $\mathcal{C}^1$. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, il existe donc une unique solution maximale φ définie sur un intervalle ouvert $I =]a,b[$ de $\mathbb{R}$ contenant 0.
- Étude de la parité : *Posons, pour tout $t \in]-b,-a[$, $\psi(t) = -\varphi(-t)$. Alors ψ est bien définie, dérivable car φ l'est, et pour tout $t \in]-b,-a[$*
  $$\psi'(t) = \varphi'(-t) = 1 + (-t)^2\varphi(-t)^2 = 1 + t^2\psi(t)^2.$$
  De plus, $\psi(0) = -\varphi(-0) = 0$. Donc ψ est solution du problème de Cauchy
  $$\begin{cases} y' = 1 + t^2y^2 \\ y(0) = 0. \end{cases}$$
  Or φ est LA solution maximale de ce problème de Cauchy, donc ψ est une restriction de φ et $]-b,-a[\subset]a,b[$.
  On en déduit donc que $a = -b$ et $\varphi = \psi$ sur l'intervalle $]-b,b[$.
  Donc φ est impaire et $I =]-b,b[$.

– Étude de l'intervalle de définition : *Montrons que* $b < +\infty$.
Supposons par l'absurde que $b = +\infty$.
Pour tout $t \geq 1$, *on a*
$$\varphi'(t) = 1 + t^2\varphi(t)^2 \geq 1 + \varphi(t)^2 > 0$$
et donc
$$\frac{\varphi'(t)}{1+\varphi(t)^2} \geq 1.$$
Donc, par intégration, pour tout $t \geq 1$,
$$\int_1^t \frac{\varphi'(s)}{1+\varphi(s)^2}\mathrm{d}s \geq t-1,$$
soit
$$\arctan(\varphi(t)) - \arctan(\varphi(1)) \geq t-1.$$
En laissant tendre t *vers* $+\infty$, *on en déduit que* $\arctan(\varphi(t))$ *tend vers* $+\infty$, *ce qui est absurde.*
Donc $b < +\infty$.
L'intervalle $I =]-b, b[$ *est donc borné et la solution maximale* φ *n'est donc pas globale.*

– Étude des limites aux bornes de l'intervalle : φ_m *étant strictement croissante, elle admet une limite* $\ell \in \overline{R}$ *en* b. *Comme* $b < +\infty$, *d'après le théorème des bouts, on en déduit que* φ *n'admet pas de limite finie en* b, *puisque sinon elle ne serait pas maximale.* φ *étant strictement croissante, elle tend donc vers* $+\infty$ *en* b.
Par imparité, φ *tend vers* $-\infty$ *en* a.

– Longueur de l'intervalle de définition : *Enfin, remarquons que pour tout* $t \in [0, b[$,
$$t = \int_0^t 1\mathrm{d}s = \int_0^t \frac{\varphi'(s)}{1+s^2\varphi(s)^2}\mathrm{d}s \geq \int_0^t \frac{\varphi'(s)}{1+(t\varphi(s))^2}\mathrm{d}s.$$
Donc, pour tout $t \in [0, b[$, *par le changement de variables « $u = t\varphi(s)$ », de classe* $\mathcal{C}^1$, *on a*
$$t \geq \frac{1}{t}\int_0^{t\varphi(t)} \frac{1}{1+u^2}\mathrm{d}u = \frac{1}{t}\arctan(t\varphi(t)).$$
Donc pour tout $t \in [0, b[$, $t^2 \geq \arctan(t\varphi(t))$ *et en laissant tendre* t *vers* b, *comme* $\varphi(t)$ *tend vers* $+\infty$, *on obtient* $b^2 \geq \frac{\pi}{2}$.[2] *Donc* $b \geq \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.
On en déduit donc que I *est un intervalle borné contenant l'intervalle* $\left[-\sqrt{\frac{\pi}{2}}, \sqrt{\frac{\pi}{2}}\right]$.



Donnons pour finir quelques propriétés vérifiées par les équations autonomes, propriétés déjà observées lorsque nous avons résolu des équations différentielles autonomes scalaires du premier ordre dans la partie précédente.

Proposition 57
Soit J *un intervalle ouvert de* $\mathbb{R}$. *Soit* $h : J \longrightarrow \mathbb{R}$ *une application de classe* $\mathcal{C}^1$. *Soit* φ_m *une solution maximale définie sur un intervalle ouvert* $I_m =]a, b[$ *de l'équation autonome*
$$y' = h(y).$$
Alors,

1. *L'application φ_m est soit constante, soit strictement monotone.*
2. *Si $J = \mathbb{R}$ et si $-\infty < a$ (resp. $b < +\infty$) alors $\varphi_m(t)$ tend vers l'infini lorsque t tend vers a (resp. b). En particulier, si φ_m est bornée alors φ_m est une solution globale, définie sur tout $\mathbb{R}$.*

Preuve —

1. Supposons que φ_m ne soit pas strictement monotone. Il existe donc deux éléments distincts t_1 et t_2 de I_m tels que $\varphi_m(t_1) = \varphi_m(t_2)$. D'après le théorème de Rolle, il existe donc un élément $t_0 \in]t_1, t_2[$ tel que $\varphi_m'(t_0) = 0$. On a donc $h(\varphi_m(t_0)) = 0$. Posons $y_0 = \varphi_m(t_0)$. L'application φ_m est donc solution du problème de Cauchy
$$\begin{cases} y' = h(y) \\ y(t_0) = y_0. \end{cases}$$
L'application constante égale à y_0 est également solution. Par unicité de la solution maximale de ce problème de Cauchy, h étant de classe $\mathcal{C}^1$, φ_m est donc constante égale à y_0.
D'où le résultat.
2. Supposons que $J = \mathbb{R}$. Traitons le cas où $b < +\infty$. L'autre cas se traite de même.
Pour tout $t \in I_m$, $h(\varphi_m(t)) \neq 0$. En effet, sinon il existerait $t_0 \in I_m$ tel que $h(\varphi_m(t_0)) = 0$ et on montrerait comme au point précédent que φ_m serait constante égale à $\varphi_m(t_0)$, et serait donc définie sur tout $\mathbb{R}$, contredisant le fait que $b < +\infty$.
D'après le premier point, φ_m est donc strictement monotone. Elle admet donc une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$.
Si ℓ était finie, comme $(b, \ell) \in \mathbb{R}^2$, d'après le théorème des bouts, φ_m serait prolongeable en b et ne serait donc pas une solution maximale, ce qui est absurde.
Donc $\varphi_m(t)$ tend vers l'infini lorsque t tend vers b.

