北航中法工程师学院
Centrale Pékin

Année académique 2020-2021
Examen de Mi-Semestre

Équations différentielles

Corrigé

Vendredi 13 Novembre 2020, de 16h00 à 18h00.

Correction

Exercice 1

1. Déterminer l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$(1+\mathrm{e}^x)y'+\mathrm{e}^x y=1.$$

L'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S}=\left\{\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\ ;\ x\longmapsto\lambda\frac{1}{1+e^x}+\frac{x}{1+e^x}\mid\lambda\in\mathbb{R}\right\}.$$

2. Déterminer l'ensemble des solutions définies sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$y''+2y'+2y=\cos(t)\mathrm{e}^{-t}-t+1.$$

L'ensemble des solutions est

$$\mathcal{S}=\left\{\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\ ;\ t\longmapsto e^{-t}(\lambda_1\cos(t)+\lambda_2\sin(t))+\frac{1}{2}te^{-t}\sin(t)-\frac{1}{2}t+1\mid(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$

Exercice 2

L'objectif de cet exercice est de déterminer l'expression des éléments de l'ensemble $\mathcal{F}$ constitué des applications f de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$, dérivables, telles que pour tout $t\in]0,+\infty[$,

$$f'(t)=f\left(\frac{1}{4t}\right).$$

1. Déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation $4t^2y''+y=0$. *On pourra effectuer le changement de variables « $x=\ln(t)$ ».*

Par le changement de variables « « $x=\ln(t)$ », l'équation se ramène à $4y''-4y'+y=0$, dont les solutions sont les applications de la forme $x\longmapsto(\lambda_1+\lambda_2x)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x}$.
Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation est

$$\mathcal{S}=\left\{\mathbb{R}_+^*\longrightarrow\mathbb{R}\ ;\ t\longmapsto(\lambda_1+\lambda_2\ln(t))\sqrt{t}\mid(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2\right\}.$$

2. Soit f un élément de $\mathcal{F}$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ et que $f\in\mathcal{S}$.

L'application $t\longmapsto\dfrac{1}{4t}$ est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Comme f est dérivable, f' est dérivable et $f''(t)=-\dfrac{1}{4t^2}f'\left(\frac{1}{4t}\right)=-\dfrac{1}{4t^2}f(t)$. f étant dérivable donc continue, on en déduit que f'' est continue. Donc f est de classe $\mathcal{C}^2$ et f est solution de l'équation différentielle $y''+\dfrac{1}{4t^2}y=0$, soit encore

$$4t^2y''+y=0.$$

3. En déduire que $\mathcal{F}$ est l'ensemble des applications de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ de la forme $t\longmapsto\lambda\sqrt{t}$, où $\lambda\in\mathbb{R}$.

Soit $f\in\mathcal{F}$. Alors d'après la question précédente, $f\in\mathcal{S}$. Il existe donc $(\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2$ tel que pour tout $t\in\mathbb{R}_+^*$,

$$f(t)=(\lambda_1+\lambda_2\ln(t))\sqrt{t}.$$

Comme $f\in\mathcal{F}$, on a, pour tout $t\in]0,+\infty[$, $f'(t)=f\left(\dfrac{1}{4t}\right)$.

Donc, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\lambda_2\sqrt{t} + \frac{\lambda_1}{2\sqrt{t}} + \frac{\lambda_2 \ln(t)}{2\sqrt{t}} = \left(\lambda_1 + \lambda_2 \ln\left(\frac{1}{4t}\right)\right)\frac{1}{2\sqrt{t}},$$

soit

$$\frac{\lambda_2}{\sqrt{t}} + \frac{\lambda_1}{2\sqrt{t}} + \frac{\lambda_2 \ln(t)}{2\sqrt{t}} = (\lambda_1 - 2\lambda_2\ln(2) - \lambda_2\ln(t))\frac{1}{2\sqrt{t}},$$

soit

$$\lambda_2\ln(t) + \lambda_2 + \lambda_2\ln(2) = 0.$$

Donc $\lambda_2 = 0$. Donc, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $f(t) = \lambda_1\sqrt{t}$.
Réciproquement, une telle application appartient à $\mathcal{F}$.
D'où le résultat.

