EQUA. DIFF

Chap 3. Equations différentielles linéaires vectorielles du premier ordre

Cours 10 (1)

I. Résultats généraux

1. Equations différentielles vectorielles et systèmes différentiels

$y' = a(t).y + b(t)$ $\quad a : I \to \mathcal{L}(E)$ $\quad \varphi : I \to E$.

φ est solution si $\quad b : I \to E$.

$\underbrace{\varphi'(t)}_{\in E} = \underbrace{a(t).\varphi(t)}_{\in E} + \underbrace{b(t)}_{\in E}$

$EDLS_1$: $y' = a(t)y + b(t)$ $\quad a : I \to \mathbb{K}$

$b : I \to \mathbb{K}$.

Si $\ell \in \mathcal{L}(E)$ alors pour tout $x \in E$, $\ell(x) \in E$

$\ell : E \to E'$

Ici $a : I \to \mathcal{L}(E)$, donc pour tout $t \in I$, $a(t) \in \mathcal{L}(E)$

$\forall t \in I$, $\varphi(t) \in E$ donc $\underbrace{a(t)(\varphi(t))}_{\text{noté } a(t).\varphi(t).} \in E$ $\qquad A(t) = \operatorname{mat}_{\mathcal{B}}(a(t))$

$Y' = A(t)Y + B(t) \Leftrightarrow Y' = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} Y + \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$ $\qquad \varphi : I \to \mathbb{K}^n$, $t \mapsto \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \vdots \\ \varphi_n(t) \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix}'(t) = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ \vdots & & \\ a_{n1}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1(t) \\ \vdots \\ b_n(t) \end{pmatrix}$ $\qquad$ où $\varphi_i : I \to \mathbb{K}$.

$$\begin{cases} \varphi_1'(t) = a_{11}(t)\varphi_1(t) + \cdots + a_{1n}(t)\varphi_n(t) + b_1(t) \\ \vdots \\ \varphi_n'(t) = \end{cases}$$

2. Problème de Cauchy

$$\varphi(t) - \varphi(t_0) = \int_{t_0}^{t} \varphi'(s)\,ds = \int_{t_0}^{t} a(s).\varphi(s) + b(s)\,ds$$

et $\varphi(t_0) = y_0$, $\quad \varphi(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} a(s)\varphi(s) + b(s)\,ds$.

I. Résultats généraux

3. Structure de l'ensemble des solutions

4. Système fondamental de solutions

Si $E = \mathbb{K}^2$, $y' = A(t)Y$

$\varphi_1 : I \to \mathbb{K}^2$, $t \mapsto \begin{pmatrix} \varphi_1^1(t) \\ \varphi_1^2(t) \end{pmatrix}$ $\quad \varphi_1^i(t) \in \mathbb{K}$.

$\varphi_2 : I \to \mathbb{K}^2$, $t \mapsto \begin{pmatrix} \varphi_2^1(t) \\ \varphi_2^2(t) \end{pmatrix}$ $\quad \varphi_2^i(t) \in \mathbb{K}$.

$$W_{\mathcal{B}_c}(t) = \det_{\mathcal{B}_c}(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) = \begin{vmatrix} \varphi_1^1(t) & \varphi_2^1(t) \\ \varphi_1^2(t) & \varphi_2^2(t) \end{vmatrix}$$

$$W(t) = \begin{vmatrix} \varphi_{11}(t) & \cdots & \varphi_{n1}(t) \\ \vdots & & \vdots \\ \varphi_{1n}(t) & & \varphi_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

$\uparrow$ coord de $\varphi_1(t)$ ds la bc $\qquad$ $\uparrow$ coord de $\varphi_n(t)$ ds la bc.

II. Méthode de variation des constantes

1. Cas des équations différentielles vectorielles d'ordre 1

$y' = a(t) \cdot y + b(t)$. (E).

On suppose connu $(\varphi_1, \dots \varphi_n)$ un système fondamental de solutions de $y' = a(t)y$. Donc on connait $S_H = \mathrm{vect}(\varphi_1, \dots \varphi_n)$.

Or $S = S_H + \varphi_p$ où φ_p est une solution particulière de (E).

Soit $g \in \mathcal{C}(I, E)$. Pour tout $t \in I$, $g(t) \in E$.

Donc on a $g(t) = g_1(t)\varphi_1(t) + \dots + g_n(t)\varphi_n(t)$.

Si $(e_1, \dots e_n)$ base de F, alors pour tout $x \in F$,

il existe $\lambda_1, \dots \lambda_n \in \mathbb{K}$ tel que $x = \sum \lambda_i e_i$.

EDLS$_1$ $y' = a(t)y + b(t)$. $a(t) \in \mathbb{K}$. $E = \mathbb{K} = \mathbb{K}^1$

$S_H = \{ t \mapsto \lambda e^{A(t)}, \lambda \in \mathbb{K} \}$

On cherche φ_p sous la forme $\varphi_p(t) = \psi(t) e^{A(t)}$ avec ψ dérivable.

φ_p est solution ssi $\psi'(t) e^{A(t)} = b(t)$

<u>Ex 15</u>. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ $y'' - y = 0$

$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$ $x'' = y' = x$

$X^2 - 1 = (X-1)(X+1)$. $t \mapsto \lambda_1 e^{t} + \lambda_2 e^{-t}$.

$\begin{matrix} x(t) = e^{t} \\ y(t) = e^{t} \end{matrix}$, $\begin{matrix} x(t) = e^{-t} \\ y(t) = -e^{-t} \end{matrix}$.