□

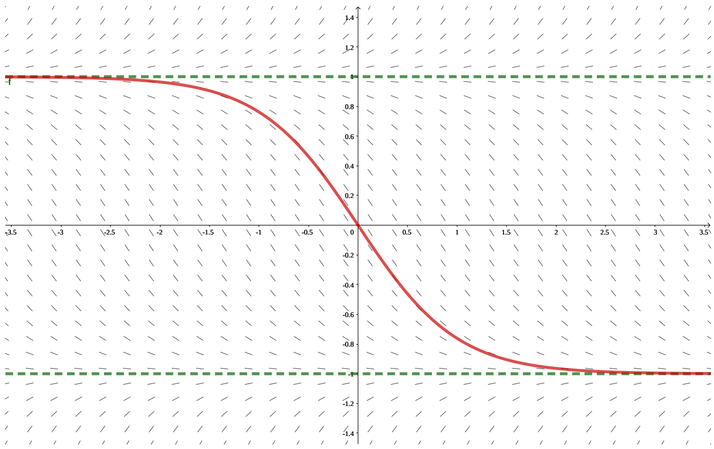
Exemple 58 — *On s'intéresse au problème de Cauchy*
$$\begin{cases} y' = (y+1)(y-1) \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Montrons que ce problème de Cauchy admet une unique solution maximale φ_m maximale définie sur $\mathbb{R}$ et précisons, sans résoudre, les variations et les limites en l'infini de φ_m.

- Unicité de la solution maximale sur un intervalle ouvert : *L'application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$; $(t, y) \longmapsto (y-1)(y+1)$ est de classe $\mathcal{C}^1$. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, ce problème de Cauchy admet donc une unique solution maximale φ_m définie sur un intervalle ouvert $I_m =]a, b[$ contenant 0.*
- Étude du caractère borné : *L'application φ_m ne peut pas prendre la valeur 1 ou -1. En effet, supposons par l'absurde que φ_m prenne la valeur 1 (resp. -1) en un point $t_1 \in I_m$. Alors φ_m est solution du problème de Cauchy*
$$\begin{cases} y' = (y-1)(y+1) \\ y(t_1) = 1 \text{ (resp. } -1). \end{cases}$$
L'application constante égale à 1 (resp. -1) étant également solution de ce problème de Cauchy, on en déduit, par unicité de la solution, que φ_m est l'application constante égale à 1 (resp. -1), contredisant le fait que $\varphi_m(0) = 0$.
Ainsi, φ_m étant continue, elle est à valeurs dans $]-1, 1[$.
L'équation étant autonome avec f définie sur $\mathbb{R}^2$ et φ_m étant bornée sur I_m, d'après la proposition précédente, φ_m est une solution globale, définie sur tout $\mathbb{R}$ (sinon, elle tendrait vers l'infini aux bornes finies de son intervalle de définition, ce qui est impossible.)
- Étude de la monotonie : *Comme φ_m est à valeurs dans $]-1, 1[$, pour tout $t \in I_m$, $\varphi_m'(t) = \varphi_m(t)^2 - 1 < 0$ et φ_m est strictement décroissante.*
- Étude de la parité : *Posons, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\psi(t) = -\varphi_m(-t)$. Alors ψ est bien définie, dérivable car φ_m l'est, et pour tout $t \in \mathbb{R}$,*
$$\psi'(t) = \varphi_m'(-t) = (\varphi_m(-t) - 1)(\varphi_m(-t) + 1) = (-\psi(t) - 1)(-\psi(t) + 1) = (\psi(t) + 1)(\psi(t) - 1).$$
De plus, $\psi(0) = -\varphi_m(-0) = 0$.
Donc ψ est solution globale donc maximale du problème de Cauchy
$$\begin{cases} y' = (y-1)(y+1) \\ y(0) = 0. \end{cases}$$
φ_m étant également solution maximale de ce problème de Cauchy, par unicité de la solution maximale, $\psi = \varphi_m$. Donc φ_m est une fonction impaire.

– Étude des limites aux bornes de l'intervalle : *L'application* φ_m *étant strictement décroissante et pour tout* $t \in \mathbb{R}_+$, $\varphi_m(t) \in [0, 1[$, φ_m *admet donc une limite* $\ell \in [-1, 0]$ *en* $+\infty$. *Montrons que* $\ell = -1$.
On a
$$\varphi_m'(t) = (\varphi_m(t) - 1)(\varphi_m(t) + 1) \xrightarrow[t \to +\infty]{} (\ell - 1)(\ell + 1) \leq 0.$$
Supposons que $\tilde{\ell} = (\ell - 1)(\ell + 1) < 0$.
Alors $\varphi_m'(t) \underset{t \to +\infty}{\sim} \tilde{\ell}$ *et* $t \longmapsto \tilde{\ell}$ *étant de signe constant non intégrable au voisinage de* $+\infty$,
$$\varphi_m(t) - \varphi_m(0) \underset{t \to +\infty}{\sim} \int_0^t \tilde{\ell} = t\tilde{\ell}.$$
Donc φ_m *tend vers* $-\infty$ *en* $+\infty$, *ce qui est absurde.*
Donc $\tilde{\ell} = (\ell - 1)(\ell + 1) = 0$ *et* $\ell = -1$.
φ_m *étant impaire, on en déduit qu'elle tend vers* 1 *en* $-\infty$.
(Si l'on n'a pas étudié la parité de φ_m, *on peut montrer de manière analogue que* φ_m *tend vers* 1 *en* $-\infty$.*)*

Remarquons que ce problème de Cauchy se résout relativement facilement par intégration, en séparant les variables.



Chapitre 3 Équations différentielles linéaires vectorielles du premier ordre

Dans tout ce chapitre, E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$.

3.1 Résultats généraux

3.1.1 Équations différentielles vectorielles et systèmes différentiels

On appelle **équation différentielle linéaire vectorielle du premier ordre** une équation différentielle de la forme

$$y' = a(t) \cdot y + b(t),$$

où $a : I \longrightarrow \mathcal{L}(E)$ et $b : I \longrightarrow E$ sont des applications continues.

Rappelons (voir partie 1.2.2. du chapitre 1) que l'on peut se ramener à une équation sous forme matricielle en considérant une base de E (par exemple, la base canonique si $E = \mathbb{K}^n$, comme ce sera le cas en général dans les exercices pratiques).