Exercice 3

On considère l'équation différentielle

$$x^2y'' + a(x)y' + b(x)y = 0, \qquad (E_3)$$

où a et b sont des applications continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On note $\mathcal{S}_+$ l'espace vectoriel des solutions de (E_3) sur l'intervalle $I =]0, +\infty[$ et $\mathcal{S}_-$ l'espace vectoriel des solutions de (E_3) sur l'intervalle $J =]-\infty, 0[$.

Nous allons étudier la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{S}$ des fonctions $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ vérifiant l'équation (E_3) sur $\mathbb{R}$ tout entier.

1. Donner la dimension des espaces $\mathcal{S}_+$ et $\mathcal{S}_-$.
   Il s'agit d'une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre 2, homogène à coefficients continus sur I et sur J et le coefficient x^2 de y'' ne s'annule pas sur I et J.
   Donc S^+ et S_- sont des espaces vectoriels de dimension 2.
2. On note Φ l'application linéaire de $\mathcal{S}$ vers $\mathcal{S}_+ \times \mathcal{S}_-$ définie par

$$\Phi(f) = (f_I, f_J),$$

   où f_I désigne la restriction de f à l'intervalle I et f_J désigne la restriction de f à l'intervalle J. Donner le noyau de l'application Φ et en déduire que la dimension de $\mathcal{S}$ est inférieure ou égale à 4.
   Soit $f \in \text{Ker}(\Phi)$. Alors f est nulle sur les intervalles I et J donc sur $\mathbb{R}^*$.
   Par continuité de f en 0, $f(0) = 0$.
   Donc f est l'application nulle sur $\mathbb{R}$, ce qui montre que $\text{Ker}(\Phi) = \{0_{\mathbb{R}}\}$.
   Φ étant une application linéaire injective, elle définit un isomorphisme de $\mathcal{S}$ sur $\text{Im}(\Phi)$.
   Or $\text{Im}(\Phi)$ est un sev de $\mathcal{S}_+ \times \mathcal{S}_-$ qui est un ev de dimension $2 + 2 = 4$.
   Donc $\text{Im}(\Phi)$ est un ev de dimension finie et $\dim(\text{Im}(\Phi)) \leq 4$.
   Etant isomorphe à $\text{Im}(\Phi)$, S est aussi de même dimension finie ce qui donne $\dim(S) \leq 4$.
3. Dans cette question, on traite le cas où a et b sont définies, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $a(x) = -6x$ et $b(x) = 12$. On s'intéresse donc à l'équation différentielle

$$x^2y'' - 6xy' + 12y = 0.$$

   (a) Déterminer $\mathcal{S}_+$ et $\mathcal{S}_-$. *On pourra chercher des solutions sous la forme $x \longmapsto x^\alpha$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.*
   Notons f_α la fonction définie sur I par $f_\alpha(x) = x^\alpha$.
   Alors f_a est solution de (E) si et seulement si pour tout $x > 0, x^2\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} - 6x\alpha x^{\alpha-1} + 12x^\alpha = 0$ soit encore, si et seulement si pour tout $x > 0, x^\alpha \times (\alpha^2 - 7\alpha + 12) = 0$
   4 et 3 sont solutions de l'équation $\alpha^2 - 7\alpha + 12$ donc les fonctions $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto x^4$ sont éléments de S^+.
   Les solutions $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto x^4$ sont indépendantes car $w(1) = 1 \neq 0$ et S^+ est de dimension 2.
   Donc c'est une base de S^+ et

$$S^+ = \{\mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ x \longmapsto \lambda_1 x^3 + \lambda_2 x^4 \mid (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{R}^2\}.$$

   On vérifie immédiatement par le calcul que $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto x^4$ définissent deux fonctions sur J

solutions de (E). Elles sont également indépendantes et $\dim(S^-) = 2$.
Donc
$$S^- = \{\mathbb{R}_-^* \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ x \longmapsto \lambda_3 x^3 + \lambda_4 x^4 \mid (\lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^2\}.$$

