EQUA. DIFF

Chap 2 - Equations différentielles scalaires

Cours 8 (1)

$a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = d(t) \qquad (E)$

→ On cherche φ_1 une solution de l'équation homogène puis on applique la technique d'abaissement de l'ordre

→ ou on trouve φ_1 et φ_2 2 solutions indépendantes de (H) et on cherche une solution particulière φ_0 de l'équation (E).

→ Si on peut faire un changement de variables ou un changement de fonction inconnue, alors appliquer cela sur toute l'équation (E).

⟶ voir TD

2. Exemples de résolution d'équations différentielles non linéaires scalaires du premier ordre.

$a(t)y'' + b(t)y' + c(t)y = d(t) \qquad a, b, c, d$

$\tilde{a}(t)y' + \tilde{b}(t)y = \tilde{c}(t) \qquad \tilde{a}, \tilde{b}, \tilde{c}$

$\Big\}$ continues sur I.

2.1 - Equations à variables séparables

$\frac{dy}{dt} = g(t)\,h(y) \qquad \frac{1}{h(y)}\,dy = g(t)\,dt$

$y' = f(t, y) \qquad e^{t+y}\,y' = -1 \;,\quad \text{donc} \quad y' = -e^{-t-y}$

$e^{t+\varphi(t)}\,\varphi'(t) + 1 = 0$

$e^{t}\,e^{\varphi(t)}\,\varphi'(t) = -1 \qquad e^{\varphi(t)}\,\varphi'(t) = -e^{-t}$

$$\int e^{\varphi(t)}\varphi'(t)\,dt = \int e^{u}\,du$$
$$= e^{u} + C$$
$$= e^{\varphi(t)} + C.$$

$u = \varphi(t)$

$du = \varphi'(t)\,dt$

Si $\lambda < 0$, $e^{-t} + \lambda > 0$ ssi $e^{-t} > -\lambda$

ssi $-t > \ln(-\lambda)$

ssi $t < -\ln(-\lambda)$

2. Exemples de résolution d'équations différentielles non linéaires scalaires du premier ordre.

2.2. Equations autonomes

Cours 8 (2)

$y' = h(y)$. $(*)$

$\varphi_a : -a + I \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \varphi(a+t)$.

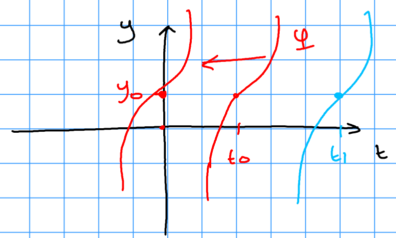
φ_a est dérivable ssi φ l'est et $\varphi_a'(t) = \varphi'(a+t)$.

φ est solution de $(*)$ ssi $\forall t \in I$, $\varphi'(t) = h(\varphi(t))$

ssi $\forall t \in -a+I$, $\varphi'(\underbrace{a+t}_{\in I}) = h(\varphi(\underbrace{a+t}_{\in I}))$

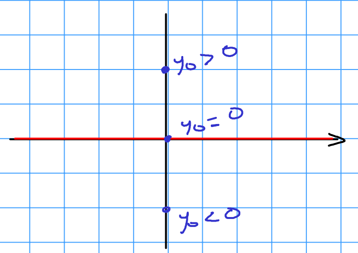
ssi $\forall t \in -a+I$, $\varphi_a'(t) = h(\varphi_a(t))$.

$\varphi_{t_0}(0) = \varphi(t_0+0) = \varphi(t_0)$



$\varphi'(t) = \varphi(t)^2$

$\dfrac{\varphi'(t)}{\varphi(t)^2} = 1$ ⚠



$\forall t \in I_m$, $\varphi_m(t) = \dfrac{1}{\frac{1}{y_0} - t}$.

$t \mapsto \dfrac{1}{\frac{1}{y_0} - t}$ est définie sur $]-\infty, \frac{1}{y_0}[\cup]\frac{1}{y_0}, +\infty[$.

$\frac{1}{y_0} - t \neq 0$ ssi $t \neq \frac{1}{y_0}$

Donc $I_m =]-\infty, \frac{1}{y_0}[$ et $0 \in I_m$.

ou $I_m =]\frac{1}{y_0}, +\infty[$.

2. Exemples de résolution d'équations différentielles non linéaires scalaires du premier ordre.

2.3. Se ramener au cas linéaire : équations de Bernoulli.

Cours 8 (3)

$$\varphi'(t) + a(t)\varphi(t) = b(t)\varphi(t)^m$$

$$\psi'(t) = (1-m)\varphi^{-m}(t)\varphi'(t) = (1-m)\varphi^{-m}(t)\left(-a(t)\varphi(t) + b(t)\varphi(t)^m\right)$$

$$= -(1-m)\,a(t)\,\underbrace{\varphi^{1-m}(t)}_{\psi(t)} + (1-m)\,b(t)$$

__Ex__

$$\psi(t) = \varphi(t)^{1-3} = \frac{1}{\varphi(t)^2}$$

$$\psi(t) = \frac{1}{\varphi(t)^2}$$

$$\varphi(t)^2 = \frac{1}{\psi(t)}$$

$$\varphi(t) = \pm\sqrt{\frac{1}{\underbrace{\psi(t)}_{>0}}}$$

$$\varphi'(t) = -t\varphi(t) + t\varphi(t)^3$$

$$\varphi(t) = \pm\sqrt{\frac{1}{\psi(t)}} = \pm\sqrt{\frac{1}{\lambda e^{t^2}+1}}$$

$$\psi(t) = 1 + \lambda e^{t^2}$$

Si $\lambda \geq 0$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\psi(t) > 0$.

$$\psi(t) = \frac{1}{\varphi(t)^2} \qquad \varphi(t) = \pm\sqrt{\frac{1}{\psi(t)}}.$$

Si $\lambda < 0$, $\psi'(t) = 2\lambda t\, e^{t^2}$

t	$-\infty$		$-\alpha_\lambda$		0		α_λ		$+\infty$
$\psi'(t)$		$+$		$+$		$-$		$-$	
$\psi(t)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$1+\lambda$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

Si $1+\lambda > 0$ alors $\lambda > -1$

$\psi(t) > 0$ ssi $1 + \lambda e^{t^2} > 0$

ssi $\lambda e^{t^2} > -1$

ssi $e^{t^2} < -\frac{1}{\lambda} \in]1, +\infty[$

ssi $t^2 < \ln\left(-\frac{1}{\lambda}\right) \in \mathbb{R}_+^*$

ssi $t \in \left]\underbrace{-\sqrt{\ln\left(-\frac{1}{\lambda}\right)}}_{-\alpha_\lambda}, \underbrace{\sqrt{\ln\left(-\frac{1}{\lambda}\right)}}_{\alpha_\lambda}\right[$

Si $1+\lambda \leq 0$ ie $\lambda \leq -1$ alors $\psi(t) \leq 0$