En effet, fixons une base $\mathcal{B}$ de E. En notant $A(t) = (a_{i,j}(t))_{\substack{i=1\dots n\\ j=1\dots n}}$ la matrice de $a(t)$ dans la base $\mathcal{B}$ et $B(t) = \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$ le vecteur colonne des composantes de $b(t)$ dans la base $\mathcal{B}$, l'équation différentielle $y' = a(t) \cdot y + b(t)$ s'écrit sous forme matricielle

$$Y' = A(t)Y + B(t).$$

Remarquons qu'une équation différentielle de la forme $Y' = A(t)Y+B(t)$ où $A : I \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $B : I \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ sont des applications continues est un cas particulier d'équation différentielle linéaire vectorielle du premier ordre avec $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Notons que $\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix}$ est solution de $Y' = A(t)Y + B(t)$ si et seulement si, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et tout $t \in I$,

$$\varphi_i'(t) = a_{i1}(t)\varphi_1(t) + \ldots + a_{in}(t)\varphi_n(t) + b_i(t).$$

On dira que $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est solution du **système différentiel linéaire scalaire du premier ordre** suivant

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y_1' & = & a_{11}(t)y_1 + \ldots + a_{1n}(t)y_n + b_1(t) \\ \vdots & & \\ y_n' & = & a_{n1}(t)y_1 + \ldots + a_{nn}(t)y_n + b_n(t). \end{array} \right. .$$

3.1.2 Problème de Cauchy

Proposition 1 (Formulation intégrale du problème de Cauchy)
Soient $a : I \longrightarrow \mathcal{L}(E)$ et $b : I \longrightarrow E$ des applications continues. Soient $t_0 \in I$ et $y_0 \in E$. Soit φ une application continue de I dans E. On a équivalence entre

1. *φ est solution du problème de Cauchy*

$$\begin{cases} y' = a(t) \cdot y + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

2. *Pour tout $t \in I$,*

$$\varphi(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} a(s) \cdot \varphi(s) + b(s) \mathrm{d}s.$$

Preuve —

- Supposons φ solution du problème de Cauchy. Alors, φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et pour tout $t \in I$,

$$\varphi(t) = \varphi(t_0) + \int_{t_0}^{t} \varphi'(s)\mathrm{d}s,$$

soit

$$\varphi(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} a(s) \cdot \varphi(s) + b(s)\mathrm{d}s.$$

- Réciproquement, supposons 2. L'application $t \longmapsto a(t) \cdot \varphi(t) + b(t)$ est continue donc $t \longmapsto \int_{t_0}^{t} a(s) \cdot \varphi(s) + b(s)\mathrm{d}s$ est de classe $\mathcal{C}^1$, de dérivée $t \longmapsto a(t) \cdot \varphi(t) + b(t)$.
En dérivant la relation $\varphi(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} a(s) \cdot \varphi(s) + b(s)\mathrm{d}s$, on a donc $\varphi'(t) = a(t) \cdot \varphi(t) + b(t)$ et on a également $\varphi(t_0) = y_0$. Donc φ est solution du problème de Cauchy.

□

Théorème 2 (Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire)
Soient $a : I \longrightarrow \mathcal{L}(E)$ et $b : I \longrightarrow E$ des applications continues. Soient $t_0 \in I$ et $y_0 \in E$. Alors le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = a(t) \cdot y + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

admet une unique solution globale définie sur I.

Preuve —

Considérons l'application linéaire $L : \mathcal{C}(I, E) \longrightarrow \mathcal{C}(I, E)$ définie, pour tout $\varphi \in \mathcal{C}(I, E)$, par

$$L(\varphi) : I \longrightarrow E \; ; \; t \longmapsto y_0 + \int_{t_0}^{t} a(s) \cdot \varphi(s) + b(s)\mathrm{d}s.$$

D'après la proposition précédente, une application $\varphi \in \mathcal{C}(I, E)$ est solution du problème de Cauchy si et seulement si $L(\varphi) = \varphi$, c'est-à-dire φ est un point fixe de L.

Soit $[\alpha, \beta]$ un segment de I contenant t_0. On munit E d'une norme $\| \cdot \|$ et on note $|||\cdot|||$ la norme de $\mathcal{L}(E)$ subordonnée à $\| \cdot \|$. On munit $\mathcal{C}([\alpha, \beta], E)$ de la norme infinie $\| \cdot \|_\infty$.

Par composition des applications continues $a : [\alpha, \beta] \longrightarrow \mathcal{L}(E)$ et $|||\cdot|||$, la fonction $t \longmapsto |||a(t)|||$ est continue sur le segment $[\alpha, \beta]$. Elle est donc bornée et il existe $M \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $t \in [\alpha, \beta]$,

$$|||a(t)||| \leq M.$$

On a alors, pour tout $x \in E$,

$$\|a(t) \cdot x\| \leq |||a(t)||| \|x\| \leq M\|x\|.$$

- Unicité : Soient φ_1 et φ_2 deux éléments de $\mathcal{C}(I, E)$ telles que $L(\varphi_1) = \varphi_1$ et $L(\varphi_2) = \varphi_2$.
Pour tout $t \in [\alpha, \beta]$,

$$\begin{aligned} \|L(\varphi_2)(t) - L(\varphi_1)(t)\| &= \left\| \int_{t_0}^{t} a(s) \cdot (\varphi_2(s) - \varphi_1(s))\, \mathrm{d}s \right\| \\ &\leq \left| \int_{t_0}^{t} \|a(s) \cdot (\varphi_1(s) - \varphi_2(s))\| \mathrm{d}s \right| \\ &\leq M \left| \int_{t_0}^{t} \|\varphi_2(s) - \varphi_1(s)\| \mathrm{d}s \right| \\ &\leq M|t - t_0| \|\varphi_2 - \varphi_1\|_\infty. \end{aligned}$$

On montre alors par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in [\alpha, \beta]$,

$$\|L^n(\varphi_2)(t) - L^n(\varphi_1)(t)\| \leq \frac{M^n|t - t_0|^n}{n!} \|\varphi_2 - \varphi_1\|_\infty.$$

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|L^n(\varphi_2) - L^n(\varphi_1)\|_\infty \leq \frac{M^n|\beta - \alpha|^n}{n!} \|\varphi_2 - \varphi_1\|_\infty.$$

Pour $i \in \{1, 2\}$, puisque φ_i est un point fixe de L, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $L^n(\varphi_i) = \varphi_i$.
Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\|\varphi_2 - \varphi_1\|_\infty \leq \frac{M^n|\beta - \alpha|^n}{n!} \|\varphi_2 - \varphi_1\|_\infty.$$

En laissant tendre n vers $+\infty$, comme $\dfrac{(M|\beta-\alpha|)^n}{n!}$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$ (terme général d'une série convergente), on en déduit que $\varphi_1 = \varphi_2$ sur $[\alpha, \beta]$, segment quelconque de I.
Donc $\varphi_1 = \varphi_2$ sur I.