(b) En déduire $\mathcal{S}$ et donner la dimension de $\mathcal{S}$.
Soit f une solution définie sur $\mathbb{R}$. D'après le point précédent, il existe donc $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$f(x) = \begin{cases} \lambda_1 x^3 + \lambda_2 x^4 \text{ si } x > 0, \\ \lambda_3 x^3 + \lambda_4 x^4 \text{ si } x < 0. \end{cases}$$

f étant continue en 0, on a $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$.
Or
$$f(x) = \begin{cases} \lambda_1 x^3 + \lambda_2 x^4 & \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0 \\ \lambda_3 x^3 + \lambda_4 x^4 & \xrightarrow[x\to 0^-]{} 0 \end{cases}$$

Donc nécessairement, f est définie par

$$f(x) = \begin{cases} \lambda_1 x^3 + \lambda_2 x^4 \text{ si } x \geq 0, \\ \lambda_3 x^3 + \lambda_4 x^4 \text{ si } x < 0. \end{cases} \tag{1}$$

Réciproquement, soient $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ et f définie comme ci-dessus. Étudions la dérivabilité à l'ordre 1 et 2 de f et regardons si elle vérifie l'équation sur $\mathbb{R}$.
La restriction de f aux intervalles ouverts I et J est dérivable à l'ordre 2, donc f est dérivable à l'ordre 2 sur $\mathbb{R}^*$ et vérifie l'équation différentielle en tout point de $\mathbb{R}^*$.
On a
$$f'(x) = \begin{cases} 3\lambda_1 x^2 + 4\lambda_2 x^3 & \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0 \\ 3\lambda_3 x^2 + 4\lambda_4 x^3 & \xrightarrow[x\to 0^-]{} 0 \end{cases}.$$

Donc, les deux limites étant égales, f est dérivable en 0, de dérivée $f'(0) = 0$.
On a également
$$f''(x) = \begin{cases} 6\lambda_1 x + 12\lambda_2 x^2 & \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0 \\ 6\lambda_3 x + 12\lambda_4 x^2 & \xrightarrow[x\to 0^-]{} 0 \end{cases}.$$

Donc f est deux fois dérivable en 0 et $f''(0) = 0$.
De plus, $0 \times f''(0) - 6 \times 0 \times f'(0) + 12 f(0) = 0$. Donc f est solution en 0 et donc sur $\mathbb{R}$.
Conclusion : L'ensemble des solutions sur $\mathbb{R}$ de $x^2 y'' - 6xy' + 12y = 0$ est donc

$$\mathcal{S} = \left\{ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\ ;\ x \longmapsto \begin{cases} \lambda_1 x^3 + \lambda_2 x^4 \text{ si } x \geq 0 \\ \lambda_3 x^3 + \lambda_4 x^4 \text{ si } x < 0 \end{cases} \mid (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4 \right\}.$$

Donc $\mathcal{S}$ est de dimension 4.

4. Donner un exemple d'équation différentielle du type $x^2 y'' + a(x)y' + b(x)y = 0$ tel que $\dim \mathcal{S} = 0$ (on détaillera la réponse). *On pourra s'inspirer de la question précédente.*
Considérons l'équation $(E) : x^2 y'' + 4xy' + 2y$ (pour avoir $\alpha = -1$ et $\alpha = -2$ à la place de $\alpha = 3$ et $\alpha = 4$ comme à la question précédente).
Alors, on montre comme à la question 3.*b*. que $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ et $x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ sont deux solutions de (E) sur I et sur J.
Ces deux solutions sont indépendantes (wronskien non nul) . Donc comme précédemment, S^+ et $S-$ sont engendrés par ces deux fonctions.
Soit $f \in S$ une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
Alors il existe $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) \in \mathbb{R}^4$ tel que

$$f(x) = \begin{cases} \lambda_1 \dfrac{1}{x} + \lambda_2 \dfrac{1}{x^2} \text{ si } x > 0 \\ \lambda_3 \dfrac{1}{x} + \lambda_4 \dfrac{1}{x^2} \text{ si } x < 0 \end{cases}.$$

f étant continue en 0, on a $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = f(0)$.