- Existence : Soit $\psi \in \mathcal{C}(I, E)$. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\psi_n = L^n(\psi)$. D'après le point précédent, sur le segment $[\alpha, \beta]$ de I, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\|\psi_{n+1} - \psi_n\|_\infty \leq \frac{M|\beta-\alpha|^n}{n!}\|\psi_1 - \psi_0\|_\infty.$$
La série $\sum_{n\geq 0} \psi_{n+1} - \psi_n$ converge donc normalement, donc uniformément, sur $[\alpha, \beta]$. Comme pour tout $N \in \mathbb{N}$,
$$\psi_N = \psi + \sum_{n=0}^{N-1} \psi_{n+1} - \psi_n,$$
la suite $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc uniformément sur $[\alpha, \beta]$ vers une fonction φ. Par continuité des ψ_n et par convergence uniforme, on en déduit que φ est continue sur $[\alpha, \beta]$.
$[\alpha, \beta]$ étant un segment quelconque de I, on en déduit que φ est définie sur I et est continue.
De la convergence uniforme de $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[\alpha, \beta]$, on obtient la convergence uniforme de la suite $(a \cdot \psi_n + b)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[\alpha, \beta]$ vers $a \cdot \varphi + b$. On en déduit donc que la suite de fonctions $(L(\psi_n))_{n\in\mathbb{N}}$, définies pour tout $t \in [\alpha, \beta]$ par
$$L(\psi_n)(t) = \int_{t_0}^{t} a(s) \cdot \psi_n(s) + b(s)\mathrm{d}s,$$
converge uniformément sur $[\alpha, \beta]$ vers
$$t \longmapsto \int_{t_0}^{t} a(s) \cdot \varphi(s) + b(s)\mathrm{d}s,$$
c'est-à-dire vers $L(\varphi)$.
Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $L(\psi_n) = \psi_{n+1}$ et $(\psi_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers φ sur $[\alpha, \beta]$.
Par unicité de la limite, on a donc $L(\varphi) = \varphi$ sur $[\alpha, \beta]$.
$[\alpha, \beta]$ étant un segment quelconque de I, on a donc $L(\varphi) = \varphi$ sur I.
Donc φ est une solution du problème de Cauchy définie sur I.

□

3.1.3 Structure de l'ensemble des solutions

Proposition 3
Soit $a : I \longrightarrow \mathcal{L}(E)$ une application continue. L'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions de l'équation homogène $y' = a(t) \cdot y$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(I, E)$ de dimension n.

Preuve — L'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions de $y' = a(t) \cdot y + b(t)$ est le noyau de l'application linéaire
$$\ell : \mathcal{C}^1(I, E) \longrightarrow \mathcal{C}(I, E)\ ;\ \varphi \longmapsto \varphi' - a(t) \cdot \varphi.$$
C'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I, E)$.

Soit $t_0 \in I$. Considérons l'application $\Phi_{t_0} : \mathcal{S}_h \longrightarrow E\ ;\ \varphi \longmapsto \varphi(t_0)$. L'application Φ_{t_0} est linéaire.

Soit $y_0 \in E$. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, il existe une unique solution φ définie sur I au problème de Cauchy
$$\begin{cases} y' = a(t) \cdot y + b(t) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases},$$
c'est-à-dire une unique application $\varphi \in \mathcal{S}_h$ telle que $\Phi_{t_0}(\varphi) = y_0$.

Donc Φ_{t_0} est bijective. $\mathcal{S}_h$ est donc isomorphe à E qui est de dimension n. D'où le résultat. □

Proposition 4
Soient $A : I \longrightarrow \mathcal{L}(E)$ et $b : I \longrightarrow E$ des applications continues. L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions de l'équation différentielle $y' = a(t) \cdot y + b(t)$ est un espace affine dirigé par l'ensemble $\mathcal{S}_h$:
$$\mathcal{S} = \varphi_p + \mathcal{S}_h,$$
où $\varphi_p \in \mathcal{S}$.

Preuve — D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire, on sait que $\mathcal{S}$ est non vide. Considérons donc un élément φ_p de $\mathcal{S}$.

Soit $\varphi \in \mathcal{C}^1(I, E)$. Alors $\varphi \in \mathcal{S}$ si et seulement si, pour tout $t \in I$,
$$\varphi'(t) = a(t) \cdot \varphi(t) + b(t),$$

soit encore, si et seulement si, pour tout $t \in I$,

$$(\varphi - \varphi_p)'(t) = \varphi'(t) - \varphi_p'(t) = a(t) \cdot \varphi(t) + b(t) - (a(t) \cdot \varphi_p(t) + b(t)) = a(t) \cdot (\varphi(t) - \varphi_p(t)).$$

Donc $\varphi \in \mathcal{S}$ si et seulement si $\varphi - \varphi_p \in \mathcal{S}_h$.

Donc $\mathcal{S} = \varphi_p + \mathcal{S}_h$. □

PROPOSITION 5 (Principe de superposition)
Soient λ_1,..., λ_N des éléments de $\mathbb{K}$ et b_1, ..., b_N des applications continues de I dans E. Supposons que pour tout $i \in \{1, \ldots, \mathbb{N}\}$, φ_i est une solution particulière de l'équation

$$y' = a(t) \cdot y + b_i(t).$$

Alors $\lambda_1\varphi_1 + \ldots + \lambda_N\varphi_N$ est une solution particulière de l'équation

$$y' = a(t) \cdot y + \lambda_1 b_1(t) + \ldots + \lambda_N b_N(t).$$

Preuve — Analogue au cas scalaire. □

3.1.4 Système fondamental de solutions

Comme $\mathcal{S}_h$ est un espace vectoriel de dimension n, il possède une base à n éléments. On introduit alors la définition suivante.

DÉFINITION 6
*On appelle **système fondamental de solutions** de l'équation homogène $y' = a(t) \cdot y$ toute base $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ de l'espace vectoriel $\mathcal{S}_h$.*

REMARQUE 7 — *Soit $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ un système fondamental de solutions. Alors*

$$\mathcal{S}_h = \mathrm{vect}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n) = \{I \longrightarrow E\ ;\ t \longmapsto \lambda_1\varphi_1(t) + \ldots + \lambda_n\varphi_n(t) \mid (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n\}.$$

PROPOSITION 8
Soient φ_1, ..., φ_n n solutions définies sur I de l'équation homogène $y' = a(t) \cdot y$. Soit $t_0 \in I$. Alors $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ est un système fondamental de solutions si et seulement si $(\varphi_1(t_0), \ldots, \varphi_n(t_0))$ est une base de E.

Preuve — Nous avons vu que l'application $\Phi_{t_0} : \mathcal{S}_h \longrightarrow E\ ;\ \varphi \longmapsto \varphi(t_0)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Donc $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ est une base de $\mathcal{S}_h$ si et seulement si $(\varphi_1(t_0), \ldots, \varphi_n(t_0))$ est une base de E. □

Ce n'est plus vrai sur des fonctions quelconques de I dans E ! Ce n'est vrai que pour des solutions d'une même équation linéaire.

DÉFINITION 9
*Soient $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ une famille d'éléments de $\mathcal{S}_h$ sur I et $\mathcal{B}$ une base de E. On appelle **wronskien** de $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ dans la base $\mathcal{B}$ l'application*

$$W_{\mathcal{B}} : I \longrightarrow \mathbb{K}\ ;\ t \longmapsto \det_{\mathcal{B}}(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)).$$

REMARQUE 10 — *Lorsque $E = \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, on ne précise généralement pas la base $\mathcal{B}$, sous-entendant qu'il s'agit de la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.*

De la proposition 8, on déduit le résultat suivant.

PROPOSITION 11
Soient $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ une famille d'éléments de $\mathcal{S}_h$ sur I et $\mathcal{B}$ une base de E. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. *Pour tout $t \in I$, $W_{\mathcal{B}}(t) \neq 0$,*
2. *Il existe un élément $t_0 \in I$ tel que $W_{\mathcal{B}}(t_0) \neq 0$,*
3. *$(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ est un système fondamental de solutions.*

3.2 Méthode de variation des constantes

3.2.1 Cas des équations différentielles vectorielles du premier ordre

Lemme 12

Soient $a : I \longrightarrow \mathcal{L}(E)$ et $b : I \longrightarrow E$ des applications continues. Soit $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ un système fondamental de solutions de l'équation homogène $y' = a(t) \cdot y$. Alors

1. *Pour tout $t \in I$, la famille $\mathcal{B}_t = (\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$ est une base de E.*
2. *Soit $k \in \{0, 1\}$. Soit $g : I \longrightarrow E$ une application de classe $\mathcal{C}^k$. Posons, pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, $g_j(t)$ la $j^{\text{ième}}$ composante de $g(t)$ dans la base $\mathcal{B}_t$. Alors g_j est de classe $\mathcal{C}^k$.*

Preuve —

1. $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ étant un système fondamental de solutions, pour tout $t \in I$, $(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$ est une base de E.
2. Soit $\mathcal{B}$ une base de E. Notons, pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, $\tilde{g}_j$ la $j^{\text{ème}}$ composante de g dans $\mathcal{B}$. Alors g étant de classe $\mathcal{C}^k$, pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, $\tilde{g}_j$ est de classe $\mathcal{C}^k$.
   Posons, pour tout $t \in I$, $P(t) = \mathcal{P}_{\mathcal{B},\mathcal{B}_t}$ la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}_t$.
   Pour tout $t \in I$, on a donc
   $$\begin{pmatrix} \tilde{g}_1(t) \\ \vdots \\ \tilde{g}_n(t) \end{pmatrix} = P(t) \begin{pmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{pmatrix}, \quad \text{soit} \quad \begin{pmatrix} g_1(t) \\ \vdots \\ g_n(t) \end{pmatrix} = P(t)^{-1} \begin{pmatrix} \tilde{g}_1(t) \\ \vdots \\ \tilde{g}_n(t) \end{pmatrix} \quad (*).$$
   Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, le coefficient $p_{i,j}(t)$ d'indice (i, j) de la matrice $P(t)$ est la $i^{\text{ème}}$ composante de $\varphi_j(t)$ dans la base $\mathcal{B}$ et est donc de classe $\mathcal{C}^k$ puisque φ_j l'est.
   Les coefficients de $P(t)^{-1}$ étant polynomiaux en ceux de $P(t)$, on en déduit qu'ils sont de classe $\mathcal{C}^k$.
   Ainsi, d'après la relation $(*)$ pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, g_j est de classe $\mathcal{C}^k$.

□

Proposition 13

Soient $a : I \longrightarrow \mathcal{L}(E)$ et $b : I \longrightarrow E$ des applications continues. Soit $(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ un système fondamental de solutions de l'équation homogène $y' = a(t) \cdot y$. Soit $\varphi : I \longrightarrow E$ une application dérivable.

Alors il existe ψ_1, …, ψ_n n applications dérivables de I dans $\mathbb{K}$ telles que

$$\varphi = \psi_1\varphi_1 + \ldots + \psi_n\varphi_n.$$

De plus, φ est solution de l'équation $y' = a(t) \cdot y + b(t)$ si et seulement si

$$\psi_1'\varphi_1 + \ldots + \psi_n'\varphi_n = b.$$

Preuve — Notons, pour tout $t \in I$, $\mathcal{B}_t$ la base $(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t))$ est une base de E Pour tout $t \in I$, notons $\psi_1(t)$, …, $\psi_n(t)$ les composantes de $\varphi(t)$ dans la base $\mathcal{B}_t$.

On a donc, pour tout $t \in I$,
$$\varphi(t) = \psi_1(t)\varphi_1(t) + \ldots + \psi_n(t)\varphi_n(t)$$
et d'après le lemme, les applications $\psi_j : I \longrightarrow \mathbb{K}$ sont dérivables.