Or

$$f(x) = \begin{cases} \lambda_1 \dfrac{1}{x} + \lambda_2 \dfrac{1}{x^2} & \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} \begin{cases} \infty \text{ si } (\lambda_1,\lambda_2) \neq (0,0) \\ 0 \text{ si } (\lambda_1,\lambda_2) = (0,0) \end{cases} \\ \lambda_3 \dfrac{1}{x} + \lambda_4 \dfrac{1}{x^2} & \underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} \begin{cases} \infty \text{ si } (\lambda_3,\lambda_4) \neq (0,0) \\ 0 \text{ si } (\lambda_3,\lambda_4) = (0,0) \end{cases} \end{cases}$$

Donc f est continue en 0 si et seulement si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Donc f est l'application nulle.
L'application nulle étant solution, $\mathcal{S} = \{0_{\mathbb{R}}\}$ est de dimension nulle.

Exercice 4

Soit $q : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application paire et de classe $\mathcal{C}^1$. On considère l'équation différentielle

$$y'' + q(t)y = 0. \tag{E_4}$$

1. Énoncer le théorème de Cauchy-Lipschitz adapté à cette équation.
2. Soit φ une solution de l'équation (E_4).
   (a) Démontrer que l'application ψ, définie pour tout $t \in \mathbb{R}$, par $\psi(t) = \varphi(-t)$, est également solution de l'équation (E_4).
   (b) En déduire que φ est une application paire si et seulement si $\varphi'(0) = 0$.
3. Montrer de même qu'une solution φ de l'équation (E_4) est impaire si et seulement si $\varphi(0) = 0$.
4. Démontrer que deux solutions de même parité de l'équation (E_4) ne sont pas indépendantes.

1. Soit $(t_0, y_0, y_1) \in \mathbb{R}^3$. L'application q étant continue, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'' + q(t)y = 0 \\ y(t_0) = y_0 \\ y'(t_0) = y_1 \end{cases}$$

admet une unique solution globale, définie sur $\mathbb{R}$.

2. (a) φ étant dérivable, ψ l'est aussi et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\psi'(t) = -\varphi'(-t)$ et $\psi''(t) = \varphi''(-t)$.
Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\varphi''(t) + q(t)\varphi(t) = 0$, et comme $-t \in \mathbb{R}$, on a aussi

$$\varphi''(-t) + q(-t)\varphi(-t) = 0.$$

q étant pair, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $q(-t) = q(t)$ et donc

$$\psi''(t) + q(t)\psi(t) = 0.$$

Donc ψ est solution de l'équation.

(b) Supposons φ paire. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi(-t) = \varphi(t)$ donc en dérivant, on a $-\varphi'(-t) = \varphi'(t)$.
En particulier, $-\varphi'(0) = \varphi'(0)$, donc $\varphi'(0) = 0$.
Réciproquement, supposons que $\varphi'(0) = 0$. Alors ψ est solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'' + q(t)y = 0 \\ y(0) = \varphi(0) \\ y'(0) = 0 \end{cases}.$$

Par unicité de la solution de ce problème de Cauchy, on en déduit que $\varphi = \psi$. Donc φ est paire.

3. Soit φ une solution de (E_4).
Si φ est impaire alors $\varphi(0) = \varphi(-0) = -\varphi(0)$ donc $\varphi(0) = 0$.
Supposons que $\varphi(0) = 0$. En considérant l'application $\tilde{\psi}$ définie par $\psi(t) = -\varphi(-t)$, on montre que ψ est solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'' + q(t)y = 0 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = \varphi'(0) \end{cases}.$$

Par unicité de la solution du problème de Cauchy, on en déduit que $\varphi = \tilde{\psi}$. Donc φ est impaire.
D'où le résultat.

4. Soient φ_1 et φ_2 deux solutions de même parité de l'équation (E_4).
   Le wronskien de (φ_1, φ_2) vaut $w = \varphi_1\varphi_2' - \varphi_1'\varphi_2$.
   Donc si φ_1 et φ_2 sont paires alors, d'après la question 2, $\varphi_1'(0) = \varphi_2'(0) = 0$ donc $w(0) = 0$.
   Et si φ_1 et φ_2 sont impaires alors, d'après la question 3, $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$ donc $w(0) = 0$.
   Donc les solutions φ_1 et φ_2 ne sont pas indépendantes.