De plus, pour tout $t \in I$,
$$\varphi'(t) = \sum_{i=1}^{n} \psi_1'(t)\varphi_i(t) + \sum_{i=1}^{n} \psi_i(t)\varphi_i'(t).$$

Ainsi, φ est solution de $y' = a(t) \cdot y + b(t)$ si et seulement si, pour tout $t \in I$,
$$\sum_{i=1}^{n} \psi_i'(t)\varphi_i(t) + \sum_{i=1}^{n} \psi_i(t)\varphi_i'(t) = a(t) \cdot \sum_{i=1}^{n} \psi_i(t)\varphi_i(t) + b(t),$$
soit encore, puisque $\sum_{i=1}^{n} \psi_i(t)(\varphi_i'(t) - a(t) \cdot \varphi_i(t)) = 0$, si et seulement si, pour tout $t \in I$,
$$\sum_{i=1}^{n} \psi_i'(t)\varphi_i(t) = b(t).$$

D'où le résultat. □

Détaillons alors comment en déduire l'ensemble des solutions de l'équation $y' = a(t) \cdot y + b(t)$.

Notons, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $b_i(t)$ la $i^{\text{ème}}$ composante de $b(t)$ dans la base $\mathcal{B}_t$. D'après le lemme, les b_i sont continues.

Soit φ une application continue de I dans E. En reprenant les notations précédentes, on obtient que φ est solution si et seulement si, pour tout $t \in I$,

$$\sum_{i=1}^{n} (\psi_i'(t) - b_i(t))\varphi_i(t) = 0,$$

soit encore, si et seulement si, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\psi_i' = b_i.$$

Notons, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, B_i une primitive de b_i.

Alors, φ est solution si et seulement si, il existe des constantes $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ telles que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\psi_i = B_i + \lambda_i.$$

On en déduit que l'ensemble des solutions de l'équation $y' = a(t) \cdot y + b(t)$ est

$$\mathcal{S} = \left\{ I \longrightarrow E \;;\; t \longmapsto \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i(t) + \sum_{i=1}^{n} B_i(t)\varphi_i(t) \mid (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \right\}.$$

Remarque 14 — *Avec $E = \mathbb{K}$ et donc $n = 1$, on retrouve la méthode de variations de la constante utilisée dans le chapitre 2 pour résoudre les équations différentielles linéaires scalaires du premier ordre.*

Exemple 15 — *Déterminons les solutions définies sur $\mathbb{R}$ du système différentiel*

$$Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Identification : *Il s'agit d'une équation différentielle vectorielle de taille 2 à coefficients constants et second membre continu sur $\mathbb{R}$.*
- Solutions de l'équation homogène : *Les applications $\varphi_1 : t \longmapsto \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \\ \mathrm{e}^t \end{pmatrix}$ et $\varphi_2 : t \longmapsto \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} \\ -\mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}$ sont solutions de l'équation homogène $Y' = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} Y$. Comme $W(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = -2$, (φ_1, φ_2) forme un système fondamental de solutions de l'équation homogène.*
  Donc l'ensemble des solutions de l'équation homogène est

$$\mathcal{S}_h = \left\{ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \;;\; t \longmapsto \lambda_1 \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \\ \mathrm{e}^t \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} \\ -\mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

- Solution particulière de l'équation : *Appliquons la méthode de variations des constantes. On cherche une solution particulière φ_p sous la forme $\varphi_p(t) = \psi_1(t)\varphi_1(t) + \psi_2(t)\varphi_2(t)$ où ψ_1 et ψ_2 sont des applications dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.*
  Alors φ_p est solution de l'équation si et seulement si, pour tout $t \in I$,

$$\psi_1'(t)\varphi_1(t) + \psi_2'(t)\varphi_2(t) = \begin{pmatrix} 2\mathrm{e}^t \\ 1 \end{pmatrix},$$

  soit encore, si et seulement si,

$$\begin{cases} \psi_1'(t)\mathrm{e}^t + \psi_2'(t)\mathrm{e}^{-t} = 2\mathrm{e}^t \\ \psi_1'(t)\mathrm{e}^t - \psi_2'(t)\mathrm{e}^{-t} = 1 \end{cases}.$$

Donc φ_p est solution de l'équation si et seulement si, pour tout $t \in I$,

$$\begin{cases} \psi_1'(t) = 1 + \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-t} \\ \psi_2'(t) = \mathrm{e}^{2t} - \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{t} \end{cases}.$$

Choisissons par exemple, pour ψ_1 et ψ_2 les fonctions définies pour tout $t \in I$ par

$$\begin{cases} \psi_1(t) = t - \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-t} \\ \psi_2(t) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2t} - \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{t} \end{cases}.$$

La fonction $\varphi_p : t \longmapsto \begin{pmatrix} (t+\frac{1}{2})\mathrm{e}^t - 1 \\ (t-\frac{1}{2})\mathrm{e}^t \end{pmatrix}$ est alors une solution particulière de l'équation.

– Conclusion : *L'ensemble des solutions de l'équation homogène est donc*

$$\mathcal{S} = \left\{ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \ ;\ t \longmapsto \lambda_1 \begin{pmatrix} \mathrm{e}^t \\ \mathrm{e}^t \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t} \\ -\mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (t+\frac{1}{2})\mathrm{e}^t - 1 \\ (t-\frac{1}{2})\mathrm{e}^t \end{pmatrix} \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

3.2.2 Application aux équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 2

Nous avons déjà étudié au chapitre 2 les équations différentielles linéaires scalaires du deuxième ordre, de la forme

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t),$$

où a, b et c sont des applications continues sur I. Nous avons notamment donné différentes méthodes permettant parfois de trouver un système fondamental de solutions de l'équation homogène. Certaines méthodes (par exemple un changement de variables bien trouvé) permettent même d'obtenir directement l'ensemble des solutions de l'équation avec second membre.

Nous allons adapter la méthode de variations des constantes développée au paragraphe précédent au cas des équations scalaires du deuxième ordre afin d'obtenir une solution particulière de l'équation avec second membre lorsque l'on connaît deux solutions formant un système fondamental de solutions de l'équation homogène.

Nous avons expliqué au chapitre 1 comment ramener une équation différentielle scalaire d'ordre n à une équation différentielle vectorielle du premier ordre.

Dans le cas particulier de l'ordre 2, l'équation différentielle

$$y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t) \tag{E_2}$$

se ramène à l'équation différentielle

$$Y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & -a(t) \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} 0 \\ c(t) \end{pmatrix}. \tag{E_{v1}}$$

Plus précisément, nous avons vu que si φ est solution de l'équation (E_2) alors $\begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi' \end{pmatrix}$ est solution de l'équation (E_{v1}), et si $\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix}$ est solution de l'équation (E_{v1}) alors φ_1 est solution de l'équation (E_2).

Remarque 16 — *Remarquons que le wronskien $W_{\mathcal{B}_c}$ de $\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_1' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_2' \end{pmatrix}$ dans la base canonique de $\mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{K})$ est égal au wronskien ω de (φ_1, φ_2) :*

$$W_{\mathcal{B}_c}(t) = \omega(t) = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 \\ \varphi_1' & \varphi_2' \end{vmatrix}.$$

La famille (φ_1, φ_2) forme donc un système fondamental de solutions de (E_2) si et seulement si la famille $\left(\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_1' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \varphi_2 \\ \varphi_2' \end{pmatrix}\right)$ forme un système fondamental de solutions de (E_{v1}).

Proposition 17
Soit (φ_1, φ_2) un système fondamental de solutions de l'équation homogène $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$ sur I. Soit φ une application de I dans E.

Alors il existe ψ_1 et ψ_2 deux fonctions dérivables de I dans $\mathbb{K}$ telles que

$$\begin{cases} \varphi = \psi_1\varphi_1 + \psi_2\varphi_2 \\ \varphi' = \psi_1\varphi_1' + \psi_2\varphi_2' \end{cases}.$$

De plus, φ est solution de l'équation $y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$ si et seulement si

$$\begin{cases} \psi_1'\varphi_1 + \psi_2'\varphi_2 = 0 \\ \psi_1'\varphi_1' + \psi_2'\varphi_2' = c \end{cases}.$$

Preuve — La famille (φ_1, φ_2) formant un système fondamental de solutions de (E_2), la famille $\left(\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_1'\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\varphi_2\\ \varphi_2'\end{pmatrix}\right)$ forme un système fondamental de solutions de (E_{v1}). Il existe donc deux application dérivables ψ_1 et ψ_2 de I dans $\mathbb{K}$ telles que

$$\begin{pmatrix}\varphi\\ \varphi'\end{pmatrix} = \psi_1\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_1'\end{pmatrix} + \psi_2\begin{pmatrix}\varphi_2\\ \varphi_2'\end{pmatrix}.$$

De plus, on sait que $\begin{pmatrix}\varphi\\ \varphi'\end{pmatrix}$ est solution de (E_{v1}) si et seulement si

$$\psi_1'(t)\begin{pmatrix}\varphi_1(t)\\ \varphi_1'(t)\end{pmatrix} + \psi_2'(t)\begin{pmatrix}\varphi_2(t)\\ \varphi_2'(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ c(t)\end{pmatrix},$$

soit encore, si et seulement si

$$\begin{cases} \psi_1'\varphi_1 + \psi_2'\varphi_2 = 0 \\ \psi_1'\varphi_1' + \psi_2'\varphi_2' = c \end{cases}.$$

On en déduit que φ est solution de (E_2) si et seulement si

$$\begin{cases} \psi_1'\varphi_1 + \psi_2'\varphi_2 = 0 \\ \psi_1'\varphi_1' + \psi_2'\varphi_2' = c \end{cases}.$$

D'où le résultat. □

Détaillons alors comme en déduire l'ensemble des solutions de l'équation $y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$.

Soit φ une application continue de I dans E. En reprenant les notations précédentes, comme $\omega = \begin{vmatrix}\varphi_1 & \varphi_2\\ \varphi_1' & \varphi_2'\end{vmatrix}$ ne s'annule pas sur I, on en déduit que φ est solution si et seulement si

$$\psi_1' = \frac{\begin{vmatrix}0 & \varphi_2\\ c & \varphi_2'\end{vmatrix}}{\omega} \quad \text{et} \quad \psi_2' = \frac{\begin{vmatrix}\varphi_1 & 0\\ \varphi_1' & c\end{vmatrix}}{\omega}.$$

Ces applications sont bien continues sur I car les φ_i, φ_i et c le sont, et admettent donc des primitives, notées P_1 et P_2.

Alors φ est solution de (E_2) si et seulement s'il existe $(\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2$ tel que $\psi_1 = P_1 + c_1$ et $\psi_2 = P_2 + c_2$.

Donc l'ensemble des solutions de l'équation $y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$ est

$$\mathcal{S} = \left\{I \longrightarrow \mathbb{K}\,;\, t \longmapsto \lambda_1\varphi_1(t) + \lambda_2\varphi_2(t) + P_1(t)\varphi_1(t) + P_2(t)\varphi_2(t) \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2\right\}.$$

Remarque 18 — *Le système portant sur les dérivées de ψ_i se retrouve également en partant de*

$$\begin{cases} \varphi = \psi_1\varphi_1 + \psi_2\varphi_2 \\ \varphi' = \psi_1\varphi_1' + \psi_2\varphi_2' \end{cases}:$$

on dérive la première égalité puis on retranche la seconde pour obtenir $\psi_1'\varphi_1 + \psi_2'\varphi_2 = 0$. Ensuite, on peut dériver la seconde égalité puis remplacer dans l'équation pour obtenir $\psi_1'\varphi_1' + \psi_2'\varphi_2' = c$.

EXEMPLE 19 — *Déterminons les solutions définies sur $I = \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ de l'équation différentielle*

$$y'' + y = \frac{1}{\cos(t)}.$$

- Identification : *Il s'agit d'une équation différentielle linéaire scalaire du deuxième ordre à coefficients constants et second membre continu sur I.*
- Solutions de l'équation homogène : *L'ensemble $\mathcal{S}_h$ des solutions de l'équation homogène $y'' + y = 0$ est*
$$\mathcal{S}_h = \left\{I \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; t \longmapsto \lambda_1 \cos(t) + \lambda_2 \sin(t) \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$
- Solution particulière de l'équation : *Appliquons la méthode de variations des constantes. Posons, pour tout $t \in I$, $\varphi_1(t) = \cos(t)$ et $\varphi_2(t) = \sin(t)$. D'après le point précédent, la famille (φ_1, φ_2) forme un système fondamental de solutions de l'équation homogène (puisqu'elle engendre l'espace vectoriel des solutions qui est de dimension 2).*
On cherche une solution particulière φ_p sous la forme $\varphi_p(t) = \psi_1(t)\varphi_1(t) + \psi_2(t)\varphi_2(t)$ où ψ_1 et ψ_2 sont des applications dérivables de I dans $\mathbb{K}$ et telles que $\varphi_p'(t) = \psi_1(t)\varphi_1'(t) + \psi_2(t)\varphi_2'(t)$.
Alors φ_p est solution de l'équation si et seulement si
$$\begin{cases} \psi_1'\varphi_1 + \psi_2'\varphi_2 = 0 \\ \psi_1'\varphi_1' + \psi_2'\varphi_2' = \dfrac{1}{\cos} \end{cases},$$
soit encore si et seulement si
$$\begin{cases} \psi_1' \cos + \psi_2' \sin = 0 \\ -\psi_1' \sin + \psi_2' \cos = \dfrac{1}{\cos} \end{cases}.$$
Donc φ_p est solution de l'équation si et seulement si, pour tout $t \in I$,
$$\begin{cases} \psi_1'(t) = -\tan(t) \\ \psi_2'(t) = 1 \end{cases}.$$
Choisissons par exemple, pour ψ_1 et ψ_2 les fonctions définies pour tout $t \in I$ par
$$\begin{cases} \psi_1(t) = \ln(\cos(t)), \\ \psi_2(t) = t \end{cases}.$$
La fonction $\varphi_p : I \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; t \longmapsto \cos(t)\ln(\cos(t)) + t\sin(t)$ est alors une solution particulière de l'équation.
- Conclusion : *L'ensemble des solutions de l'équation est donc*

$$\mathcal{S} = \left\{I \longrightarrow \mathbb{R} \; ; \; t \longmapsto \lambda_1 \cos(t) + \lambda_2 \sin(t) + \cos(t)\ln(\cos(t)) + t\sin(t) \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$

3.3 Annexe : Utilisation des séries entières

Il s'agit ici de développer une méthode pour trouver des solutions d'une équation différentielle homogène linéaire (souvent d'ordre 2), méthode que nous n'avons pas étudiée au chapitre 2, les séries entières n'étant pas encore connues.

L'idée est de chercher des solutions de l'équation différentielle sous la forme de la somme d'une série entière $\sum_{n\geq 0} a_n t^n$ de rayon de convergence $R > 0$. En remplaçant dans l'équation, on trouve une relation de récurrence vérifiée par les a_n et on en déduit l'expression des a_n. On vérifie ensuite que les séries obtenues ont un rayon de convergence strictement positif. On obtient ainsi les solutions de l'équation développables en séries entières.

Voyons sur un exemple.

EXEMPLE 20 — *Déterminons l'ensemble des solutions définies sur* $\mathbb{R}$ *de l'équation*

$$y'' + 2ty' + 2y = 0. \tag{1}$$

- Identification : *Il s'agit d'une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2 à coefficients et second membre continus, sous forme résolue.*
- Solutions de l'équation homogène : *On va chercher des solutions de l'équation homogène sous la forme*

$$]-R, R[\longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n,$$

où $\sum_{n\geq 0} a_n t^n$ *est une série entière de rayon de convergence* $R > 0$.
Soit $\sum_{n\geq 0} a_n t^n$ *une série entière de rayon de convergence* R *et de somme* f.

  - Détermination de l'expression des coefficients a_n : *Supposons* $R > 0$. *Alors* f *est de classe* $\mathcal{C}^\infty$ *sur* $]-R, R[$ *et pour tout* $t \in]-R, R[$, *par dérivation terme à terme de la somme d'une série entière, on a*

$$\begin{aligned} f''(t) + 2tf'(t) + 2f(t) &= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)a_n t^{n-2} + 2t\sum_{n=1}^{+\infty} na_n t^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}t^n + \sum_{n=0}^{+\infty} 2na_n t^n + \sum_{n=0}^{+\infty} 2a_n t^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left((n+2)(n+1)a_{n+2} + 2(n+1)a_n\right) t^n. \end{aligned}$$

Remarquons que l'on peut toujours ajouter les premiers termes lorsque ceux-ci sont nuls.

Ainsi, par unicité du développement en série entière de l'application nulle, f *est solution sur* $]-R, R[$ *de l'équation si et seulement si pour tout* $n \in \mathbb{N}$,

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} + 2(n+1)a_n = 0. \tag{$*$}$$

La relation ($*$) *est vérifiée si et seulement si pour tout* $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+2} = \frac{-2}{n+2}a_n,$$

soit encore si et seulement si, pour tout $p \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} a_{2p} &= \frac{-1}{p}a_{2p-1} \\ &= \frac{-1}{p} \times \frac{-1}{p-1} \times \ldots \times \frac{-1}{1}a_0 \\ &= \frac{(-1)^p}{p!}a_0 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} a_{2p+1} &= \frac{-2}{2p+1}a_{2p-1} \\ &= \frac{-2}{2p+1} \times \frac{-2}{2p-1} \times \ldots \frac{-2}{3}a_1 \\ &= \frac{(-2)^p 2p \times (2p-2) \times \ldots 2}{(2p+1)!}a_1 \\ &= \frac{(-1)^p 4^p p!}{(2p+1)!}a_1. \end{aligned}$$

– Calcul du rayon de convergence : *Prenons* $a_0 = 1$ *et* $a_1 = 0$. *Alors la série entière* $\sum_{p\geq 0} a_{2p}t^{2p} = \sum_{p\geq 0} \dfrac{(-1)^p}{p!}t^{2p}$ *a pour rayon de convergence* $+\infty$ *et pour somme* $t \longmapsto \exp(-t^2)$. *Ainsi, l'application*

$$\varphi_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \exp(-t^2)$$

est solution de l'équation sur $\mathbb{R}$.

Prenons $a_0 = 0$ *et* $a_1 = 1$. *Alors la série entière* $\sum_{p\geq 0} a_{2p+1}t^{2p+1} = \sum_{p\geq 0} \dfrac{(-1)^p 4^p p!}{(2p+1)!}$ *a pour rayon de convergence* $+\infty$

En effet, soit $t \in \mathbb{R}^*$. *Posons, pour tout* $p \in \mathbb{N}$, $u_p = |a_{2p+1}t^{2p+1}|$ *et* $u_p > 0$. *On a*

$$\frac{u_{p+1}}{u_p} = \frac{4(p+1)}{(2p+3)(2p+2)}|t^2| \quad \xrightarrow[p\to+\infty]{} 0.$$

Donc, d'après la règle de d'Alembert, $R = +\infty$.

Ainsi, l'application

$$\varphi_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p 4^p p!}{(2p+1)!}t^{2p+1}$$

est solution de l'équation sur $\mathbb{R}$.

– Conclusion : *Le wronskien de* (φ_1, φ_2) *en* 0 *vaut* $\omega(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ *donc* (φ_1, φ_2) *forme un système fondamental de solutions de l'équation homogène.*

Donc

$$\mathcal{S}_h = \left\{\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ t \longmapsto \lambda_1\varphi_1(t) + \lambda_2\varphi_2(t) \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\right\}.$$